⁕ Série de Taylor e Série de Mac-Laurin

- Recordemos o **Teorema de Taylor**,

- *Seja* $I \subset \mathbb{R}$ *um* ***intervalo aberto****, onde está definida uma* ***função real*** $f(x)$ $n+1$ *vezes* ***diferenciável*** *em* I *e tomemos um* ***ponto*** $a \in I$ *.*

  Para todo o $x \in I$*, com* $x \neq a$*,* ***existe um ponto*** $\xi \in inter(a, x)$ *onde,*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$R_n(x)$

polinómio de Taylor de ordem n ***resto de Lagrange de ordem n***

- Mas se as **derivadas** $f^{(k)}(x)$ de **todas as ordens** $k \in \mathbb{N}$ **existirem** e forem **finitas em** a, temos uma série de potências centrada em a,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

chamada **série de Taylor** de $f(x)$ em torno do ponto a.

- Quando $a = 0$ a série de potências é centrada na origem e chama-se **série de Mac-Laurin** de $f(x)$.

- Por exemplo a **função exponencial** $f(x) = e^x$ definida em $\mathbb{R}$.
  - tem derivadas de todas as ordens, $f^{(n)}(x) = e^x$

    que são todas finitas em $x = 0$ pois, $f^{(n)}(0) = 1$.

  - Portanto a **série de Mac-Laurin da função exponencial** é,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

- Por exemplo a **função seno** $f(x) = sen\ x$ definida em $\mathbb{R}$.
  - tem derivadas de todas as ordens e são todas finitas.

  - para $\begin{cases} n = 0 & f^{(0)}(x) = sen\ x & f^{(0)}(0) = sen\ 0 = 0 \\ n = 1 & f^{(1)}(x) = cos\ x & f^{(1)}(0) = cos\ 0 = 1 \\ n = 2 & f^{(2)}(x) = -sen\ x & f^{(2)}(0) = -sen\ 0 = 0 \\ n = 3 & f^{(3)}(x) = -cos\ x & f^{(3)}(0) = -cos\ 0 = -1 \end{cases}$

    $n = 4 \quad f^{(4)}(x) = sen\ x \quad f^{(4)}(0) = sen\ 0 = 0$

    ...

  - Portanto a **série de Mac-Laurin da função seno** é,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

- Verifique que a **série de Mac-Laurin da função coseno** é,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

- Resta agora saber se a **soma da série** é **igual** à própria **função**. Ora isso nem sempre acontece e a proposição seguinte estabelece uma **condição necessária e suficiente** para o efeito.

- *Seja* $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo aberto, onde está definida uma função real* $f(x)$ *com derivadas finitas de todas as ordens e um ponto* $a \in I$,

  e seja,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

  a ***série de Taylor*** *de* $f(x)$ *em torno do ponto* a.

  A ***soma da série coincide com*** $f(x)$ ***se e só se****, para todo o* $x \in I$,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0}$$

  onde $R_n(x)$ *é o* ***resto de ordem*** n *de* $f(x)$ *no ponto* a.

- Vejamos para o caso da **função exponencial** $f(x) = e^x$ definida em $\mathbb{R}$.

  - Para todo o $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, existe um ponto $\xi \in inter(0, x)$ onde,

$$R_n(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

  - Basta então provar que a **sucessão** $(R_n(x))$ **tende para zero**.

- Analisemos a sucessão dos módulos,

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \le \frac{e^{\xi} |x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

- Ora já conhecemos a sucessão,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

- e multiplicando pela constante e^{ξ},

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{\xi} |x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

- então, pela desigualdade anterior,

$$\lim_{n \to +\infty} |R_n(x)| = 0$$

- e também,

$$\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$$

- Provámos este resultado para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x \neq 0}$,

  mas como $R_n(0) = 0$ então fica provado para todo o $x \in \mathbb{R}$.

- Portanto, pela **condição necessária e suficiente** anterior,

  fica finalmente provado que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots}$$

- Para provar que a **soma da série de Taylor** é **igual** à própria **função**, torna-se por vezes mais simples utilizar a **condição suficiente** seguinte.

- *Sejam* $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo aberto,* $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função que admite derivadas finitas de qualquer ordem em todo o ponto de* I *e* $a \in I$.

  Suponhamos que existem $r > 0$ *e* $M > 0$ *tais que,*

  para todo o $x \in]a-r, a+r[\subset I$ *e, para todo o* $n \in \mathbb{N}$,

  $$\boxed{|f^{(n)}(x)| \leq M.}$$

  Então, para todo o $x \in]a-r, a+r[\subset I$*, temos*

  $$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.}$$

- Por exemplo, no caso da **função seno** *f(x) = sen x*.

  - Como as sucessivas derivada são (+/-) senos e cosenos,

    é obvio que são todas **majoradas**,

    $$|f^n(x)| \leq 1$$

    para todo o $x \in \mathbb{R}$ e para todo o $n \in \mathbb{N}$.

  - Portanto, pela **condição suficiente** anterior, fica imediatamente provado que,

- para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \end{aligned}$$

- As **representações em série de Mac-Laurin** são de enorme utilidade prática.

  - Na maioria dos computadores e máquinas de calcular, o cálculo das funções matemáticas elementares é feito através do cálculo dos valores de sucessivas **somas parciais da série**, ou seja, de **polinómios de Mac-Laurin**.

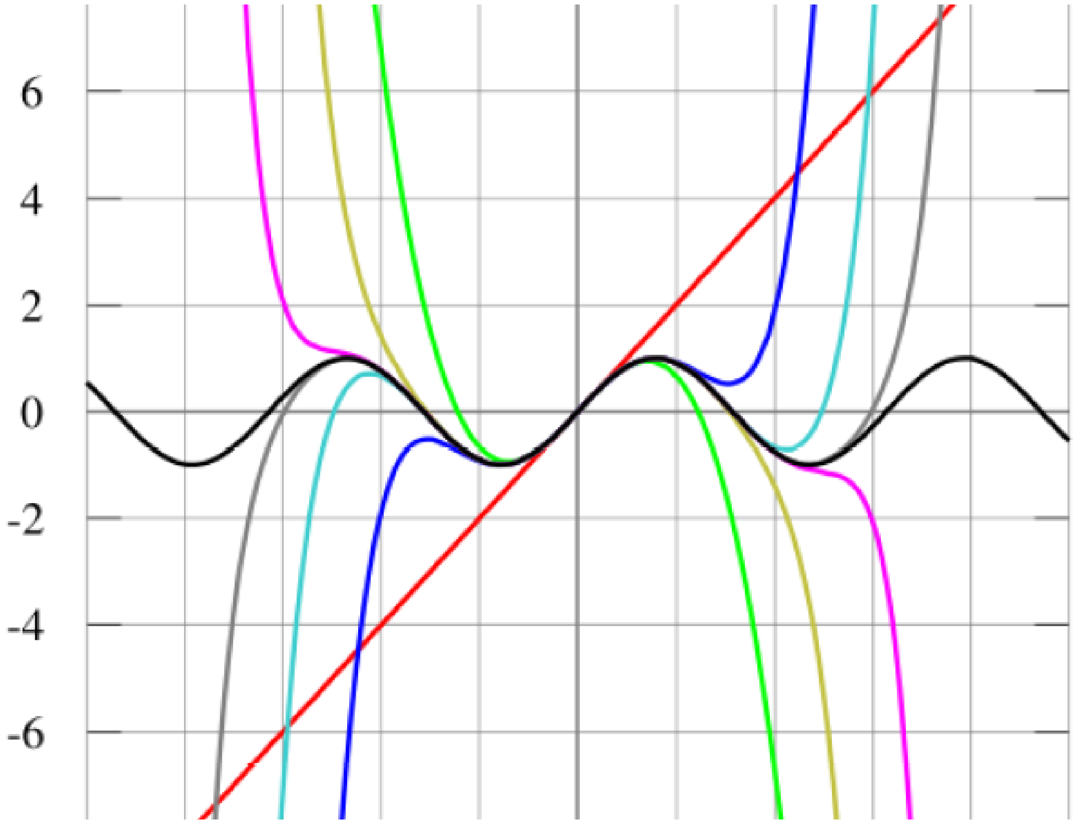
  - É simples **simular** esse processo, por exemplo para obter *sen π/2 = 1*

    através do cálculo de **polinómios de Mac-Laurin**,

n	$2n+1$	$p_{2n+1}(\pi/2)$
0	1	1.57079632679489662
1	3	0.92483222928865036 6
2	5	1.00452485553481741
3	7	0.99984310139949872 3
4	9	1.00000354258428608
5	11	0.99999994374105087 0
6	13	1.00000000066278009
7	15	0.99999999999397657 9
8	17	1.00000000000004351
9	19	0.99999999999999974
10	21	1.00000000000000000

e verificamos que a **sucessão de polinómios** converge (bastante rapidamente) para o valor exacto.

- Podemos observar como os **polinómios de Mac-Laurin**, são sucessivas aproximações da curva da função ***sen x***, **em torno da origem**.



$p_1(x) = x$

$p_3(x) = x - x^3 / 3!$

$p_5(x) = x - x^3 / 3! + x^5 / 5!$

$p_7(x) = x - x^3 / 3! + x^5 / 5! - x^7 / 7!$

$p_9(x) = x - x^3 / 3! + x^5 / 5! - x^7 / 7! + x^9 / 9!$

…

$f(x) = sen\ x$

- As **representações em série de Mac-Laurin** que temos vindo a obter são obviamente iguais às **representações em série de potências** que obtivemos na secção anterior.

  A proposição seguinte garante-nos que são efectivamente as mesmas.

- *Sejam* $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo aberto,* $f: \ I \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função*

  que admite derivadas finitas de qualquer ordem em I *e* a *um ponto de* I.

  Suponhamos que existe uma série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$

  com raio de convergência não nulo R

  e um número positivo r *tais que* $]a-r, a+r[\subset I$ *e*

  $$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n ,$$

  para todo o $x \in]a-r, a+r[$.

  Então a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$ *é a série de Taylor de* f *em* a.

- Então, por exemplo,

  - A **série de potências** $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

    é também a **série de Mac-Laurin** da função $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

    que é válida para todo o $x \in \,]-1, 1[$.

- As funções que, num dado intervalo, são iguais à soma da sua série de Taylor chamam-se **funções analíticas**.

- *Sejam I um intervalo aberto, $a \in I$ e f uma função definida em I que admite derivadas finitas de todas as ordens em a.*

  *Dizemos que a função f é **analítica no ponto** a se existir $r > 0$ tal que, para todo o $x \in \,]a-r, a+r[\, \subset I$, a série de Taylor de f em a converge para $f(x)$.*

  *Dizemos que f é **analítica em I** se, para todo o $a \in I$, f é analítica em a.*

- Por exemplo, consideremos a **função coseno** $f(x) = \cos x$.

  - Para $x = 0$, já vimos que a série de Mac-Laurin é,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}.\end{aligned}$$

  - Por outro lado, como para todo o $x \in \mathbb{R}$ e para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$|f^n(x)| \leq 1$$

  - a **condição suficiente** garante-nos a igualdade da soma da série à própria função,

$$\boxed{\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}}$$

  - Portanto a **função coseno** é **analítica** em $x = 0$.

- Vejamos agora o que acontece noutro ponto, por exemplo,

- Para $x = \pi$, calculemos a **série de Taylor**,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(\pi)}{n!}(x-\pi)^n$$

- para
$$\begin{cases} n = 0 & f^{(0)}(x) = \cos x & f^{(0)}(\pi) = \cos \pi = -1 \\ n = 1 & f^{(1)}(x) = -\operatorname{sen} x & f^{(1)}(\pi) = -\operatorname{sen} \pi = 0 \\ n = 2 & f^{(2)}(x) = -\cos x & f^{(2)}(\pi) = -\cos \pi = 1 \\ n = 3 & f^{(3)}(x) = \operatorname{sen} x & f^{(3)}(\pi) = \operatorname{sen} \pi = 0 \end{cases}$$

$$n = 4 \qquad f^{(4)}(x) = \cos x \qquad f^{(4)}(\pi) = \cos \pi = -1$$

...

- Portanto a **série de Taylor da função coseno** em $x = \pi$ é,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(\pi)}{n!}(x-\pi)^n &= -1 + \frac{1}{2!}(x-\pi)^2 - \frac{1}{4!}(x-\pi)^4 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}(x-\pi)^{2n}. \end{aligned}$$

- E do mesmo modo, como para todo o $x \in \mathbb{R}$ e para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$|f^n(x)| \leq 1$$

- a **condição suficiente** garante-nos a igualdade da soma da série à própria função,

$$\boxed{\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}(x-\pi)^{2n}}$$

- Portanto a **função coseno** é também **analítica** em $x = \pi$.
- Note que as séries obtidas para $x = 0$ e $x = \pi$ são forçosamente diferentes.

- O facto de (para uma função analítica) a série de Taylor ser a mesma que a série de potências, permite-nos tirar partido de todas as **propriedades** que são características **das séries de potências**.

- Por exemplo, podemos **derivar e integrar** séries de Taylor termo a termo.

  - Consideremos a **série de Mac-Laurin** da **função seno**,

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)\,!} x^{2n+1}$$

  - Derivando termo a termo, obviamente obtemos a **série de Mac-Laurin** da **função coseno**,

$$\begin{aligned} \cos x &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \right)' \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n}, \end{aligned}$$

o que é válido para todo o $x \in \mathbb{R}$,

- Naturalmente, são também aplicáveis **todas as propriedades** que estudámos para **séries** em geral.

- Por exemplo, podemos utilizar a propriedade da **combinação linear de séries**.

  - Consideremos a função $f(x) = x \cos x$.
  - Sabemos que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

  - Então, o **produto** desta série por x é também **convergente**

    e deste modo obtemos a **série de Mac-Laurin**,

$$x \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} x(-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n+1}$$

    para todo o $x \in \mathbb{R}$.

- Por exemplo, consideremos a função $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

  - Como auxiliar, retomemos a **série** $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

    que é válida para todo o $x \in \left]-1, 1\right[$,

    e onde vamos substituir x por $-x^2$.

- e assim obtemos,

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$$

- e esta igualdade é válida para $|-x^2| < 1$, ou seja, para $x \in \,]-1,\ 1[$.

- Por outro lado, $F(x) = arctg\ x$ é a **primitiva** de $f(x)$ que se anula na origem.

- Então, podemos concluir que a **série de Mac-Laurin** de *arctg* é dada por,

$$\boxed{\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}}$$

o que é válido para todo o $x \in \,]-1,\ 1[$.

- Sabendo que, para todo o $x \in \,]-1,\ 1[$,

$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$

calcule a série de Mac-Laurin de $f(x) = \ln\dfrac{1}{1-x}$

⁕ Funções periódicas

- Em muitas aplicações práticas, as funções que se pretende **representar por uma série** são **funções periódicas**.

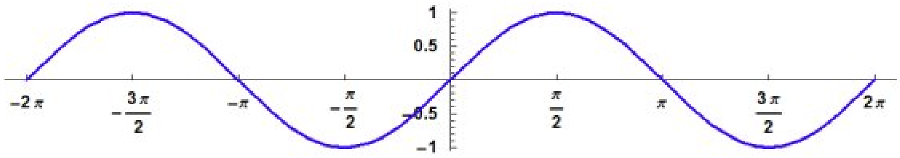
  Recordemos que,

- *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se* ***periódica*** *de* ***período*** $P > 0$

  quando, para todo o $x \in \mathbb{R}$, se tem $\boldsymbol{f(x+P) = f(x)}$.

  Ao menor dos períodos chama-se ***período fundamental***.

- Por exemplo a **função seno**,



  tem **período fundamental** 2π , mas outros períodos são também, 4π , 6π , ...

- Toda a função definida num intervalo $[a, b[$ pode ser **estendida de modo único** a todo o $\mathbb{R}$, por forma a obter uma **função periódica**, de período $b - a$.

  Diz-se então que foi efectuada a **extensão periódica** de **período** $b - a$ **da função** e, nesse caso,

  para todo o $x \in [\, a + n\,(b - a\,)\,,\, b + n\,(b - a)\,[\quad , \quad n \in \mathbb{N}$

  tem-se $\quad f(x) = f\,(\,x - n\,(b - a\,)\,)$

- Ou seja, o intervalo $[a, b[$ inicial foi *"repetido"* ao longo de todo o $\mathbb{R}$ em intervalos da forma $[\, a + n\,(b - a\,)\,,\, b + n\,(b - a)\,[$.

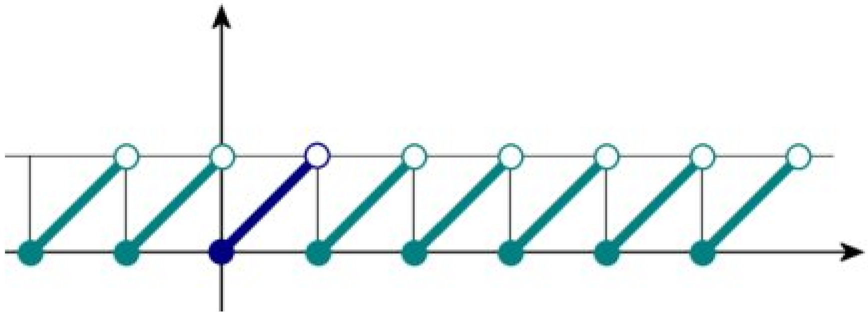
- Por exemplo, consideremos a função,

$$\boxed{\begin{aligned} f : [0,\ 1[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}}$$

  - Podemos considerar a **extensão periódica**, de **período** 1,

    para **todo** o $x \in \mathbb{R}$ e **todo** o $n \in \mathbb{N}$,

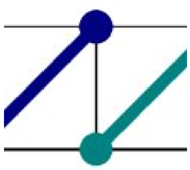
$$\boxed{f(x) = f(x - n) = x - n}$$



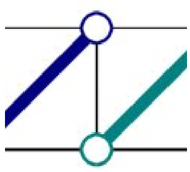
  - assim, todo a recta real for *"preenchida"* com intervalos da forma $[n,\ n+1[$, onde, $f(x) = x - n$.

- De modo análogo, podem ser efectuadas **extensões periódicas** de **período** $b - a$, para funções inicialmente definidas em **intervalos da forma** $]a,\ b]$.

- Contudo, **não é possível** uma extensão periódica de período $b - a$, para **intervalos da forma** $[a,\ b]$.



- Para **intervalos da forma** $]a,\ b[$, uma extensão periódica de período $b - a$ é possível, mas **não é única**.



⁕ Polinómios trigonométricos

- Comecemos por recordar que:
  - Se *f(x)* for uma **função polinomial**, de forma geral,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n\,(x-c)^n$$

  - então os **coeficientes** a_n podem ser completamente determinados, a partir das derivadas de *f(x)*,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

  - de modo que,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}\,(x-c)^n$$

  - Para uma função qualquer *f(x)*, vimos que se pode construir a **série associada** à função ,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}\,(x-c)^n$$

- No caso da função que pretendemos representar ser uma **função periódica**, são utilizados **polinómios trigonométricos**,

- *Chamamos **polinómios trigonométricos** a expressões da forma,*

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left[a_n\ \cos(nx) + b_n\ \mathrm{sen}(nx)\right]}$$

onde a_n *,* $b_n \in \mathbb{R}$ *com* $n \in \mathbb{N}$.

- Também neste caso, os **coeficientes** a_n , b_n podem ser completamente determinados a partir de $f(x)$.

- A demonstração da proposição que permite o cálculo dos coeficientes a_n , b_n tem como base as seguintes,

  - **Relações de ortogonalidade**,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\cos(mx)\,dx = 0 \qquad , \forall\, m,n \in \mathbb{N}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(mx)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \end{cases}$$

  - Prove estas relações, tendo em conta que,

$$\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$$

$$\operatorname{sen}(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(a-b) + \operatorname{sen}(a+b)\right]$$

- **Proposição:**

- *Se* $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right]$$

  então,

  $$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \quad , \quad n = 0, 1, ..., N$$

  $$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx \quad , \quad n = 1, 2, ..., N$$

- Chamam-se **coeficientes de Fourier** da função $f(x)$ aos valores,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \quad , \quad n = 0, 1, ..., N$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx \quad , \quad n = 1, 2, ..., N$$

- Para uma função $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **periódica** de **período** 2π e **integrável**, chama-se **série de Fourier associada à função** à série de funções,

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right]}$$

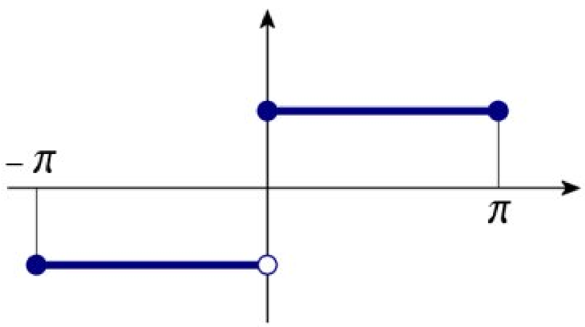
onde a_n , b_n são os **coeficientes de Fourier** de $f(x)$.

- Para exprimir que a **série de Fourier** está **associada à função**, escrevemos,

$$\boxed{f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right]}$$

- Comecemos por considerar a função *f(x)* definida em $[-\pi\ ,\ \pi]$ por,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in [0, \pi] \\ -1 & \text{se} \quad x \in [-\pi, 0[\end{cases}$$



- Como *f(x)* é **integrável** em $[-\pi\ ,\ \pi]$, podemos calcular os **coeficientes de Fourier**.

- $$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx)\, dx$$

Neste, como em muitos casos, verificamos que *f(x).cos(mx)* é uma **função ímpar**, definida num **intervalo simétrico** em relação à origem.

Portanto,

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx)\, dx = 0$$

para todo o $m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

- $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underline{\underline{f(x)\,\mathrm{sen}\,(nx)}}\,dx$$

Neste caso, *f(x).sen(nx)* é uma **função par**,

definida num **intervalo simétrico** em relação à origem e portanto,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,(nx)\,dx$$

para todo o *m = 1, 2, 3, ...*

- e calculando, $$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,(nx)\,dx &= \int_0^{\pi} \mathrm{sen}\,(nx)\,dx \\ &= -\frac{1}{n}\cos(nx)\Big]_0^{\pi} \\ &= -\frac{1}{n}\cos(n\pi) + \frac{1}{n} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ \dfrac{2}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \end{aligned}$$

- assim, os termos de ordem par anulam-se,

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ \dfrac{4}{n\pi} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

- e a **série de Fourier** tem a forma,

$$\frac{4}{\pi}\mathrm{sen}\,x + \frac{4}{\pi}\frac{\mathrm{sen}\,(3x)}{3} + \frac{4}{\pi}\frac{\mathrm{sen}\,(5x)}{5} + \cdots$$

- Podemos então escrever a **série de Fourier associada** à função dada, para todo o $x \in [-\pi, \pi]$,

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\operatorname{sen} x + \frac{4}{\pi}\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3} + \frac{4}{\pi}\frac{\operatorname{sen}(5x)}{5} + \cdots$$

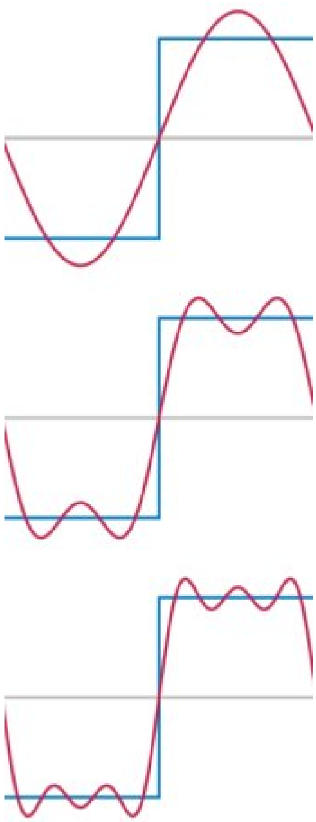
- ou,

$$\boxed{f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi}\frac{\operatorname{sen}((2n-1)x)}{2n-1}}$$

- Note que **função dada** era definida apenas no intervalo $[-\pi, \pi]$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in [0, \pi] \\ -1 & \text{se} \quad x \in [-\pi, 0[\end{cases}$$

- Podemos observar o comportamento das **três primeiras somas parciais** da série de Fourier e o modo como se aproximam da **função**.



- Tal como no exemplo anterior, quando a função *f(x)* dada é uma **função ímpar**, tem-se sempre,

  - $a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx = 0$

  - $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,(nx)\,dx$

  - pelo que a **série de Fourier** obtida é uma série **só de senos**,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\,\text{sen}\,(nx)$$

- De modo análogo, quando a função *f(x)* dada é uma **função par**, tem-se sempre,

  - $a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx$

  - $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,(nx)\,dx = 0$

  - pelo que a **série de Fourier** obtida é uma série **só de cosenos**,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nx)$$

- Por exemplo, a função $f(x) = |x|$ definida em $[-\pi, \pi]$.

- Sendo $f(x)sen(nx)$ é uma **função ímpar**, temos então que num intervalo de integração **simétrico**,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,(nx)\,dx = 0$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

- Por outro lado, como $f(x)cos(mx)$ é uma **função par** num intervalo de integração **simétrico**, temos,

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx$$

para todo o $n \in \mathbb{N}_0$.

- Para $n = 0$, $\quad a_0 = \left.\frac{x^2}{\pi}\right]_0^{\pi} = \pi$
- e para $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx &= \int_0^{\pi} x\cos(mx)\,dx \\
&= \left.\frac{1}{m}x\,\mathrm{sen}\,(mx)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{m}\int_0^{\pi}\mathrm{sen}\,(mx)\,dx \\
&= \frac{\pi}{m}\mathrm{sen}\,(m\pi) + \left[\frac{1}{m^2}\cos(mx)\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{m^2}\cos(m\pi) - \frac{1}{m^2} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{se } m \text{ é par} \\ -\dfrac{2}{m^2} & \text{se } m \text{ é ímpar} \end{cases}
\end{aligned}$$

- Portanto, $$a_m = \begin{cases} \pi & \text{se } m = 0 \\ 0 & \text{se } m \in \mathbb{N} \text{ é par} \\ -\dfrac{4}{m^2\pi} & \text{se } m \in \mathbb{N} \text{ é ímpar} \end{cases}$$

- e a **série de Fourier associada** à função *f(x)* = | *x* | definida em $[-\pi, \pi]$ é dada por,

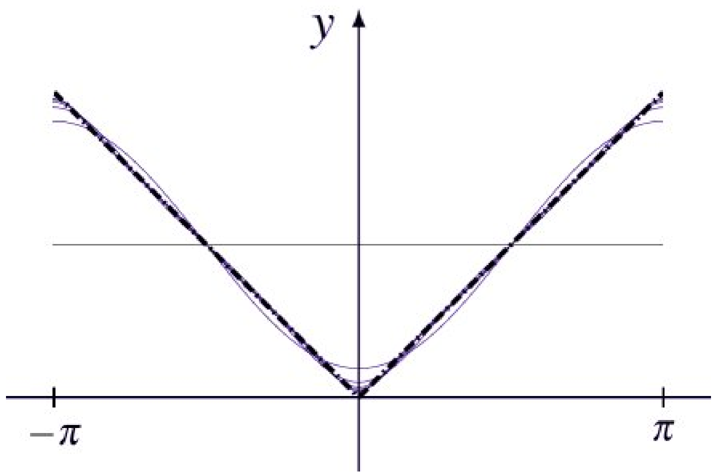
$$\boxed{\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{4}{\pi} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2} \right)}$$

- ou seja,

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\cos(3x)}{3^2} - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\cos(5x)}{5^2} - \cdots$$

para todo o $x \in [-\pi, \pi]$.

- Podemos observar como as primeiras somas parciais aproximam a função *f(x)* = | *x* | no intervalo $[-\pi, \pi]$



- Retomemos a função definida no intervalo $[-\pi\ ,\ \pi]$,

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{se} \quad x\in[0,\pi] \\ -1 & \text{se} \quad x\in[-\pi,0[\end{cases}$$

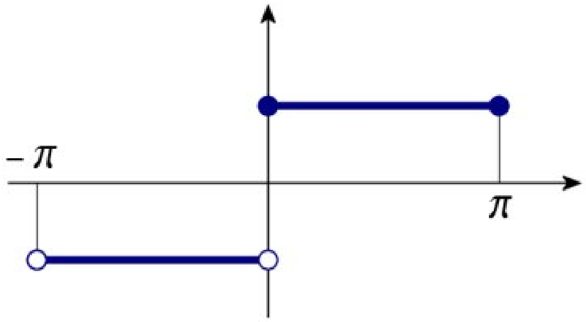
para a qual deduzimos a série de Fourier,

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{\pi}\frac{\operatorname{sen}((2n-1)x)}{2n-1}$$

que é válida para todo o $x\in[-\pi\ ,\ \pi]$.

- Vamos agora construir uma **extensão periódica** desta função, de **período** 2π, a toda a recta real.
  - Contudo a função está definida no intervalo $[-\pi\ ,\ \pi]$ e, como vimos, a extensão periódica de intervalos fechados é impossível.
  - Mas podemos considerar uma **restrição** de $f(x)$, por exemplo, ao intervalo $]-\pi\ ,\ \pi]$ e efectuar a **extensão periódica desta restrição**.
  - Consideremos então a função definida no intervalo $]-\pi\ ,\ \pi]$ por,

$$f(x)=\begin{cases} -1 & \text{se} \quad x\in]-\pi,0[\\ 1 & \text{se} \quad x\in[0,\pi] \end{cases}$$



- Ora, a série de Fourier que deduzimos,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \frac{\operatorname{sen}((2n-1)x)}{2n-1}$$

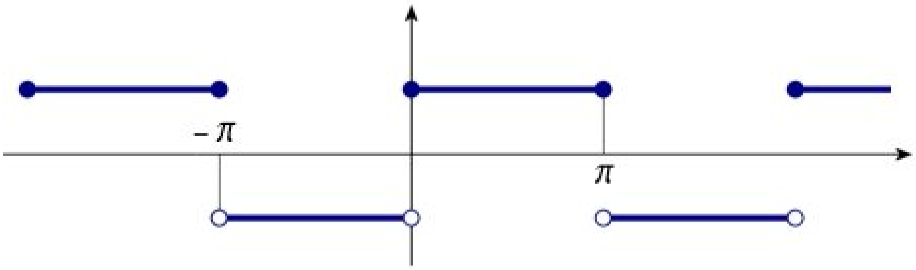
  era válida para todo o $x \in [-\pi, \pi]$.

  Portanto, é também **válida para a restrição** em $]-\pi, \pi]$.

- Podemos então construir a **extensão periódica**, que é **única**, de $]-\pi, \pi]$ a todo o $\mathbb{R}$.

- Consideremos então a **função periódica** de **período** 2π, definida em $]-\pi, \pi]$ por ,

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x \in]-\pi, 0[\\ 1 & \text{se} \quad x \in [0, \pi] \end{cases}$$



- Para o cálculo dos **coeficientes** a_n , b_n, basta notar que todas as funções integrandas que aparecem nas fórmulas são **funções periódicas** de **período** 2π.

- Por isso, os coeficientes de Fourier em **qualquer intervalo de amplitude** 2π, são iguais aos coeficientes no **intervalo** $[-\pi, \pi]$.

- ou seja, para qualquer $a \in \mathbb{R}$,

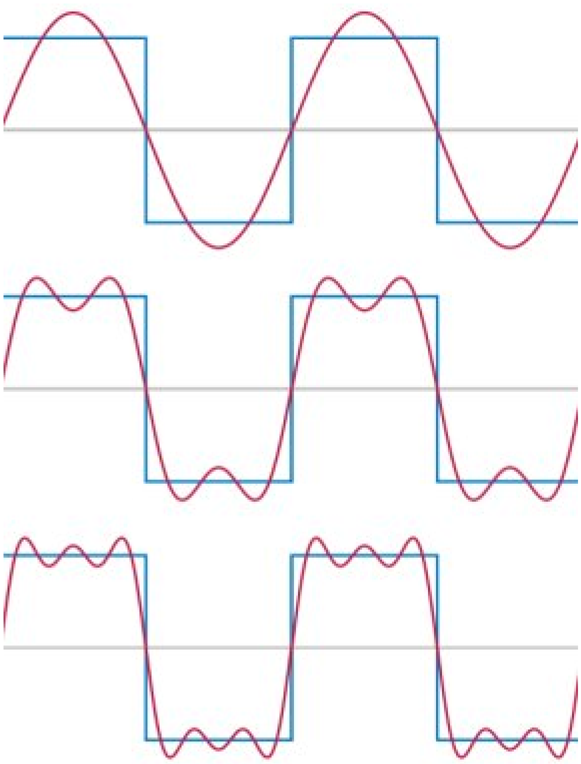
$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos(mx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx$$

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\,\text{sen}\,(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,(nx)\,dx$$

- Assim, a série de Fourier associada à função no intervalo $[-\pi\,,\,\pi]$, coincide com a **série de Fourier** associada à **extensão periódica** da função a toda a recta real.

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi}\frac{\text{sen}\,((2n-1)x)}{2n-1}$$

- Para as **três primeiras somas parciais** da série de Fourier da **extensão periódica da função** podemos observar,



➡ Recapitulemos as **três propriedades dos integrais**, que são particularmente úteis no cálculo dos coeficientes de Fourier:

- Se $g(x)$ for uma **função par**,

  então,

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx = 2\int_0^{\pi} g(x)\,dx}$$

- Se $g(x)$ for uma **função ímpar**,

  então,

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx = 0}$$

- Se $g(x)$ for uma **função periódica** de **período** 2π,

  então,

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx = \int_a^{a+2\pi} g(x)\,dx} \quad ,\forall\, a \in \mathbb{R}$$

- Retomemos a função $f(x) = |x|$ definida no intervalo $[-\pi, \pi]$,

  para a qual deduzimos a série de Fourier,

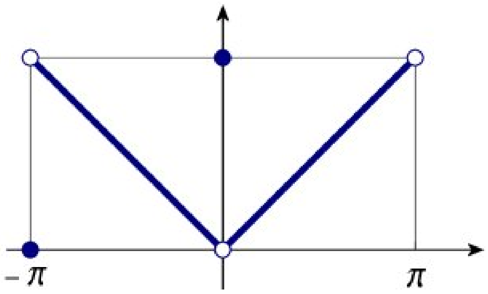
$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x - \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\cos(3x)}{3^2} - \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\cos(5x)}{5^2} - \cdots$$

  válida para todo o $x \in [-\pi, \pi]$.

  Vamos agora construir uma **extensão periódica** desta função, de **período** 2π, a toda a recta real.

- Consideremos, por exemplo, a **função periódica** de **período** 2π definida em $[-\pi\ ,\ \pi[$ por ,

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se} \quad x \in]-\pi,\pi[\setminus\{0\} \\ \pi & \text{se} \quad x = 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = -\pi \end{cases}$$



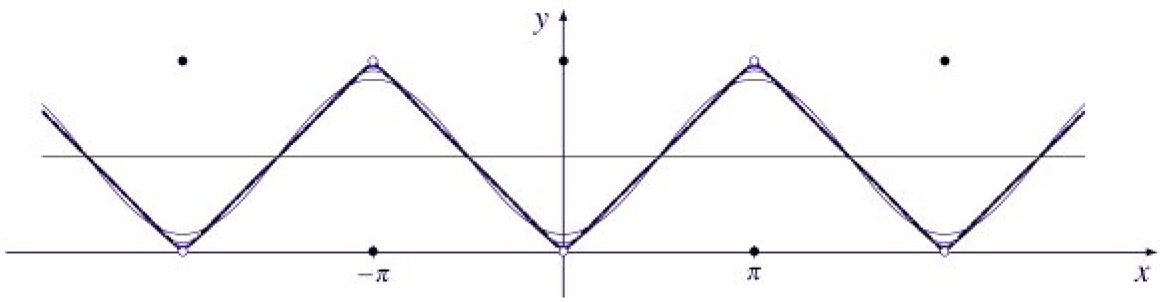
- Os coeficientes de Fourier já calculados para a função $|x|$ definida em $[-\pi\ ,\ \pi]$, continuam válidos para as restrições $]-\pi\ ,\ 0[$ e $]0,\ \pi[$.

- e sendo $f(x)$ uma função periódica de período 2π, os respectivos coeficientes de Fourier continuam a ser os mesmos.

- Portanto, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cdot\cos x - \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\cos(3x)}{3^2} - \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\cos(5x)}{5^2} - \cdots$$

- Podemos observar como as sucessivas somas parciais da série de Fourier aproximam a função $f(x)$ em todos os pontos do domínio, **excepto nos pontos de descontinuidade**.



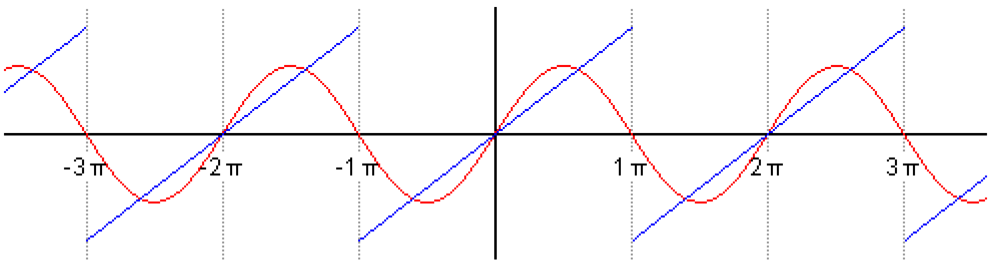
- Considere a função $f(x) = x$, definida em $[-\pi\ ,\ \pi]$.

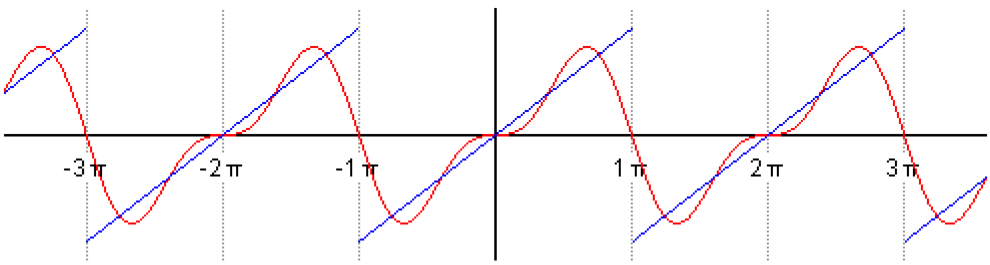
  - Mostre que, para todo o $x \in [-\pi\ ,\ \pi]$,

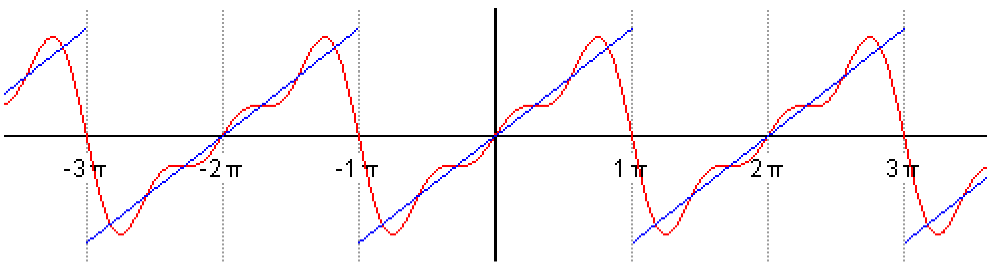
$$x \sim \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2\,\mathrm{sen}\,(nx)}{n}$$

  - Construa uma extensão periódica de período 2π e deduza a respectiva série de Fourier.

  - As três primeiras somas parciais deverão ter a forma,





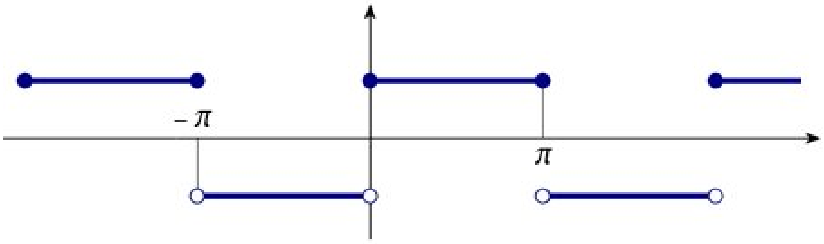


⁕ Convergência das séries de Fourier

- Tal como no caso das séries de Taylor, uma série de Fourier **pode ser ou não convergente** e, quando convergente, a **sua soma pode ser ou não igual** à função inicial.

- Por exemplo, retomemos a **função periódica** de **período** 2π, definida em $]-\pi, \pi]$ por ,

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x \in]-\pi, 0[\\ 1 & \text{se} \quad x \in [0, \pi] \end{cases}$$



para a qual deduzimos a **série de Fourier associada**,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \frac{\operatorname{sen}((2n-1)x)}{2n-1}$$

- Mostre que esta série de funções é **convergente**.

- Sendo $S(x)$ a **função soma** da série, será que,

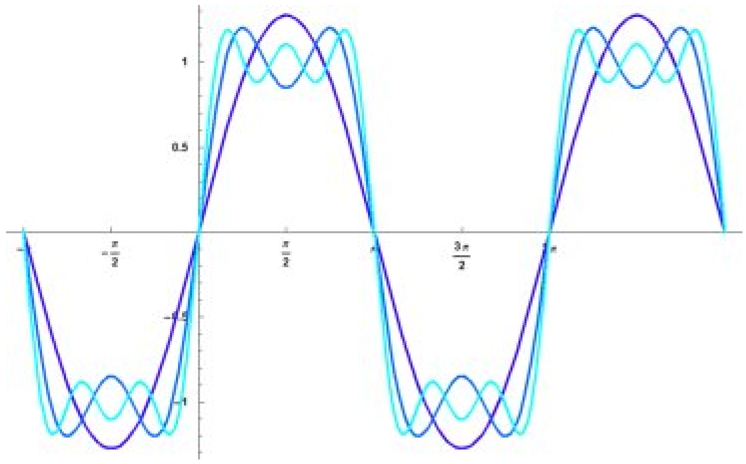
$$S(x) = f(x), \ \forall\, x \in \mathbb{R} \ ?$$

- Para os pontos da forma $x = k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$, como todos os termos da série se anulam, temos que:

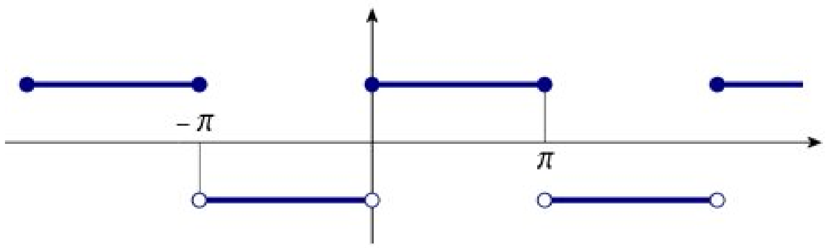
$$S(k\pi) = 0$$

mas $\qquad f(k\pi) = 1$

- Ou seja, nos pontos da forma $x = k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$, a série de Fourier **converge pontualmente** para **zero**, porque todas as somas parciais são nulas.



- Calculemos os **limites laterais** de *f(x)* nesses mesmos pontos,



$$f(k\pi^+) = \lim_{x \to (k\pi)^+} f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \text{k} \quad \text{é par} \\ -1 & \text{se} \quad \text{k} \quad \text{é ímpar} \end{cases}$$

$$f(k\pi^-) = \lim_{x \to (k\pi)^-} f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad \text{k} \quad \text{é par} \\ 1 & \text{se} \quad \text{k} \quad \text{é ímpar} \end{cases}$$

- Assim, nos pontos da forma $x = k\pi$, tanto para k par como para k ímpar, é verificada a relação,

$$\boxed{S(k\pi) = \frac{f(k\pi^+) + f(k\pi^-)}{2}}$$

- Se analisarmos, por exemplo, o ponto $x = \pi / 2$, temos a série,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\text{sen}((2n-1)\pi/2)}{2n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

- Como conhecemos a **série de Mac-Laurin** da função **arcotangente**,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \text{arctg}\, 1 = \frac{\pi}{4}$$

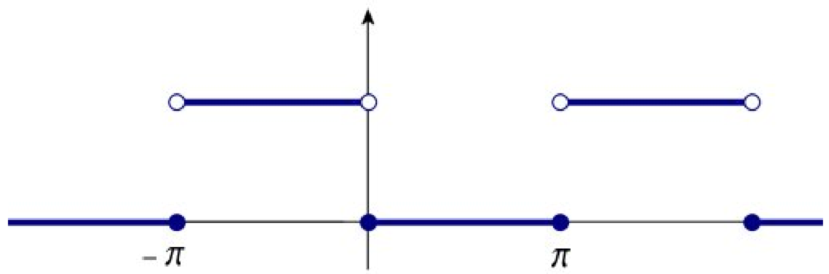
- portanto,

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1$$

- ou seja, neste caso, $S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

- Consideremos agora a **função periódica** de **período** 2π, definida em $]-\pi, \pi]$ por ,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in]-\pi, 0[\\ 0 & \text{se} \quad x \in [0, \pi] \end{cases}$$



- Calculemos os **coeficientes de Fourier**,

- $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{0} dx = 1$

- e para todo o $m \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \cos(mx)\,dx \\ &= \frac{1}{m\pi}\operatorname{sen}(mx)\Big]_{-\pi}^{0} \\ &= -\frac{1}{m\pi}\operatorname{sen}(-m\pi) = 0 \end{aligned}$$

- e para todo o $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \operatorname{sen}(nx)\,dx \\ &= -\frac{1}{n\pi}\cos(nx)\Big]_{-\pi}^{0} \\ &= -\frac{1}{n\pi} + \frac{1}{n\pi}\cos(-n\pi) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ -\dfrac{2}{n\pi} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \end{aligned}$$

- portanto, para todo o $x \in \mathbb{R}$, temos a **série de Fourier associada**,

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\operatorname{sen}((2n-1)x)}{2n-1}\right)$$

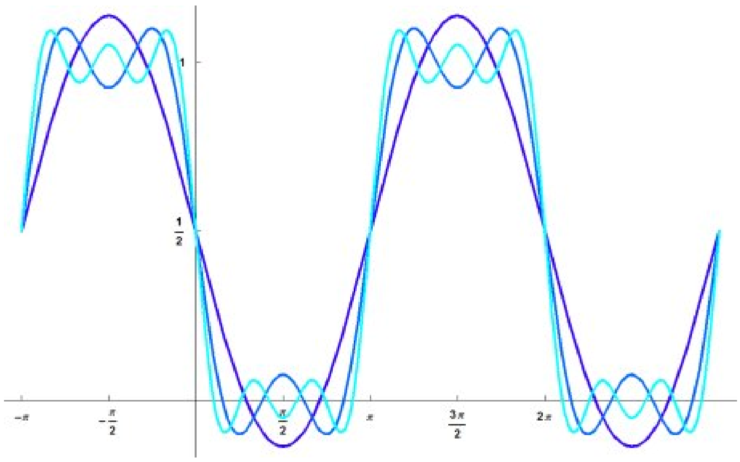
- Tratando-se também de uma série **convergente** de funções e sendo *S(x)* a sua **função soma**, será que,

$$S(x) = f(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}\ ?$$

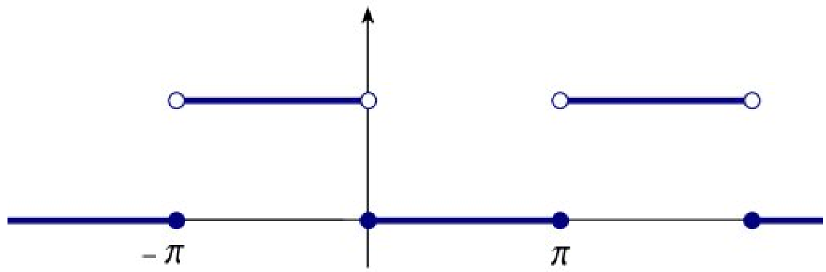
- Para os pontos da forma $x = k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$ todos os termos da série são nulos, excepto o primeiro, temos,

$$S(k\pi) = 1/2 \quad \text{mas} \quad f(k\pi) = 0$$

- Ou seja, para $x = k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$, como todas as somas parciais são iguais a $1/2$, a série de Fourier **converge pontualmente** para $\mathbf{1/2}$.



- E calculando os **limites laterais** de $f(x)$ nesses mesmos pontos,



$$f(k\pi^+) = \lim_{x \to (k\pi)^+} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \text{k} \quad \text{é par} \\ 1 & \text{se} \quad \text{k} \quad \text{é ímpar} \end{cases}$$

$$f(k\pi^-) = \lim_{x \to (k\pi)^-} f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \text{k} \quad \text{é par} \\ 0 & \text{se} \quad \text{k} \quad \text{é ímpar} \end{cases}$$

- E também neste caso, nos pontos da forma $x = k\pi$, tanto para k par como para k ímpar, é verificada a relação,

$$\boxed{S(k\pi) = \frac{f(k\pi^+) + f(k\pi^-)}{2}}$$

- Para o ponto $x = \pi / 2$, temos a série,

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\operatorname{sen}((2n-1)\pi/2)}{2n-1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \right)$$

- e voltando a utilizar a **série de Mac-Laurin** da função **arcotangente**,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

- temos,

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = 0$$

- e portanto neste caso, $S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

- Nestes dois exemplos, verificámos que a função soma da série de Fourier é **igual** a função inicial **nos pontos onde esta é contínua** e, para os **pontos de descontinuidade** existe uma **fórmula**.
- Surge assim a necessidade de utilizar uma **noção "mais fraca"** do que a continuidade de funções.

- Recordemos que,

> *Uma função $f(x)$ real é **seccionalmente contínua** num domínio D se for **contínua** em D **excepto num número finito de pontos** a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, onde **são finitos ambos os limites laterais**,*
>
> $$f(a_i^+) = \lim_{x \to a_i^+} f(x) \qquad f(a_i^-) = \lim_{x \to a_i^-} f(x)$$

- e que desta definição resulta,

  i) se $f(x)$ é ***contínua*** em D
  então $f(x)$ é ***seccionalmente contínua*** em D.

  ii) se $f(x)$ é ***seccionalmente contínua*** num intervalo $[a, b]$,
  então $f(x)$ é ***limitada*** e ***integrável*** em $[a, b]$.

- Vamos agora definir,

> *Uma função $f(x)$ real diz-se **seccionalmente diferenciável** se, tanto $f(x)$ como a sua derivada $f'(x)$ forem seccionalmente contínuas.*

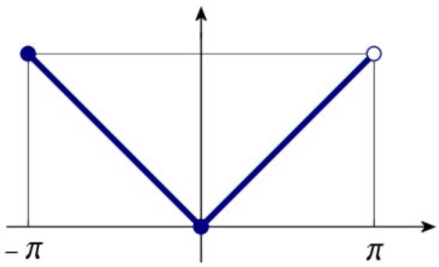
- Nestas condições, verifica-se a seguinte propriedade,

- > *Seja $f(x)$ uma função real, **periódica** de período 2π e **seccionalmente diferenciável**. Em qualquer ponto $c \in \mathbb{R}$ a **série de Fourier converge** para,*
  >
  > $$\frac{f(c^+) + f(c^-)}{2}$$

- Assim, quer nos **pontos de continuidade** como nos **pontos de descontinuidade**, a série de Fourier **converge pontualmente** para a função,

$$\boxed{S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f \text{ é contínua em } x \\ \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2} & \text{se } f \text{ não é contínua em } x \end{cases}}$$

- Consideremos a **função periódica** de **período** 2π definida em $[-\pi, \pi[$ por $f(x) = |x|$,

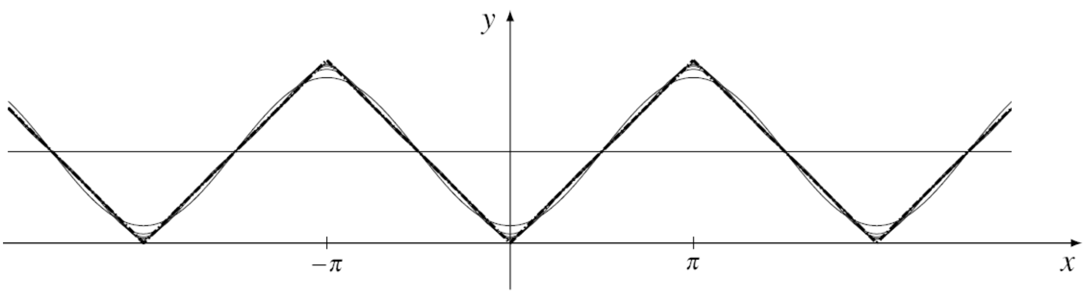


- Já deduzimos que,

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}\right)$$

- Mas desta vez, pelo modo como está definida, a extensão periódica **não tem pontos de descontinuidade**.

- Portanto, para todo $x \in \mathbb{R}$ a série de Fourier **converge para a função**, ou seja, $S(x) = f(x)$.



- Por outro lado, como para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo o $n \in \mathbb{N}$, podemos majorar,

$$\left| \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2} \right| \leq \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{(2n-1)^2}$$

- e sendo,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

  uma série numérica convergente, de termos positivos,

- pelo critério de Weierstrass, concluímos que a série de Fourier é **uniformemente convergente** em **todo o** $\mathbb{R}$ para $f(x)$.

- Note que, neste caso, $f(x)$ **não tem pontos de descontinuidade** e que a **soma** da série de Fourier $S(x) = f(x)$.

- Efectivamente, verifica-se a seguinte propriedade,

- *Se a função real $f(x)$, **periódica** de período 2π, for **contínua** e **seccionalmente diferenciável**, então **a série de Fourier** associada **converge uniformemente** em **todo o** $\mathbb{R}$ **para** $f(x)$.*

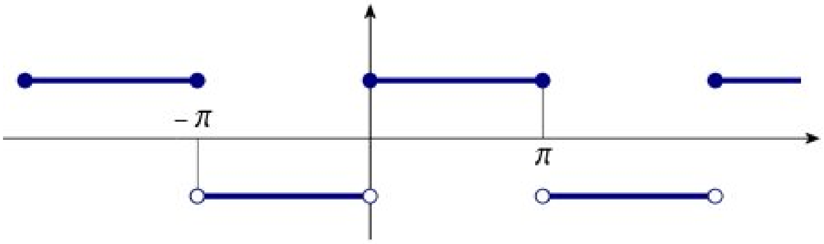
- Assim se a função inicial $f(x)$ **não for contínua**, a série de Fourier associada **não pode ser uniformemente convergente**.

- Por outro lado, pela **propriedade da continuidade de séries de funções**, sabemos ainda que,

  Se a **soma** $S(x)$ da **série de Fourier** for uma função **descontínua**, então a **convergência não é uniforme**.

- Por exemplo, a **função periódica** de **período** 2π, definida em $]-\pi\ ,\ \pi]$ por ,

$$f(x)=\begin{cases} -1 & \text{se} \quad x\in]-\pi,0[\\ 1 & \text{se} \quad x\in[0,\pi] \end{cases}$$



- Para a qual já vimos que,

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{\pi}\frac{\operatorname{sen}((2n-1)x)}{2n-1}$$

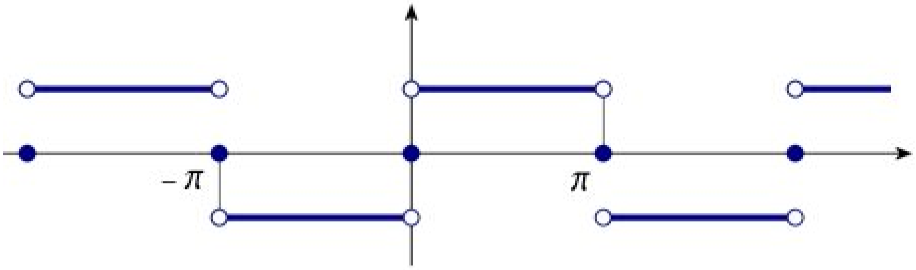
- Como $f(x)$ **não é contínua**, a série de Fourier **não pode ser uniformemente convergente**.

- Também já vimos que esta série é **convergente**, sendo portanto essa convergência apenas **pontual**.

- O valor da **soma da série** é dado por,

$$S(x)=\begin{cases} 1 & \text{se} \quad x\in]\,2k\pi\ ,\ \pi+2k\pi\,[\\ -1 & \text{se} \quad x\in]-\pi+2k\pi\ ,\ 2k\pi\,[\\ 0 & \text{se} \quad x=k\pi \end{cases}$$

- que é obviamente uma função **descontínua**.



➡ As séries de Fourier são por vezes utilizadas como auxiliares para o **cálculo de somas de séries numéricas**.

- Por exemplo, sabendo que para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{4}{\pi} \cdot \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2} \right)$$

determinar o valor da **soma da série numérica**,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

- Basta fazer $x = \pi$, pois nesse caso,

$$\pi = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{4}{\pi} \cdot \frac{\cos((2n-1)\pi)}{(2n-1)^2} \right)$$

- ou seja,

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{4}{\pi} \cdot \frac{\cos((2n-1)\pi)}{(2n-1)^2} \right)$$

- e porque todos os $\cos((2n-1)\pi) = -1$,

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{(2n-1)^2}$$

- e portanto,

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

- Por exemplo, sabendo que para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\operatorname{sen}((2n-1)x)}{2n-1} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in]2k\pi, \pi + 2k\pi[\\ -1 & \text{se} \quad x \in]-\pi + 2k\pi, 2k\pi[\\ 0 & \text{se} \quad x \in \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$$

determinar o valor da **soma da série numérica**,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

- Basta fazer $x = \pi / 2$, pois nesse caso,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\operatorname{sen}((2n-1)\pi/2)}{2n-1} = 1$$

- e porque todos os $sen((2n-1)\,\pi/2) = (-1)^{n+1}$, temos portanto,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

➡ Em certas aplicações práticas, é por vezes conveniente utilizar **séries de Fourier só de senos** ou **só de cosenos**.

- Como sabemos, quando $f(x)$ é uma **função par**, $f(-x) = f(x)$, todos os integrais que aparecem nas fórmulas envolvendo senos anulam-se e a série de Fourier é dada por,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx)$$

onde, para todo o $n \in \mathbb{N}_0$,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

- Esta série é naturalmente chamada **série de Fourier de cosenos** de $f(x)$.

- Dada uma função definida em $[0, \pi]$ é sempre possível construir, **de forma única**, uma **extensão par**, por forma a obter uma função par no intervalo $[-\pi , \pi]$.

  - Por exemplo, para $f(x) = x$ definida em $[0, \pi]$, a **única extensão par** possível é a **função módulo**, $f(x) = |x|$ definida em $[-\pi, \pi]$.

  - Em certos caos, poderá ser necessário **redefinir** a função no ponto $x = 0$.

  - Podemos depois determinar a série de Fourier desta extensão que, obviamente apresentará apenas cosenos.

- De modo análogo, quando $f(x)$ é uma **função ímpar**, $f(-x) = -f(x)$, todos os integrais que aparecem nas fórmulas envolvendo cosenos anulam-se e a série de Fourier é dada por,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)$$

onde, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx$$

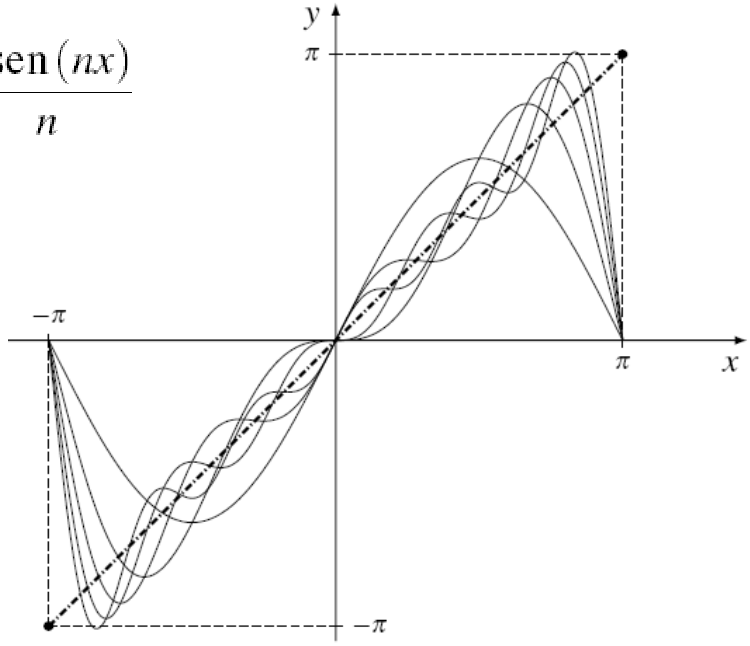
- Esta série é naturalmente chamada **série de Fourier de senos** de $f(x)$.

- Dada uma função definida em $[0, \pi]$ é sempre possível construir, **de forma única**, uma **extensão ímpar**, por forma a obter uma função ímpar no intervalo $[-\pi , \pi]$.

  - Por exemplo, para $f(x) = x$ definida em $[0, \pi]$, a **única extensão ímpar** possível é a **mesma função**, $f(x) = x$ definida em $[-\pi, \pi]$.

  - Mostre que a série de Fourier desta extensão é dada por,

$$x \sim \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2\operatorname{sen}(nx)}{n}$$



⁕ Séries de Fourier de funções de período $T > 0$

- Se, em vez de 2π, a **função periódica** $f(x)$ tem qualquer **período** $T \in \mathbb{R}^+$, então a **série de Fourier associada** tem a forma,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nx}{T} + b_n \operatorname{sen} \frac{2\pi nx}{T} \right)$$

Naturalmente, quando $T = 2\pi$ obtemos a expressão anterior.

- De modo análogo, os **coeficientes de Fourier** são dados pelas expressões,

$$a_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos \frac{2\pi mx}{T} \, dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \operatorname{sen} \frac{2\pi nx}{T} \, dx$$

para todo o $m \in \mathbb{N}_0$ e todo o $n \in \mathbb{N}$.

- Considere a função periódica de período $T = 4$, definida em $[-2, 2[$ por,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in]-2, 2[\\ 0 & \text{se} \quad x = -2 \end{cases}$$

Mostre que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}$$