⇨ *Sobre a Equivalência entre Gramáticas Independentes do Contexto e Autómatos de Pilha*

- **$L = L(G) \Rightarrow \exists\, P : L = N(P)$**

{ Gramática Independente do Contexto → Autómato de Pilha }

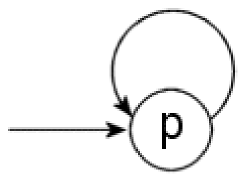
Algoritmo:

$$\mathbf{G = (\ V , \Sigma , R , S\ )}$$

$$\mathbf{P = (\ \{p\} , \Sigma , V \cup \Sigma , \delta , p,\ \ S , \{\ \}\ )}$$

δ : para cada $a \in \Sigma$, juntar $\delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\}$
para cada $A \rightarrow \alpha$, juntar $\delta(q, \varepsilon, A) = \{(q, \alpha)\}$

O Autómato obtido tem a forma:



a, a / ε $\forall\, a \in \Sigma$
ε, A / α $\forall\, [A \rightarrow \alpha] \in R$

Um só Estado,
sem Estados Finais - aceitação por Pilha Vazia,
uma Transição por Símbolo Terminal,
uma Transição por Produção.

Exemplo: Consideremos a Linguagem $\{ 0^n 1^n \mid n \geq 0 \}$

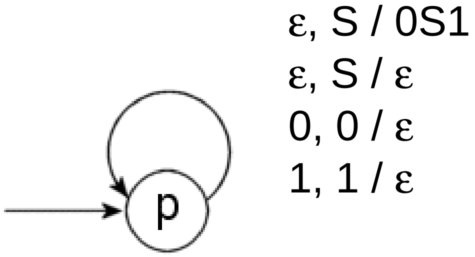
e a Gramática Independente do Contexto,

$$G = (\{S\}, \{0, 1\}, \{ S \rightarrow 0S1 \mid \varepsilon \}, S)$$

A partir desta **Gramática** e de acordo com o Algoritmo da página anterior construímos o **Autómato de Pilha**:

$$P = (\{p\}, \{0, 1\}, \{0, 1, S\}, \delta, p, S, \{\})$$

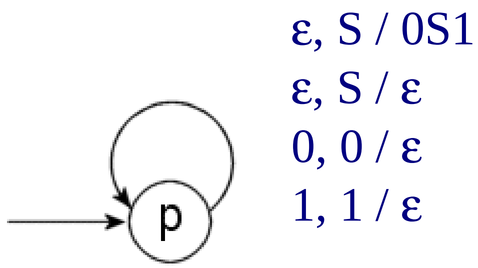
onde
$$\begin{aligned} \delta(p, \varepsilon, S) &= \{(p, 0S1), (p, \varepsilon)\} \\ \delta(p, 0, 0) &= \{(p, \varepsilon)\} \\ \delta(p, 1, 1) &= \{(p, \varepsilon)\} \end{aligned}$$



$|\Sigma| + |R| = 2 + 2 = 4$ ***transições***

Analisemos a correspondência entre os reconhecimentos de uma palavra pela Gramática original e pelo Autómato construído:

S → 0S1 | ε



Simulação para *w* = 000111:

S ⇒	(p, 000111, S) ⊢
⇒ 0S1	(p, **0**00111, **0**S1) ⊢
	(p, 00111, S1) ⊢
⇒ 00S11	(p, **0**0111, **0**S11) ⊢
	(p, 0111, S11) ⊢
⇒ 000S111	(p, **0**111, **0**S111) ⊢
	(p, 111, S111) ⊢
⇒ 000ε111	(p, **1**11, **1**11) ⊢
	(p, **1**1, **1**1) ⊢
	(p, **1**, **1**) ⊢
⇒ 000111	(p, ε)

- **$L = N(P) \Rightarrow \exists\, G : L = L(G)$**

{ Autómato de Pilha → Gramática Independente do Contexto }

Algoritmo:

$$\mathbf{P = (Q , \Sigma , \Gamma, \delta, q_0 , Z_0 , \{ \})}$$

$$\mathbf{G = (V, \Sigma , R , S)}$$

$$\mathbf{V} = \{ \mathbf{[pXq]} \mid \forall\ p, q \in Q, \forall\ X \in \Gamma \} \cup \{ \mathbf{S} \}$$

$$\mathbf{R} = \{ \mathbf{S \rightarrow [q_0 Z_0 p]} \mid \forall\ p \in Q \} \cup$$

$$\{ \mathbf{[pXp_{k+1}] \rightarrow a\ [p_1Y_1p_2]\ [p_2Y_2p_3]\ \ldots\ [p_kY_kp_{k+1}]} \mid$$

$$\forall\ a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\},$$

$$\forall\ p_2, p_3, \ldots, p_{k+1} \in Q,$$

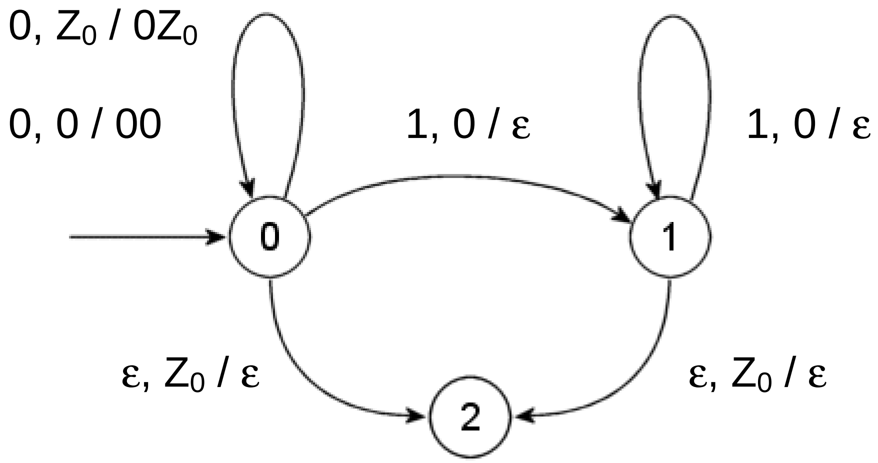
$$\forall\ (p_1, Y_1Y_2\ldots Y_k) \in \delta(p, a, X) \}$$

Exemplo: Consideremos a Linguagem $\{ 0^n 1^n \mid n \geq 0 \}$

e o Autómato de Pilha,

$P = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{0, 1, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{ \})$

onde:
$$\begin{aligned}
\delta(q_0,0,Z_0) &= \{(q_0,0Z_0)\} \\
\delta(q_0,0,0) &= \{(q_0,00)\} \\
\delta(q_0,1,0) &= \{(q_1,\varepsilon)\} \\
\delta(q_0,\varepsilon,Z_0) &= \{(q_2,\varepsilon)\} \\
\delta(q_1,1,0) &= \{(q_1,\varepsilon)\} \\
\delta(q_1,\varepsilon,Z_0) &= \{(q_2,\varepsilon)\}
\end{aligned}$$



A partir deste **Autómato** vamos construir
uma **Gramática Independente do Contexto**,
de acordo com o Algoritmo da página anterior.

Construção da Gramática G = (V, Σ , R , S)

Os Símbolos Terminais:

Σ = { 0, 1 }

A construção das Variáveis:

$\mathbf{V} = \{ \, \mathbf{[pXq]} \mid \forall\, p, q \in Q, \forall\, X \in \Gamma \, \} \cup \{ \, \mathbf{S} \, \}$

$[q_0Z_0q_0]$	$[q_00q_0]$	$[q_01q_0]$
$[q_0Z_0q_1]$	$[q_00q_1]$	$[q_01q_1]$
$[q_0Z_0q_2]$	$[q_00q_2]$	$[q_01q_2]$
$[q_1Z_0q_0]$	$[q_10q_0]$	$[q_11q_0]$
$[q_1Z_0q_1]$	$[q_10q_1]$	$[q_11q_1]$
$[q_1Z_0q_2]$	$[q_10q_2]$	$[q_11q_2]$
$[q_2Z_0q_0]$	$[q_20q_0]$	$[q_21q_0]$
$[q_2Z_0q_1]$	$[q_20q_1]$	$[q_21q_1]$
$[q_2Z_0q_2]$	$[q_20q_2]$	$[q_21q_2]$
		S

$$|V| = |[pXq]| + 1 = |Q| \times |\Gamma| \times |Q| + 1 = 3 \times 3 \times 3 + 1 = 28$$

A construção das Produções:

$\mathbf{R} = \{ S \rightarrow [q_0Z_0p] \mid \forall p \in Q \} \cup \ldots$

$S \rightarrow [q_0Z_0q_0]$

$S \rightarrow [q_0Z_0q_1]$

$S \rightarrow [q_0Z_0q_2]$

|Q| = 3 produções

$\mathbf{R} = \{ \ldots \cup \{ [pXp_{k+1}] \rightarrow a\ [p_1Y_1p_2]\ [p_2Y_2p_3] \ldots [p_kY_kp_{k+1}] \mid$

$\forall a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\},$

$\forall p_2, p_3, \ldots, p_{k+1} \in Q,$

$\forall (p_1, Y_1Y_2\ldots Y_k) \in \delta(p, a, X) \}$

Pela transição $\delta(q_0,0,Z_0) = \{(q_0,0Z_0)\}$:

$[q_0Z_0q_0] \rightarrow 0[q_00q_0][q_0Z_0q_0]$
$[q_0Z_0q_0] \rightarrow 0[q_00q_1][q_1Z_0q_0]$
$[q_0Z_0q_0] \rightarrow 0[q_00q_2][q_2Z_0q_0]$

$[q_0Z_0q_1] \rightarrow 0[q_00q_0][q_0Z_0q_1]$
$[q_0Z_0q_1] \rightarrow 0[q_00q_1][q_1Z_0q_1]$
$[q_0Z_0q_1] \rightarrow 0[q_00q_2][q_2Z_0q_1]$

$$[q_0Z_0q_2] \rightarrow 0[q_00q_0][q_0Z_0q_2]$$
$$[q_0Z_0q_2] \rightarrow 0[q_00q_1][q_1Z_0q_2]$$
$$[q_0Z_0q_2] \rightarrow 0[q_00q_2][q_2Z_0q_2]$$

e mais |Q| × |Q| = 3 × 3 = 9 produções

Pela transição $\delta(q_0,0,0) = \{(q_0,00)\}$:

$$[q_00q_0] \rightarrow 0[q_00q_0][q_00q_0]$$
$$[q_00q_0] \rightarrow 0[q_00q_1][q_10q_0]$$
$$[q_00q_0] \rightarrow 0[q_00q_2][q_20q_0]$$

$$[q_00q_1] \rightarrow 0[q_00q_0][q_00q_1]$$
$$[q_00q_1] \rightarrow 0[q_00q_1][q_10q_1]$$
$$[q_00q_1] \rightarrow 0[q_00q_2][q_20q_1]$$

$$[q_00q_2] \rightarrow 0[q_00q_0][q_00q_2]$$
$$[q_00q_2] \rightarrow 0[q_00q_1][q_10q_2]$$
$$[q_00q_2] \rightarrow 0[q_00q_2][q_20q_2]$$

e mais |Q| × |Q| = 3 × 3 = 9 produções

Pela transição $\delta(q_0,1,0) = \{(q_1,\varepsilon)\}$:

$$[q_00q_1] \rightarrow 1$$

Pela transição $\delta(q_0,\varepsilon,Z_0) = \{(q_2,\varepsilon)\}$:

$$[q_0Z_0q_2] \rightarrow \varepsilon$$

Pela transição $\delta(q_1,1,0) = \{(q_1,\varepsilon)\}$:

$$[q_1 0 q_1] \rightarrow 1$$

Pela transição $\delta(q_1,\varepsilon,Z_0) = \{(q_2,\varepsilon)\}$:

$$[q_1 Z_0 q_2] \rightarrow \varepsilon$$

Total: 3 + 9 + 9 + 1 + 1 + 1 + 1 = 25 produções

Análise da Gramática obtida:

Comecemos por simplificar os nomes das Variáveis:

A	J	$[q_0 1 q_0]$
B	K	$[q_0 1 q_1]$
C	L	$[q_0 1 q_2]$
D	M	$[q_1 1 q_0]$
E	N	$[q_1 1 q_1]$
F	P	$[q_1 1 q_2]$
G	Q	$[q_2 1 q_0]$
H	R	$[q_2 1 q_1]$
I	T	$[q_2 1 q_2]$
		S

$S \rightarrow A$
$S \rightarrow B$
$S \rightarrow C$

$A \rightarrow 0JA$
$A \rightarrow 0KD$
$A \rightarrow 0LG$
$B \rightarrow 0JB$
$B \rightarrow 0KE$
$B \rightarrow 0LH$
$C \rightarrow 0JC$
$C \rightarrow 0KF$
$C \rightarrow 0LI$

$J \rightarrow 0JJ$
$J \rightarrow 0KM$
$J \rightarrow 0LQ$
$K \rightarrow 0JK$
$K \rightarrow 0KN$
$K \rightarrow 0LR$
$L \rightarrow 0JL$
$L \rightarrow 0KP$
$L \rightarrow 0LT$

$K \rightarrow 1$
$C \rightarrow \varepsilon$
$N \rightarrow 1$
$F \rightarrow \varepsilon$

como 9 das 28 Variáveis iniciais não ocorrem em nenhuma das Produções, podem ser já eliminadas.

Simplificação da Gramática:

Partindo das Produções,

$K \rightarrow 1$
$C \rightarrow \varepsilon$
$N \rightarrow 1$
$F \rightarrow \varepsilon$

e eliminando as Produções que não contêm K, C, N e F nos seus lados direitos, verificamos que apenas as Variáveis K, C, N e F são Geradoras.
Eliminando todas as outras, restam apenas:

$S \rightarrow C$
$C \rightarrow 0KF$
$K \rightarrow 0KN$

$K \rightarrow 1$
$C \rightarrow \varepsilon$
$N \rightarrow 1$
$F \rightarrow \varepsilon$

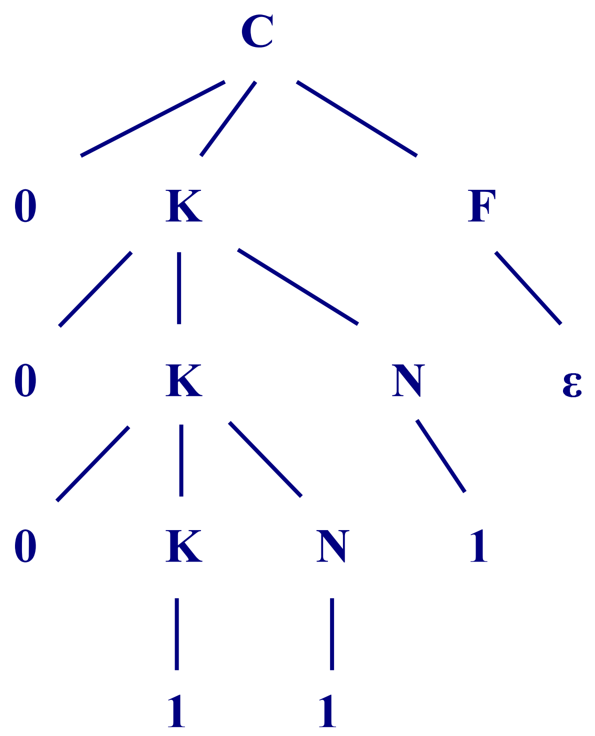
Eliminando a Produção Unitária obtemos,

$C \rightarrow 0KF \mid \varepsilon$
$K \rightarrow 0KN \mid 1$
$N \rightarrow 1$
$F \rightarrow \varepsilon$

Analisemos esta Gramática:

$C \rightarrow 0KF \mid \varepsilon$
$K \rightarrow 0KN \mid 1$
$N \rightarrow 1$
$F \rightarrow \varepsilon$

Pelo reconhecimento, por exemplo, da palavra 000111,



verificamos que:

$F \Rightarrow^* \varepsilon$
$N \Rightarrow^* 1$
$K \Rightarrow^* \{ 0^n 1^{n+1} \mid n \geq 0 \}$
$C \Rightarrow^* \{ 0^n 1^n \mid n \geq 0 \}$

Recuperando os nomes originais da construção das Variáveis,

$[q_1Z_0q_2] \quad \Rightarrow^* \ \boldsymbol{\varepsilon}$

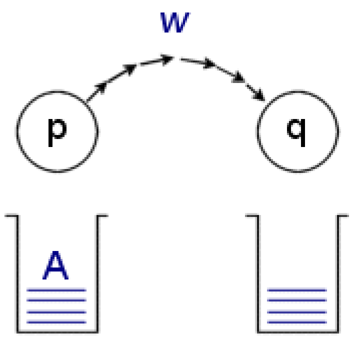
$[q_10q_1] \quad \Rightarrow^* \ \mathbf{1}$

$[q_00q_1] \quad \Rightarrow^* \ \{\ \mathbf{0^n\ 1^{n+1}} \mid n \geq 0\ \}$

$[q_0Z_0q_2] \quad \Rightarrow^* \ \{\ \mathbf{0^n\ 1^n} \mid n \geq 0\ \}$

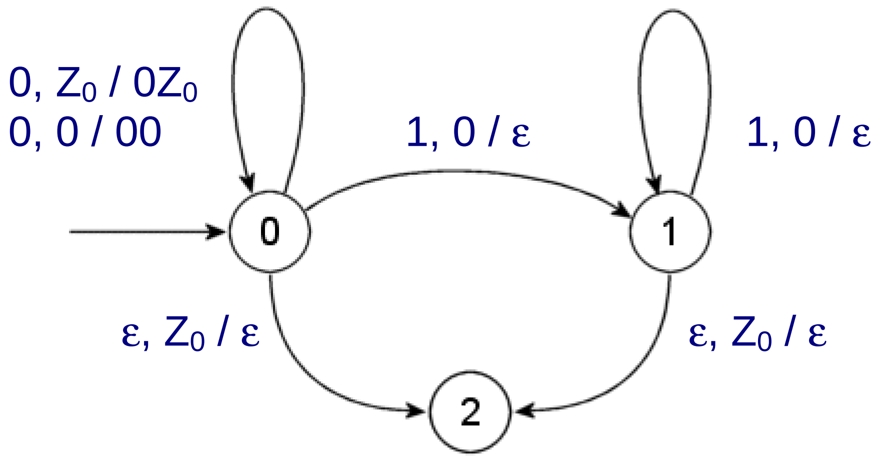
verificamos que, efectivamente, cada Variável da forma **[pAq]** gera as palavras $w \in \Sigma^*$, tais que **$(p, w, A) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$**, ou seja:

$$\boxed{[pAq] \Rightarrow^* w \iff (p, w, A) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)}$$



$[q_1Z_0q_2] \Rightarrow^* \ \boldsymbol{\varepsilon}$	$(q_1, \varepsilon, Z_0) \vdash^* (q_2, \varepsilon, \varepsilon)$
$[q_10q_1] \Rightarrow^* \ \mathbf{1}$	$(q_1, 1, 0) \vdash^* (q_1, \varepsilon, \varepsilon)$
$[q_00q_1] \Rightarrow^* \ \{\ \mathbf{0^n\ 1^{n+1}} \mid n \geq 0\ \}$	$(q_0, 0^n\ 1^{n+1}, 0) \vdash^* (q_1, \varepsilon, \varepsilon)$
$[q_0Z_0q_2] \Rightarrow^* \ \{\ \mathbf{0^n\ 1^n} \mid n \geq 0\ \}$	$(q_0, 0^n\ 1^n, Z_0) \vdash^* (q_2, \varepsilon, \varepsilon)$

Analisemos a correspondência entre os reconhecimentos de uma palavra pelo Autómato original e pela Gramática construída:



$$[q_0Z_0q_2] \rightarrow 0\ [q_00q_1]\ [q_1Z_0q_2] \mid \varepsilon$$
$$[q_00q_1] \rightarrow 0\ [q_00q_1]\ [q_10q_1] \mid 1$$
$$[q_10q_1] \rightarrow 1$$
$$[q_1Z_0q_2] \rightarrow \varepsilon$$

Para a palavra 000111,

$[q_0Z_0q_2] \Rightarrow \mathbf{0}[q_00q_1][q_1Z_0q_2]$	$(q_0,\mathbf{0}00111,Z_0) \vdash$
$\Rightarrow 0\mathbf{0}[q_00q_1][q_10q_1][q_1Z_0q_2]$	$(q_0,\mathbf{0}0111,0Z_0) \vdash$
$\Rightarrow 00\mathbf{0}\ [q_00q_1][q_10q_1][q_10q_1][q_1Z_0q_2]$	$(q_0,\mathbf{0}111,00Z_0) \vdash$
$\Rightarrow 000\mathbf{1}\ [q_10q_1][q_10q_1][q_1Z_0q_2]$	$(q_0,\mathbf{1}11,000Z_0) \vdash$
$\Rightarrow 0001\mathbf{1}\ [q_10q_1][q_1Z_0q_2]$	$(q_1,\mathbf{1}1,00Z_0) \vdash$
$\Rightarrow 00011\mathbf{1}\ [q_1Z_0q_2]$	$(q_1,\mathbf{1},0Z_0) \vdash$
$\Rightarrow 000111\ \varepsilon$	$(q_1,\varepsilon,Z_0) \vdash$
$\Rightarrow 000111$	$(q_2,\varepsilon,\varepsilon)$

É claro que o anterior conjunto de Produções pode ser escrito:

$C \rightarrow 0K \mid \varepsilon$
$K \rightarrow 0K1 \mid 1$

o que é equivalente à conhecida Gramática:

$$\boxed{S \rightarrow 0S1 \mid \varepsilon}$$

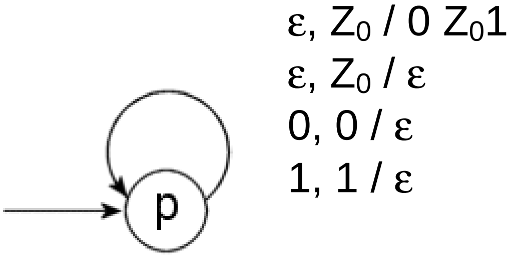
{ A geração desta Gramática é naturalmente muito mais simples se partirmos do Autómato não-determinista. }

Exemplo: Consideremos a Linguagem $\{ 0^n 1^n \mid n \geq 0 \}$

e o Autómato de Pilha,

$P = (\{p\}, \{0, 1\}, \{0, 1, Z_0\}, \delta, p, Z_0, \{ \})$

onde: $\delta(p, \varepsilon, Z_0) = \{(p, 0Z_01), (p, \varepsilon)\}$
$\delta(p, 0, 0) = \{(p, \varepsilon)\}$
$\delta(p, 1, 1) = \{(p, \varepsilon)\}$



As Variáveis:

$V = \{ [pZ_0p] , [p0p] , [p1p] , S \}$

As Produções:

$S \rightarrow [pZ_0p]$

Pela transição $\delta(p, \varepsilon, Z_0) = \{(p, 0Z_01), (p, \varepsilon)\}$:

por $(p, 0Z_01) \in \delta(p, \varepsilon, Z_0)$:

$[pZ_0p] \rightarrow [p0p]\ [pZ_0p]\ [p1p]$

e por $(p, \varepsilon) \in \delta(p, \varepsilon, Z_0)$:

$[pZ_0p] \rightarrow \varepsilon$

Pela transição $\delta(p, 0, 0) = \{(p, \varepsilon)\}$:

$[p0p] \rightarrow 0$

Pela transição $\delta(p, 1, 1) = \{(p, \varepsilon)\}$:

$[p1p] \rightarrow 1$

Que é claramente equivalente a:

$$\boxed{S \rightarrow 0S1 \mid \varepsilon}$$