- **Construir Gramáticas Independentes do Contexto para as seguintes Linguagens:**

1. $\{ a^n \mid n \geq 0 \}$

2. $\{ a^n \mid n > 0 \}$

3. $\{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$

4. $\{ a^n b^n \mid n > 0 \}$

5. $\{ a^n b^{n+1} \mid n \geq 0 \}$

6. $\{ a^m b^n \mid m \leq n,\ m, n \geq 0 \}$

7. $\{ a^m b^n \mid m \geq n,\ m, n \geq 0 \}$

8. $\{ a^m b^n \mid m \leq n + 3,\ m, n \geq 0 \}$

9. $\{ a^n b^{2n} \mid n \geq 0 \}$

10. $\{ a^m b^n \mid 2m \leq n \leq 3m,\ m, n \geq 0 \}$

11. $\{ a^m b^n \mid m, n \geq 0 \}$

12. $\{ a^m b^n \mid m \neq n,\ m, n \geq 0 \}$

13. $\{ a^m b^n c^p \mid m = n \text{ ou } n = p,\ m, n, p \geq 0 \}$

14. $\{ a^m b^n c^p \mid m \neq n \text{ ou } n \neq p,\ m, n, p \geq 0 \}$

15. $\{ a^m b^n a^n b^m \mid m, n \geq 0 \}$

16. $\{ a^m b^m a^n b^n \mid m, n \geq 0 \}$

17. $\{ a^m b^n c^{m+n} \mid m, n \geq 0 \}$

18. $\{ a^n b^n \mid n \geq 0 \} \cup \{ b^n a^n \mid n \geq 0 \}$

19. $\{ a^m b^n c^p \mid m = n \text{ ou } n \leq p,\ m, n, p \geq 0 \}$

20. $\{ a^m b^n c^p \mid p = |m - n|,\ m, n, p \geq 0 \}$

21. $\{ w \in \{a, b\}^* \mid n_a(w) = n_b(w) \}$

22. ...

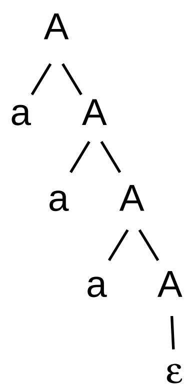
⇨ Algumas Estratégias para a Construção da Lista de Produções de Gramáticas Independentes do Contexto

- ### Identificar Padrões Regulares ($*$ $+$):

$\{ a^n \mid n \geq 0 \}$

Linguagem **Regular**, com Expressão Regular: **a^***

Produções: **$A \rightarrow a\,A \mid \varepsilon$**

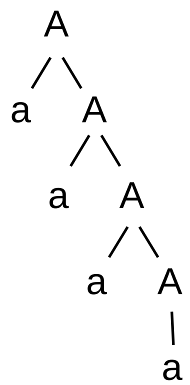


(caso base: $w = \varepsilon$)

$\{ a^n \mid n > 0 \}$

Linguagem Regular, com Expressão Regular: **a^+**

Produções: **$A \rightarrow a\,A \mid a$**



(caso base: $w = $ a)

- ## Identificar Recorrências:

$\{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$ (Linguagem Não Regular)

A Recorrência: a a a a b b b b

Produções: **$S \rightarrow a\,S\,b \mid \varepsilon$**

(caso base: $w = \varepsilon$)

```
      S
     /|\
    a S b
     /|\
    a S b
     /|\
    a S b
      |
      ε
```

$\{ a^m b^n \mid m \leq n,\ m, n \geq 0 \}$

Combinação de $\{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$ com $\{ b^n \mid n \geq 0 \}$

Produções: **$S \rightarrow a\,S\,b \mid S\,b \mid \varepsilon$**

As derivações consistem em:
juntar a (à esquerda) e b (à direita)
ou juntar apenas b (à direita)
por qualquer ordem .

$\{ a^m \, b^n \, a^n \, b^m \mid m, n \geq 0 \}$

Recorrência **Dupla**: $a^m \boxed{b^n \quad a^n} b^m$

Produções:

$$S \rightarrow a\,S\,b \mid T$$
$$T \rightarrow b\,T\,a \mid \varepsilon$$

```
     S
   / | \
  a  S  b
   / | \
  a  S  b
     |
     T
   / | \
  b  T  a
   / | \
  b  T  a
     |
     ε
```

São realizadas em primeiro lugar
as derivações por ($S \rightarrow a\ S\ b$)

e só depois são realizadas
as derivações por ($T \rightarrow b\ T\ a$).

- ## Identificar Concatenações:

$\{ a^m \, b^m \, a^n \, b^n \mid m, n \geq 0 \}$

$$\boxed{a^m \quad b^m} \, \boxed{a^n \quad b^n}$$

É a Linguagem $\mathbf{L^2 = L\ L}$, com $L = \{ a^n \, b^n \mid n \geq 0 \}$

Produções:

$$Z \rightarrow S\ S$$
$$S \rightarrow a\,S\,b \mid \varepsilon$$

- **Identificar Uniões:**

$\{ a^n b^n \mid n \geq 0 \} \cup \{ b^n a^n \mid n \geq 0 \}$

Produções: $S \rightarrow X \mid Y$
$X \rightarrow a X b \mid \varepsilon$
$Y \rightarrow b Y a \mid \varepsilon$

- **Identificar Fechos de Kleene:**

$\{ (a^n b^n)^m \mid m, n \geq 0 \}$

Linguagem **L***, com $L = \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$

Produções: $Z \rightarrow S Z \mid \varepsilon$
$S \rightarrow a S b \mid \varepsilon$

- **Combinar as anteriores,**
- **e tentar simplificar ...**

⇨ Exercícios sobre Gramáticas Independentes do Contexto

- **Considere a Gramática** G = ({S, A, B}, {0, 1}, P, S)

$$S \rightarrow A1B$$
$$A \rightarrow 0A \mid \varepsilon$$
$$B \rightarrow 0B \mid 1B \mid \varepsilon$$

a) Construa derivações à esquerda e à direita para, por exemplo, 00101 e as respectivas árvores de derivação.
b) Será esta Gramática ambígua?
c) Qual é a Linguagem gerada?
d) Mostre que se trata de uma Linguagem Regular.
e) Converta na Forma Normal das Gramáticas Regulares.
f) A partir desta nova Forma, construa o Autómato Finito equivalente.

- **Construa uma Gramática Independente do Contexto para gerar todas as Expressões Regulares sobre o alfabeto {a, b}.**

- **Considere as duas Gramáticas:**

$$G_1 = (\{S, A, B\}, \{0, 1\}, P_1, S)$$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow B1 \mid 1 \\ B &\rightarrow A0 \\ A &\rightarrow B1 \mid 1 \end{aligned}$$

$$G_2 = (\{S, A, B\}, \{0, 1\}, P_2, S)$$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow 1B \mid 1 \\ B &\rightarrow 0A \\ A &\rightarrow 1B \mid 1 \end{aligned}$$

Escreva Expressões Regulares para cada uma e mostre que geram a mesma Linguagem.

- **Considere a Gramática ambígua**

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, \{ S \rightarrow aS \mid aSbS \mid \varepsilon\}, S)$$

Mostre que a palavra aab ,

a) Tem duas árvores de derivação.
b) Tem duas derivações esquerdas.
c) Tem duas derivações direitas.
d) Construa uma Gramática não ambígua equivalente.

- **Considere a seguinte versão simplificada da Gramática ambígua de expressões aritméticas na notação *infix*:**

$G = (\{E\}, \{x, y, z,+,*\}, \{ E \rightarrow E+E \mid E*E \mid x \mid y \mid z\}, E)$

a) Verifique a ambiguidade do cálculo de $x + y * z$.
b) Construa uma Gramática não ambígua equivalente.

c) Construa agora uma gramática onde as mesmas operações são escritas na notação *postfix*.
d) Mostre que esta Gramática não é ambígua.

- **Construa uma Gramática Independente do Contexto para a Linguagem,**

$$L = \{ a^n \, w \, w^R \, b^n \mid w \in \{a, b\}^*, n \geq 1 \}$$

e converta essa Gramática à Forma Normal de Chomsky.

- **Considere a Linguagem,**

$$L = \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$$

a) Mostre que é uma LIC.
b) Mostre que L^2 é uma LIC.
c) Mostre que L^k , para qualquer $k \geq 1$ dado, é uma LIC.
d) Mostre que L^* é uma LIC.
e) Mostre que $L(a^*b^*) \setminus L$ é uma LIC.

- **Considere as três Gramáticas:**

$$G_1 = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P_1, S)$$

$$S \rightarrow bA \mid aB \mid \varepsilon$$
$$A \rightarrow bAA \mid aS$$
$$B \rightarrow aBB \mid bS$$

$$G_2 = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P_2, S)$$

$$S \rightarrow SS \mid aSb \mid bSa \mid \varepsilon$$

$$G_3 = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P_3, S)$$

$$S \rightarrow aSbS \mid bSaS \mid \varepsilon$$

a) Serão equivalentes? E qual será a Linguagem gerada?
b) Mostre que, cada uma delas, gera essa Linguagem.
c) Converta cada uma delas à Forma Normal de Chomsky.

- **Converta à Forma Normal de Chomsky:**

a) $S \rightarrow SS \mid a$

b) $S \rightarrow aXX$
$X \rightarrow aS \mid bS \mid a$

c) $S \rightarrow ABABAB$
$A \rightarrow a \mid \varepsilon$
$B \rightarrow b \mid \varepsilon$

- **Para cada uma das seguintes,**

  a) Mostre que é uma Linguagem Independente do Contexto.
  b) Construa um Autómato de Pilha, se possível Determinista.

1. $\{ 0^n 1^n \mid n \geq 0 \}$

2. $\{ 0^n 1^{2n} \mid n \geq 0 \}$

3. $\{ 0^m 1^n \mid m \geq n \}$

4. $\{ w \in \{ \mathbf{[}\, , \mathbf{]} \}^* \mid$ w é uma sequência de parêntesis rectos correctamente equilibrados $\}$

ex: **[[ ] [[ ]]] [ ]**

5. $\{ w \in \{a, b\}^* \mid n_a(w) = n_b(w) \}$

6. $\{ w \in \{a, b\}^* \mid n_a(w) \neq n_b(w) \}$

7. $\{ a^m b^n c^{m+n} \mid m, n \geq 0 \}$

8. $\{ 1^m 0^n 1^m \mid m, n \geq 1 \}$

9. $\{ 0\, 1^n\, 0\, 1^n\, 0 \mid n \geq 0 \}$

10. $\{ (10)^n (01)^n \mid n \geq 0 \}$

11. $\{ a^n\, w\, w^R\, b^n \mid w \in \{a, b\}^*, n \geq 1 \}$