Autómatos Finitos e Expressões Regulares

- **Considere a Expressão Regular,**

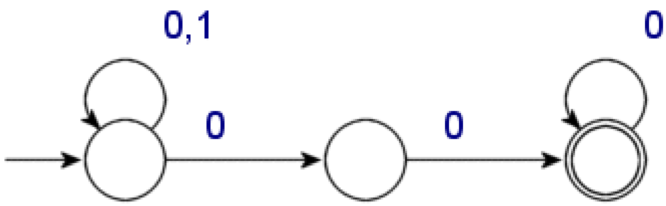
  R = (0 + 1)* 00 (0 + 1)*

- **A Linguagem Regular gerada por R,**

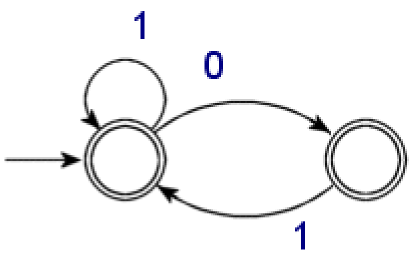
  L(R) = L((0 + 1)* 00 (0 + 1)*)

  é o conjunto das palavras binárias com, pelo menos, um par de 0's consecutivos.

- **O Autómato Finito Não-Determinista N é equivalente a R, isto é, L(N) = L(R):**



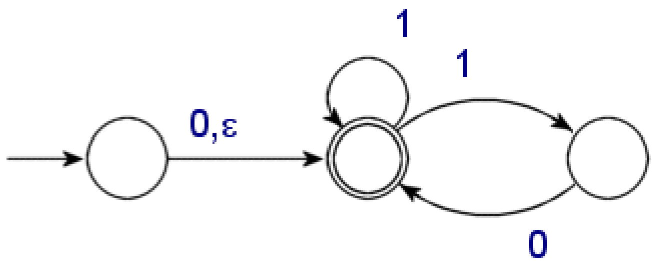
- **A Linguagem Complementar desta é o conjunto das palavras binárias sem 0's consecutivos.**
  Determine um AFD equivalente a N, construa o seu Complementar e tente simplificá-lo de forma a obter o Autómato D:



- **Considere agora a Expressão Regular,**

  S = (0 + ε) (1 + 10)*

  que é equivalente ao seguinte AFND:

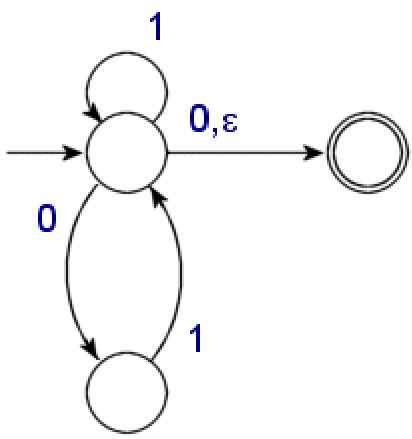


Mostre que L(S) = $\overline{\text{L(R)}}$.

- **Considere ainda a Expressão Regular,**

  T = (1 + 01)* (0 + ε)

  que é equivalente ao seguinte AFND:



Mostre que também L(T) = $\overline{\text{L(R)}}$.

AFD → ER

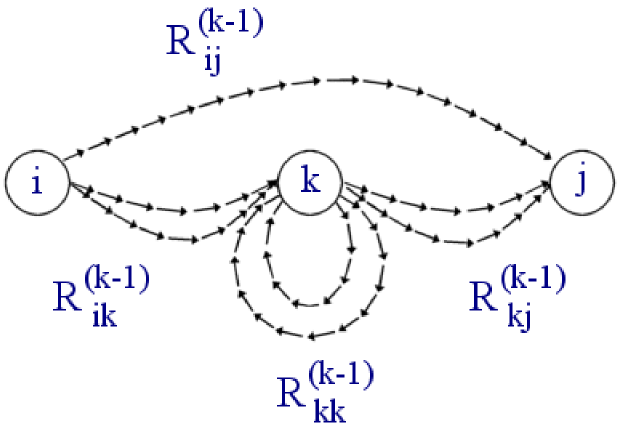
{ também aplicável a AFND's e AFND-ε's }

Dado A = (Q, Σ, δ, q_0, F) onde Q = {1, 2, ..., n}
Construir uma Expressão Regular **R**, tal que L(R) = L(A)

- $\mathbf{R^{(k)}_{ij}}$: <u>caminhos</u> de **i** para **j**, por estados <u>intermédios</u> ≤ **k**.

$$\mathbf{R^{(0)}_{ij}} = \begin{cases} \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\} & i \neq j \\ \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_i\} \cup \{\varepsilon\} & \end{cases}$$

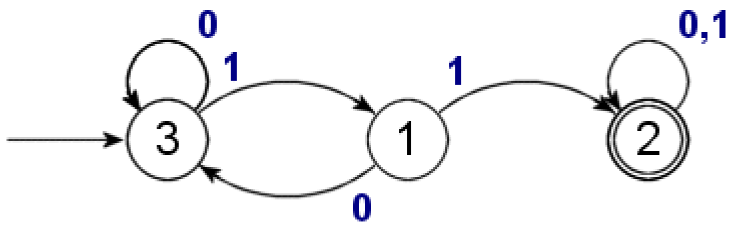
$$\mathbf{R^{(k)}_{ij}} = R^{(k-1)}_{ij} + R^{(k-1)}_{ik} (R^{(k-1)}_{kk})^* R^{(k-1)}_{kj}$$



R é a união (+) de <u>todas</u> as fórmulas $\mathbf{R^{(n)}_{ij}}$
do Estado Inicial para todos os estados Finais de **A**.

- **Por construção dos $R^{(k)}_{ij}$, calcular a ER equivalente ao AF:**

1.



2.

		0	1
→	q_1	q_2	q_1
	q_2	q_3	q_1
*	q_3	q_3	q_2

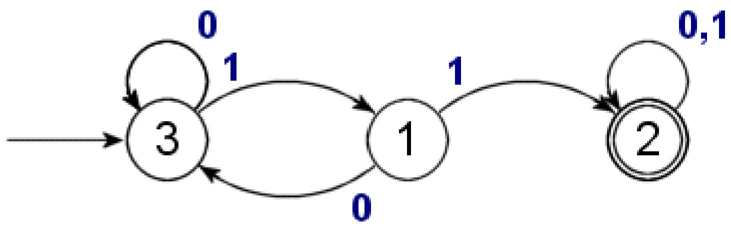
3.

		0	1
→	q_1	q_2	q_3
	q_2	q_1	q_3
*	q_3	q_2	q_1

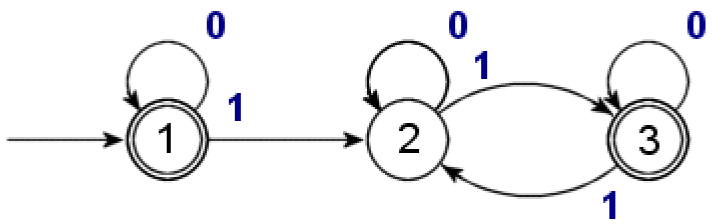
4. …

- **Pelo Método da Eliminação de Estados, calcular as ER's equivalente aos AFD's:**

1.



2.



- **Pelo Método da Eliminação de Estados, calcular a ER equivalente ao AFND-ε:**

	δ	ε	0	1
$\longrightarrow$	q_0	$\{q_1\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_2\}$
	q_1	$\emptyset$	$\{q_5\}$	$\{q_2\}$
	q_2	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
$*$	q_3	$\{q_4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$*$	q_4	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
	q_5	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_4\}$

⇨ Provar Regras Algébricas das Expressões Regulares

{ **R = S** significa que **L(R) = L(S)** }

- Associatividade e Comutatividade

  $(R\ (S\ T)) = ((R\ S)\ T) = R\ S\ T$

  $(R + (S + T)) = ((R + S) + T) = R + S + T$

  $R + S = S + R$

- Distributividade

  $R\ (S + T) = R\ S + R\ T$

  $(R + S)\ T = R\ T + S\ T$

- Elementos Neutro e Absorvente

  $\varepsilon\ R = R\ \varepsilon = R$

  $\emptyset + R = R + \emptyset = R$

  $\emptyset R = R \emptyset = \emptyset$

- Idempotência

  $R + R = R$

- Leis do Fecho

  $(R^*)^* = R^*$

  $\varepsilon^* = \varepsilon$

  $(\emptyset)^* = \varepsilon$

  $R^+ = R\ R^* = R^*\ R$

  $R^* = R^+ + \varepsilon$

⇨ Provar ainda que:

- $(R + S)^* = (R^* S^*)^*$
- $R^* = R^* R^*$
- $(\varepsilon + R)^+ = R^*$
- $(\varepsilon + R)^* = R^*$
- $R + S S^* R = S^* R$
- $R^* (\varepsilon + R) = (\varepsilon + R) R^* = R^*$
- $R^* S + S = R^* S$
- $R (S R)^* = (RS)^* R$
- $(R + S)^* = (R^* S)^* R^* = (S^* R)^* S^*$
- …

⇨ Para provar <u>propriedades</u> de Expressões Regulares podemos utilizar:

- ☑ **a definição;**
- ☑ **propriedades já demonstradas;**
- ☑ **o Teorema da Substituição;**
- ☑ **Autómatos Finitos;**
- ☑ **...**
- ☑ **imaginação, rigor e senso comum q.b.**

⇨ O Lema da Bombagem para Linguagens Regulares

$\exists\, n \in \mathbb{N} \;:\; \forall\, w \in L,\ |w| \geq n$
$\exists\ x, y, z \in \Sigma^* \;:$

- $w = xyz$
- $y \neq \varepsilon$
- $|xy| \leq n$
- $\forall\, k \geq 0,\ xy^k z \in L$

L é Regular $\Longrightarrow$ L satisfaz o Lema da Bombagem

L **não** satisfaz o Lema da Bombagem $\Longrightarrow$ L **não** é Regular

Decisões vitais para a utilização do Lema da Bombagem:

$\exists\, \mathbf{n} \in \mathbb{N}\ \ldots$	**Qual o <u>n</u> ?**	$\Longleftarrow$
$\exists\, \boldsymbol{x, y, z} \in \Sigma^*\ \ldots$	**Como partir ?**	$\Longleftarrow$
$\exists\, \mathbf{k} \geq 0 \ldots\ \ldots \ldots\ \boldsymbol{xy^k z} \notin \mathbf{L}$	**Qual o <u>k</u> ?**	$\Longleftarrow$

- **Mostrar que <u>não</u> são Linguagens Regulares:**

1. $L = \{\ 0^n\ 1\ 0^n \mid n \geq 1\}$
2. $L = \{\ 0^i \mid \underline{i}$ é um Número Primo$\}$
3. $L = \{\ 0^i \mid \underline{i}$ é um Quadrado Perfeito$\}$
4. $L = \{\ 0^{n!} \mid n \geq 0\}$
5. $L = \{\ a^m\, b^n\, c^{m+n} \mid m, n \geq 0\}$
6. $L = \{\ w \in \{a, b\}^* \mid\ w = w^R\}$
7. $L = \{\ w \in \{a, b\}^* \mid\ w \neq w^R\}$
8. $L = \{\ ww \mid w \in \{a, b\}^*\ \}$
9. $L = \{\ ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\ \}$
10. $L = \{\ (10)^n\ (01)^n \mid n \geq 0\}$
11. $L = \{\ 0\ 1^n\ 0\ 1^n\ 0 \mid n \geq 0\}$
12. $L = \{\ (00)^n\ 1^n \mid n \geq 0\}$
13. $L = \{\ a^n\ b\ a^n \mid n \geq 0\}$
14. $L = \{\ x^{2n}\, y^{2n} \mid x, y \in \{a, b\}^*\ ,\ n \geq 0\ \}$
15. $L = \{\ 0^n\ 1^m \mid 0 \leq n < m\ \}$
16. $L = \{\ w \in \{a, b\}^* \mid\ n_a(w) = n_b(w)\ \}$
17. …

⇨ A classe das Linguagens Regulares é <u>fechada</u> para uma grande variedade de Operações ...

- **Mostrar que, se L for uma Linguagem Regular sobre um alfabeto Σ, são ainda Linguagens Regulares:**

1. A "meia Linguagem" de **L**,

$$\tfrac{1}{2}\,\mathbf{L} = \{x \in \Sigma^* \mid \exists\, y \in \Sigma^* \;:\; |x| = |y| \text{ e } xy \in \mathrm{L}\}$$

2. O "quociente" de **L** por **a** $\in \Sigma$,

$$\mathbf{L/a} = \{w \in \Sigma^* \mid w\mathrm{a} \in \mathrm{L}\}$$

3. Ou ainda,

$$\mathbf{a\backslash L} = \{w \in \Sigma^* \mid \mathrm{a}w \in \mathrm{L}\}$$

também chamada a "derivada" de **L** em ordem a **a**, ou $\frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{da}}$.

4. O "quociente" de duas Linguagens Regulares $\mathbf{L_1}$ e $\mathbf{L_2}$,

$$\mathbf{L_1/L_2} = \{x \in \Sigma^* \mid \exists\, y \in \mathrm{L}_2 \;:\; xy \in \mathrm{L}_1\}$$

5. e muitas mais ...

⇨ Utilização das Propriedades do Fecho das Linguagens Regulares, para verificar se uma dada Linguagem é, ou não, Regular:

Consideremos, por exemplo:

$L_1 = \{ a^m b^n \mid \forall\, m, n \geq 0 \}$

$L_2 = \{ a^n b^n \mid \forall\, n \geq 0 \}$

$L_3 = \{ a^m b^n \mid \forall\, m, n \geq 0 \text{ com } m \neq n \}$

Sabemos que:

- $\mathbf{L_1}$ é Regular, pois é gerada pela Expressão Regular **a*b*** ;
- $\mathbf{L_2}$ não é Regular, como provámos pelo Lema da Bombagem ;
- vemos que $\mathbf{L_1 = L_2 \cup L_3}$;

Que podemos concluir sobre $\mathbf{L_3}$?

Como $\mathbf{L_2 = L_1 \setminus L_3}$,

e porque a Classe da Linguagens Regulares é **fechada** para a operação **Diferença** de Linguagens,

se $\mathbf{L_3}$ fosse Regular (e como $\mathbf{L_1}$ é Regular)

então $\mathbf{L_2}$ teria de ser Regular (mas não é).

Assim, $\mathbf{L_3}$ **não é uma Linguagem Regular.**

{... tente também provar que $\mathbf{L_3}$ não é Regular, pelo Lema da Bombagem}

⇨ Utilização das Propriedades do Fecho das Linguagens Regulares na construção de Autómatos Finitos:

{ A Classe das Expressões Regulares é fechada para a operação Inversão (no sentido de Reversão) }

- **Palavra Inversa**:

$$w^R = \begin{cases} w & \text{se } |w| = 0 \\ a(v^R) & \text{se } w = va, \text{ com } a \in \Sigma, v \in \Sigma^* \end{cases}$$

- **Linguagem Inversa $\mathbf{L^R}$** é o conjunto das Inversas das palavras de **L**.

- Estabelecer uma definição para $\mathbf{E^R}$, a Expressão **Inversa** de uma Expressão Regular **R**. Provar que $\mathbf{E^R}$ é ainda uma Expressão Regular.

- Provar que $\mathbf{L(E^R) = (L(E))^R = L^R}$.

- Seja $\mathbf{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tal que $\mathbf{L} = \mathbf{L(A)}$.

  Construímos $\mathbf{A^R} = (Q \cup \{q_0^R\}, \Sigma, \delta^R, q_0^R, F^R)$ de modo que:

  1. δ^R consiste nas Inversas das Transições de δ;
  2. $F^R = \{q_0\}$;
  3. Se necessário, criamos q_0^R um novo Estado com Transições-ε para todos os Estados em F.

  Provar que $\mathbf{L(A^R) = L^R}$.

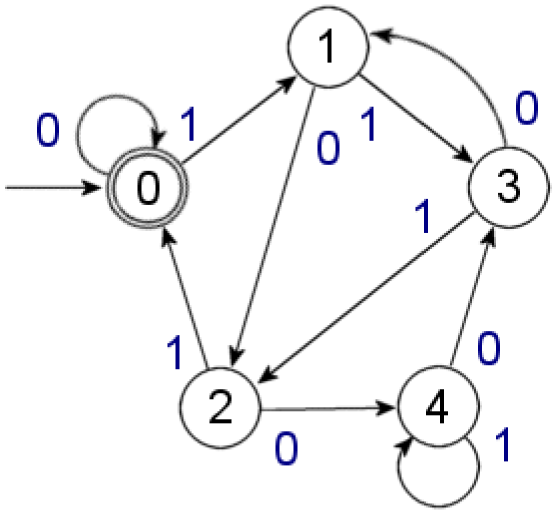
Por exemplo:

$\mathbf{L} = \{ w \in \{0, 1\}^* \mid \boldsymbol{w}$ representa um múltiplo de 5$\}$

$\mathbf{L}^{\mathbf{R}} = \{ w \in \{0, 1\}^* \mid \boldsymbol{w}^{\mathbf{R}}$ representa um múltiplo de 5$\}$

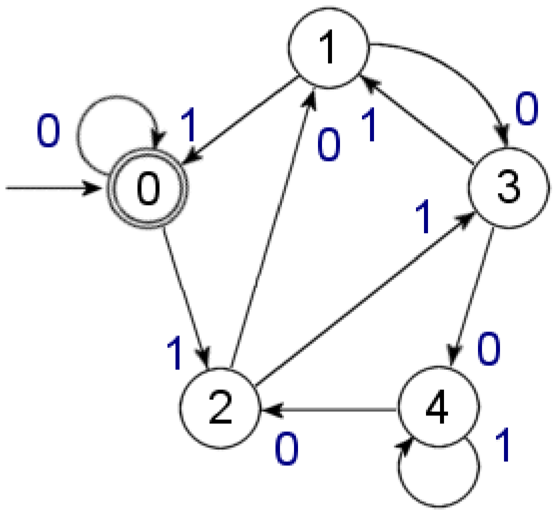
Conhecemos o AFD reconhecedor de L:

$\mathbf{A} = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0, 1\}, \boldsymbol{\delta}, q_0, \{q_0\})$



O AFD reconhecedor de L$^{\mathbf{R}}$ será então:

$\mathbf{A}^{\mathbf{R}} = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0, 1\}, \boldsymbol{\delta}^{\mathbf{R}}, q_0, \{q_0\})$



⇨ Minimização de Autómatos Finitos Deterministas e Equivalência de Expressões Regulares:

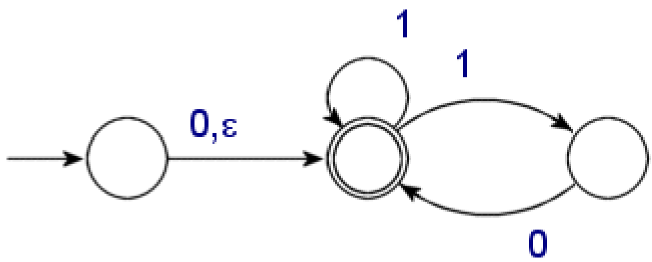
- **Retomemos as Expressões Regulares,** $S = (0 + \varepsilon)\,(1 + 10)^*$

  $T = (1 + 01)^*\,(0 + \varepsilon)$

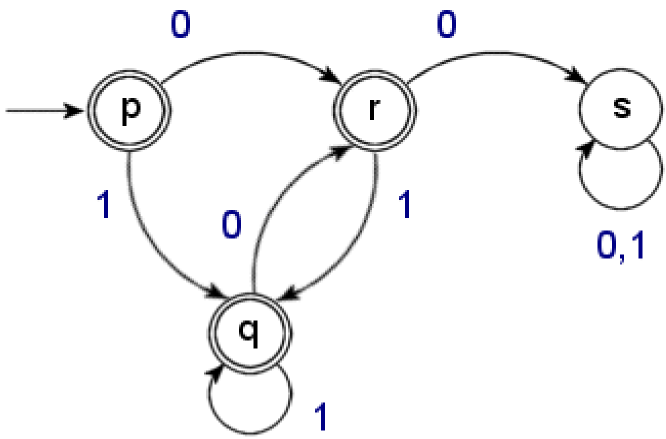
  Serão Expressões Equivalentes?

- **Analisemos** $S = (0 + \varepsilon)\,(1 + 10)^*$

  Começamos por construir um AFND-ε equivalente,



a partir do qual construímos o AFD <u>completo</u>,

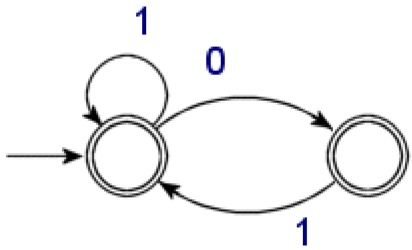


Aplicando o Algoritmo de Identificação de Estados Equivalentes,

	p	q	r
q			
r	×	×	
s	×	×	×

verificamos que p ≡ q.

Os Estados do Autómato Mínimo são portanto as Classes de Equivalência {p, q} {r} e {s}.
Ignorando o Estado Ratoeira {s}, obtemos:



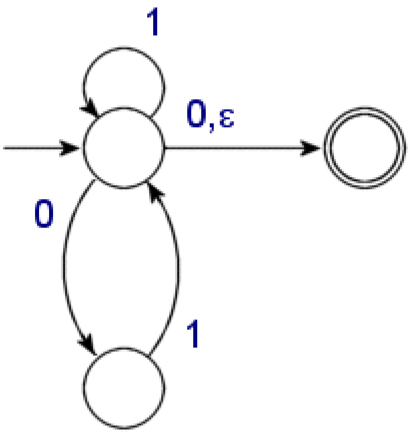
Note que, neste caso, a simples análise da Tabela de Transições:

	δ	0	1
$\longrightarrow *$	p	r	q
$*$	q	r	q
$*$	r	–	q

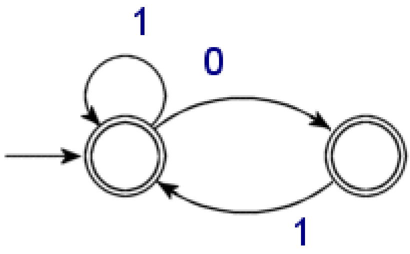
mostra a Equivalência dos Estados p e q.

- **Para a Expressão Regular** $\quad\quad$ **T = (1 + 01)* (0 + ε)**

construímos o AFND-ε equivalente,



De modo análogo, mostre que o Autómato Finito Determinista Mínimo equivalente é o mesmo:



Fica assim demonstrada a Equivalência das Expressões Regulares S e T:

$$(0 + \varepsilon)\,(1 + 10)^* \;=\; (1 + 01)^*\,(0 + \varepsilon)$$

- **Determine Autómato Mínimo equivalente a cada um dos AFD’s:**

1.

		0	1
⟶	p	q	r
*	q	p	r
*	r	p	q

2.

		0	1
⟶ *	p	p	q
	q	q	r
*	r	r	q

3.

		a	b
⟶ *	p	q	p
	q	t	r
	r	u	r
	s	p	s
	t	q	s
*	u	t	u

4.

		0	1
$\longrightarrow *$	p	s	q
	q	t	r
$*$	r	u	p
$*$	s	p	t
	t	q	u
$*$	u	r	s

5.

		a	b
$\longrightarrow *$	p	q	s
	q	t	r
$*$	r	q	u
	s	p	t
	t	t	t
	u	r	t

- **A partir do seguinte AFND-ε, construa um AFD completo e verifique se obteve o Autómato Finito Mínimo equivalente à Expressão Regular** (0+1)* (01+10) 0*.

	δ	ε	0	1
$\longrightarrow$	q_0	$\{q_1\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_2\}$
	q_1	$\emptyset$	$\{q_5\}$	$\{q_2\}$
	q_2	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
$*$	q_3	$\{q_4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$*$	q_4	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
	q_5	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_4\}$