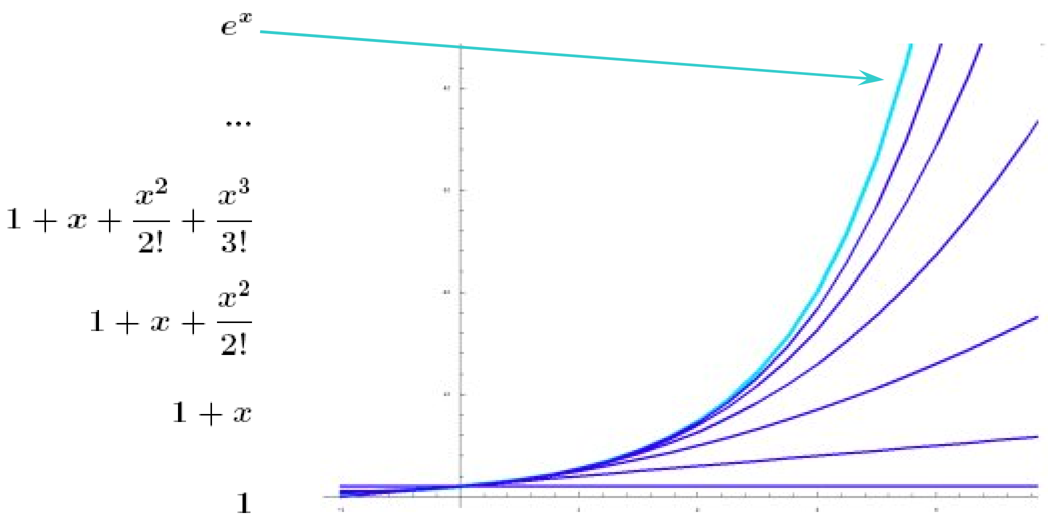
⁕ Séries de potências

- As **séries de potências** são um caso particularmente importante das séries de funções, com inúmeras aplicações tanto teóricas como práticas.

- Um exemplo típico é a série,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = e^x$$

  - O cálculo do valor de sucessivas **somas parciais** é simples de programar e permite obter **sucessivas aproximações** da **exponencial** de qualquer número real.



- Chama-se **série de potências centrada em *c*** $\in \mathbb{R}$ a uma série da forma,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$$

onde (a_n) é uma sucessão de números reais.

- Quando $c = 0$ é uma **série de potências centrada na origem** e tem a forma,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

- Consideremos a série de funções definidas em $\mathbb{R}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$$

  - Trata-se de uma **série de potências centrada na origem**.

    Vejamos para que valores de x a série é **convergente**.

  - Para $x = 0$ a **série nula** é convergente.
  - Para $x \neq 0$ os termos não se anulam e podemos aplicar o **critério de d'Alembert**,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+2} x^{n+1}\right|}{\left|\dfrac{(-1)^n}{n+1} x^n\right|} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{|(-1)^{n+1}|\,|x|^{n+1}(n+1)}{|(-1)^n|\,|x|^n(n+2)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|(n+1)}{n+2} \\
&= |x|
\end{aligned}$$

  - Então, quando $L = |x| < 1$ a série é **absolutamente convergente**

    quando $L = |x| > 1$ a série é **divergente**

    e quando $L = |x| = 1$ nada podemos concluir.

- Analisemos os dois casos para os quais $|x| = 1$, da série,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$$

- Para $x = -1$ temos a série,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (-1)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$$

que, por **comparação por passagem ao limite** com a série harmónica básica, facilmente provamos ser **divergente**.

- Para $x = +1$ temos a série,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

que é uma **série alternada**.

- Estudando a respectiva **série dos módulos**,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n+1} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$$

verificamos que é **divergente**, donde nada podemos concluir.

- Resta tentar aplicar o **critério de Leibniz**.

- Para todo o $n \in \mathbb{N}$ temos **uma sucessão de números reais positivos**,

$$\left(\frac{1}{n+1} \right)$$

- Será **monótona decrescente** e de **limite zero**?

- Efectivamente,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$$

e é evidente que,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

- Pelo critério de Leibniz concluímos que a **série alternada** é **convergente**.

- Portanto, no caso de $x = +1$, a série dada é convergente e como verificámos que a respectiva série dos módulos é divergente, ela é **simplesmente convergente.**

- E finalmente podemos estabelecer que a **série de potências**,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n \quad \begin{cases} \text{é } \textbf{absolutamente convergente} \text{ se } x \in \,]-1,\ 1[\\ \text{é } \textbf{simplesmente convergente} \text{ se } x = 1 \\ \text{é } \textbf{divergente} \text{ se } x \notin \,]-1,\ 1] \end{cases}$$

- Chama-se **intervalo de convergência** de uma série de potências ao **interior** do seu **domínio de convergência**.

- Para o exemplo anterior, como o **domínio de convergência** é $]-1,\ 1]$, o **intervalo de convergência** é $]-1,\ 1[$.

- Analisemos finalmente a conhecida **série de potências**,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

  - Para $x = 0$ a série $1 + 0 + 0 + \ldots$ é **absolutamente convergente**.

  - Para $x \neq 0$ (termos não nulos) podemos aplicar o **critério de d'Alembert**,

$$\begin{aligned} L = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\dfrac{x^n}{n!}\right|} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n!|x|^{n+1}}{(n+1)!|x|^n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n!|x|}{(n+1)n!} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|}{n+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

    e concluir que a série é **absolutamente convergente** também para $x \neq 0$.

  - Portanto a série é **absolutamente convergente** para todo o $x \in \mathbb{R}$, sendo o seu **domínio de convergência** todo o conjunto $\mathbb{R}$.

- De modo análogo, analise a série,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n!x^n$$

  - Verifique que neste caso o **domínio de convergência** é apenas o conjunto singular $\{0\}$.

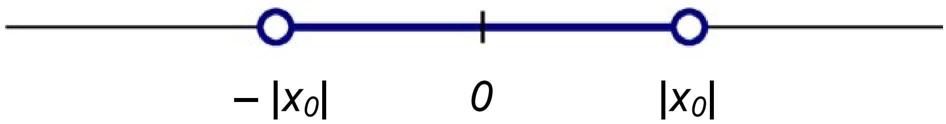
⁕ Propriedades das séries de potências

- *Seja* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *uma* <u>*série de potências centrada na origem.*</u>

  Então verificam-se as condições seguintes:

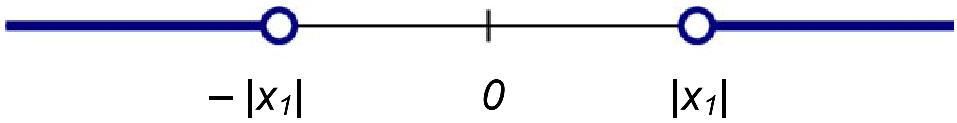
  i) se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ <u>*converge em* $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$</u>, *então*

  <u>*converge absolutamente em todo o ponto de* $]-|x_0|, |x_0|[$;</u>



  ii) se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ <u>*diverge em* $x_1 \in \mathbb{R}$</u>, *então*

  <u>*diverge em todo o ponto de* $]-\infty, -|x_1|[\cup]|x_1|, +\infty[$.</u>



- Recordemos a conclusão obtida do estudo da **série de potências**,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n \begin{cases} \text{é } \textbf{absolutamente convergente} \text{ se } x \in]-1, 1[\\ \text{é } \textbf{simplesmente convergente} \text{ se } x = 1 \\ \text{é } \textbf{divergente} \text{ se } x \notin]-1, 1] \end{cases}$$

- Vejamos como a **propriedade** anterior nos pode ajudar.

- Para $x = 1$, vimos que é **convergente** a série alternada,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

- Então esta **propriedade** garante-nos que a série dada é **absolutamente convergente** em todo o intervalo $]-1, 1[$

- Para $x = -1$ vimos que é **divergente** a série,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(-1)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$$

- Então esta **propriedade** garante-nos que a série dada é **divergente** em todo o intervalo $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

- E como sabemos o que acontece nos próprios **pontos** $x = 1$ e $x = -1$, podemos concluir que o **domínio de convergência** desta série é $]-1, 1]$.

- Esta **propriedade** é facilmente **generalizável** a toda a **série de potências centrada em $c \neq 0$**,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$$

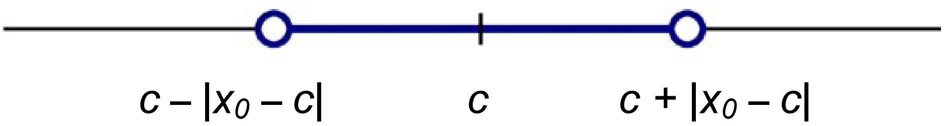
Basta efectuar uma **mudança de variável**, de modo a transformar x^n em $(x-c)^n$.

- *Numa a* ***série de potências centrada em*** $c \neq 0$,

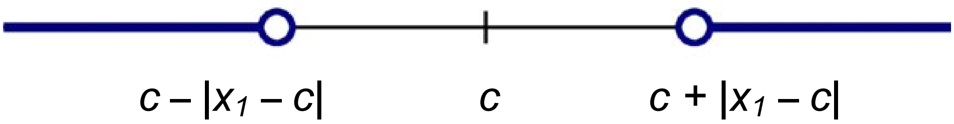
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$$

Verificam-se as condições seguintes:

i) *Se a série* ***converge*** *em* $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{c\}$ *então* ***converge absolutamente*** *em todo o ponto de* $]\, c - |x_0 - c| \,,\, c + |x_0 - c| \,[$



ii) *Se a série* ***diverge*** *em* $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{c\}$ *então* ***diverge*** *em todo o ponto de* $]\, -\infty,\ c - |x_1 - c| \,[\ \cup\ ]\, c + |x_1 - c| \,,\, +\infty \,[$



- De modo análogo, todas as propriedades das séries de potências centradas na origem podem ser **generalizáveis** a séries de potências centradas em $c \neq 0$.

- A proposição seguinte descreve a propriedade mais importante das séries de potências. Efectivamente, **só três casos** podem acontecer: a série converge absolutamente para todos os reais, ou só na origem, ou num intervalo centrado.

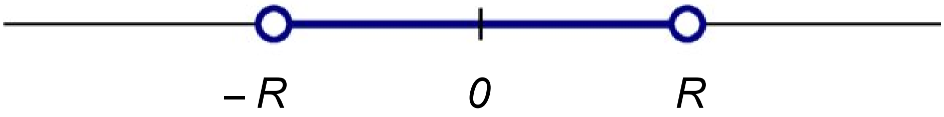
- *Seja* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *uma série de potências centrada na origem.*

  Então verifica-se uma e uma só das condições seguintes:

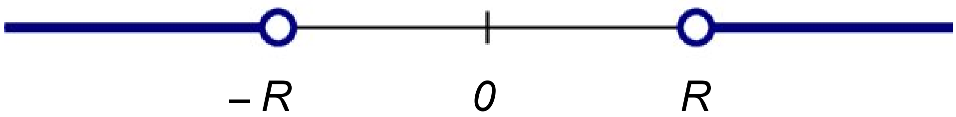
  (i) a série converge absolutamente apenas em $x = 0$ *e diverge se* $x \neq 0$;

  (ii) a série converge absolutamente para todo o $x \in \mathbb{R}$;

  (iii) existe $R > 0$ *tal que a série converge absolutamente para todo o* $x \in]-R, R[$



e diverge para todo o $x \in]-\infty, -R[\cup]R, +\infty[$.



- O comportamento nos próprios **pontos** $x = R$ e $x = -R$ tem de ser analisado para cada caso.

- Naturalmente, ao número R chama-se **raio de convergência** da série de potências.

- Assim, a questão fundamental do estudo de uma série de potências é a **determinação do seu raio de convergência**: 0, $+\infty$, ou um número real.

- E **generalizando** para toda a série de potências centrada em $c \neq 0$, ...

- *Numa a* ***série de potências centrada em*** $\boldsymbol{c \neq 0}$,

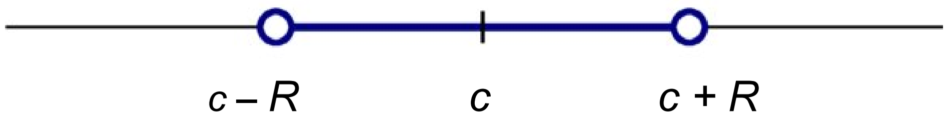
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$$

Verifica-se ***uma e uma só*** *das condições seguintes:*

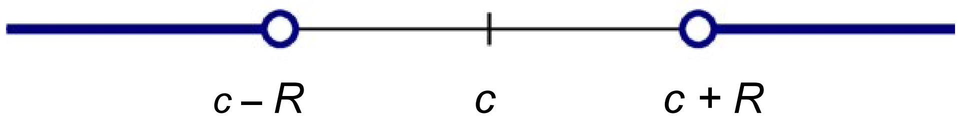
i) *a série* ***converge absolutamente*** *apenas em* $x = c$ *e* ***diverge*** *se* $x \neq c$.

ii) *a série* ***converge absolutamente*** *para todo o* $x \in \mathbb{R}$

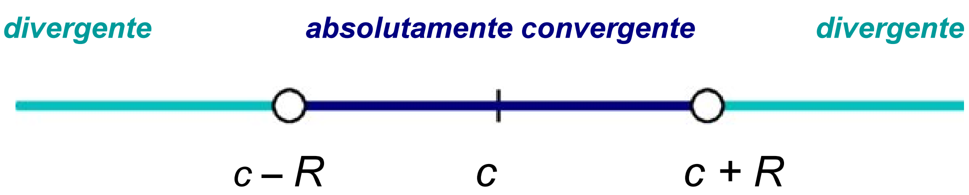
iii) *existe um* $R > 0$ *tal que a série* ***converge absolutamente*** *para todo o* $x \in \,]\,c - R,\ c + R\,[$



e ***diverge*** *para todo o* $x \in \,]-\infty,\ c - R\,[\ \cup\ ]\,c + R,\ +\infty\,[$



- Nada é dito sobre o comportamento da série nos **próprios pontos** $x = c + R$ e $x = c - R$.



⁕ Determinação do raio de convergência

- Para uma dada **série de potências centrada em c** ($c = 0$ ou $c \neq 0$),

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$$

calculemos o seu **raio de convergência**.

- Para $x = c$ a série é **absolutamente convergente** e tem soma a_0.
- Para $x \neq c$ e assumindo que os a_n não se anulam, teremos para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n |x-c|^n \neq 0$$

- Nestas condições, podemos aplicar o **critério de d'Alembert** e calcular,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|a_{n+1}(x-c)^{n+1}\right|}{\left|a_n(x-c)^n\right|} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|\,|x-c|^{n+1}}{|a_n|\,|x-c|^n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x-c|\right) \end{aligned}$$

- Chamemos, $L := \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$

- Então, para $|x-c| \neq 0$,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\left|a_{n+1}(x-c)^{n+1}\right|}{\left|a_n(x-c)^n\right|} = L|x-c|}$$

- E agora, apenas **três casos** podem ocorrer, de acordo com os três possíveis valores de L : **nulo**, **infinito** ou **finito não nulo**.

- No caso de $L = 0$ temos,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}(x-c)^{n+1}|}{|a_n(x-c)^n|} = 0$$

  - então, pelo **critério de d'Alembert** e a série de potências converge absolutamente, desde que $x \neq c$.

    Mas já vimos que também converge absolutamente para $x = c$.

  - Portanto, quando $L = 0$, a série de potências é **absolutamente convergente** para todo o $x \in \mathbb{R}$ e o seu **raio de convergência** é $+\infty$.
  - $R = +\infty$

- No caso de $L = +\infty$ temos,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}(x-c)^{n+1}|}{|a_n(x-c)^n|} = +\infty$$

  - então, pelo **critério de d'Alembert** e a série de potências diverge, desde que $x \neq c$.

    Mas já vimos que converge absolutamente para $x = c$.

  - Portanto, quando $L = +\infty$, o **domínio de convergência** da série de potências é apenas $\{c\}$ e o seu **raio de convergência** é nulo.
  - $R = 0$

- No caso de $L \neq 0$ e $L \neq +\infty$ temos,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left|a_{n+1}(x-c)^{n+1}\right|}{\left|a_n(x-c)^n\right|} = L\,|x-c|$$

- então, pelo **critério de d'Alembert** e a série de potências converge absolutamente, para todo o $x \neq c$, quando,

$$L\,|x-c| < 1 \Longleftrightarrow |x-c| < \frac{1}{L}$$

e diverge, para todo o $x \neq c$, quando,

$$|x-c| > \frac{1}{L}$$

e já vimos que converge absolutamente para $x = c$.

- Portanto, quando L é **finito e não nulo**, a série de potências é **absolutamente convergente** em todos os pontos do intervalo,

$$\left]-\frac{1}{L}+c, \frac{1}{L}+c\right[$$

e **divergente** para todo o,

$$x \in \left]-\infty, -\frac{1}{L}+c\right[\cup \left]\frac{1}{L}+c, +\infty\right[$$

- Então, o **raio de convergência** é $R = 1 / L$.

- Para determinar completamente o **domínio de convergência** da série, será ainda necessário analisar o seu comportamento nos **dois pontos**,

$$x = -\frac{1}{L}+c \qquad x = \frac{1}{L}+c$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$$

- Juntando os **três casos**, e assumindo as convenções habituais, $1/+\infty = 0$ e $1/0 = +\infty$, podemos estabelecer uma fórmula para o cálculo do **raio de convergência de uma série de potências**,

$$\boxed{R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}}$$

desde que os a_n não se anulem e o **limite exista**, mesmo que infinito.

- Note que, todo este estudo pode igualmente ser feito com base no **critério de Cauchy**.
- Desse estudo, e assumindo as mesmas convenções, resulta outra fórmula para o cálculo do **raio de convergência de uma série de potências**,

$$\boxed{R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}}$$

desde que os a_n não se anulem e o **limite exista**, mesmo que infinito.

- Deste modo, para analisar uma dada série de potências, podemos seguir o processo de aplicação de **um dos dois critérios**, ou utilizar directamente **uma das duas fórmulas**.
- Os **dois pontos** extremos do intervalo têm de ser analisados separadamente.

- Para cada uma das seguintes séries de potências, determine o **domínio de convergência**, indicando os **pontos** onde a convergência é simples ou absoluta.

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{5^n} x^n$

  - Para todo o $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\frac{n!}{5^n} \neq 0$

  - Então podemos calcular,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\frac{n!}{5^n}\right|}{\left|\frac{(n+1)!}{5^{n+1}}\right|} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n!5^{n+1}}{(n+1)!5^n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{5}{n+1} \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

  - Portanto, $R = 0$, o **domínio de convergência** da série de é apenas $\{0\}$ onde **converge absolutamente**.

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{10^n}{n!} \left(x - \frac{7}{2}\right)^n$

  - Para todo o $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\frac{10^n}{n!} \neq 0$

  - Então podemos calcular o limite,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\dfrac{10^n}{n!}\right|}{\left|\dfrac{10^{n+1}}{(n+1)!}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!\,10^n}{n!\,10^{n+1}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{10}\right)$$
$$= +\infty\,.$$

- Portanto, $R = +\infty$, o **domínio de convergência** da série de é todo o $\mathbb{R}$, sendo **absolutamente convergente** em todos os pontos.

- $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n\sqrt{n+1}}(x+1)^n$$

- Para todo o $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{3^n\sqrt{n+1}} \neq 0$

- Então podemos calcular,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\dfrac{1}{3^n\sqrt{n+1}}\right|}{\left|\dfrac{1}{3^{n+1}\sqrt{n+2}}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n+1}\sqrt{n+2}}{3^n\sqrt{n+1}} = 3$$

- Então, $R = 3$, e a série é **absolutamente convergente** para,

$$|x+1| < 3 \Longleftrightarrow -3 < x+1 < 3 \Longleftrightarrow x \in]-4,2[$$

- Resta estudar o seu comportamento nos **pontos** -4 e 2.

- Para $x = -4$, temos a **série numérica**,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n \sqrt{n+1}}(-3)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

- que é uma **série alternada** pois, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} > 0$

- Analisemos a **sucessão**,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

- que é **decrescente**, pois, $\dfrac{1}{\sqrt{n+2}} < \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

- e **tende para zero**, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$

- Então, pelo **critério de Leibniz**, a série alternada é **convergente**.

- Por outro lado, a respectiva **série dos módulos**,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

- é **divergente** pois, por **comparação por passagem ao limite**,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1$$

- tem a mesma natureza da **série harmónica**,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

- por isso, a **série alternada** é **simplesmente convergente**,
- e então, a **série de potências** dada é **simplesmente convergente** no **ponto** $x = -4$.

- Para $x = 2$, temos a **série numérica**,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n \sqrt{n+1}} 3^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

- que acabámos de ver que é **divergente**.
- e então, a **série de potências** dada é **divergente** no **ponto** $x = 2$.

- Portanto, a **série de potências** dada tem como **domínio de convergência** o intervalo $[-4, 2[$ sendo **absolutamente convergente** em $]-4, 2[$, mas **simplesmente convergente** no **ponto** $x = -4$.

- $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\, 10^n} (x+4)^n$$

  - Para todo o $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n\, 10^n} \neq 0$
  - Então podemos calcular,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left| \dfrac{(-1)^{n+1}}{n\, 10^n} \right|}} = \lim_{n \to +\infty} (10 \sqrt[n]{n}) = 10\,.$$

- Então, $R = 10$, e a série é **absolutamente convergente** para,

$$|x+4| < 10 \Longleftrightarrow -14 < x < 6$$

- e **divergente** para,

$$|x+4| > 10 \Longleftrightarrow (x < -14 \vee x > 6)$$

- Resta estudar o seu comportamento nos **pontos** -14 e 6.

- Para $x = -14$, temos a **série numérica**,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\,10^n}(-10)^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n} \end{aligned}$$

- que é **divergente**, por ser o produto da **série harmónica básica** por -1.

- Para $x = 6$, temos a **série numérica**,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n10^n}(10)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

- que é **simplesmente convergente**, por ser uma **série harmónica alternada** com $p = 1$.

- Portanto, a **série de potências** dada tem como **domínio de convergência** o intervalo $]-14, 6]$ sendo **absolutamente convergente** no intervalo $]-14, 6[$ e **simplesmente convergente** no **ponto** $x = 6$.

- E que fazer quando o **valor do centro** não aparece explicitamente na fórmula?

  Como por exemplo na série de potências,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^4+16}(2x-1)^n$$

- Podemos começar por tentar **manipular algebricamente** a fórmula.

  - Neste caso, notamos que $(2x-1)^n = 2^n\left(x-\frac{1}{2}\right)^n$

    e transformamos a série dada numa série de potências centrada em $1/2$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n^4+16}\left(x-\frac{1}{2}\right)^n$$

  - Verifique que o **domínio de convergência** é o intervalo $[0,\ 1]$ onde é **absolutamente convergente** em todos os pontos.

- Noutras situações, poderá ser necessário fazer uma **mudança de variável**,

  - Como por exemplo, $2x - 1 = z$, convertendo a série dada numa série de potências centrada na origem.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n^4+16}$$

  - Verifique que, para esta série, o domínio de convergência é o intervalo de z, $[-1,\ 1]$ onde é absolutamente convergente em todos os pontos.

  - Regressando à variável x, naturalmente recuperamos o intervalo $[0,\ 1]$.

- Em qualquer dos casos, podemos sempre **aplicar directamente um dos critérios**, **Cauchy** ou **d'Alembert**, à série dada.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^4+16}(2x-1)^n$$

  - Começamos por identificar o ponto, $x = 1/2$, para o qual a **série se anula**.
  - E para todo o $x \neq 1/2$ e todo o $n \in \mathbb{N}$ podemos calcular, por exemplo,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\frac{1}{(n+1)^4+16}(2x-1)^{n+1}\right|}{\left|\frac{1}{n^4+16}(2x-1)^n\right|} &= \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{n^4+16}{(n+1)^4+16}(2x-1)\right| \\ &= |2x-1|. \end{aligned}$$

  - Assim, para o **critério de d'Alembert** temos $L = |2x - 1|$, sendo a série absolutamente convergente para os valores de x tais que $|2x - 1| < 1$.
  - Combinando com facto de que a série (nula) é absolutamente convergente em $x = 1/2$, confirme o resultado já conhecido.

- Mostre que a série, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}x^{2n}$

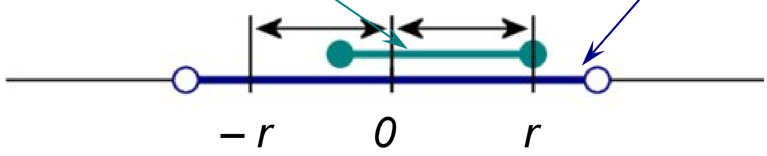
é **absolutamente convergente** apenas em $]-1, 1[$.

⁕ Convergência uniforme de séries de potências

- Para que possamos **derivar e integrar** séries de potências **termo a termo** é vital conhecer os **intervalos** e o **tipo** de **convergência**.

- *Seja* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *uma série de potências com raio de convergência não nulo e seja **I** o seu **intervalo de convergência**.*
  *Então a série **converge uniformemente** em qualquer **intervalo fechado e limitado de I**.*

- Sendo $[a,\ b]$ um **intervalo fechado e limitado** de ***I***,
  tomando $r = max\ \{\ |a|\ ,\ |b|\ \}$ temos,



$$[\ a,\ b\ ] \subset [-\ r\ ,\ r\ ] \subset I$$

- Provemos que a convergência é **uniforme** em $[-\ r\ ,\ r\ ]$.

  Para todo o $x \in [-\ r\ ,\ r\ ]$ e todo o $n \in \mathbb{N}_0$ temos $|x^n| \leq r^n$ e,

$$|a_n x^n| \leq |a_n| r^n$$

- Por outro lado, como a série é absolutamente convergente no seu intervalo de convergência, então é **convergente a série dos módulos**,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n r^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n$$

- Ou seja, a **série dos módulos** é **majorada** por uma **série numérica convergente**.

- Então, pelo **critério de Weierstrass**, a série de potências é **uniformemente convergente** em $[-r, r]$.

  E como $[a, b] \subset [-r, r]$, a **série de potências** é portanto **uniformemente convergente** em $[a, b]$.

- Generalizando,

- *Qualquer série de potências,* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$

  com raio de convergência não nulo, ***converge uniformemente***

  em qualquer ***intervalo fechado*** *contido no seu* ***intervalo de convergência****.*

- Por exemplo a série anterior, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^4+16}(2x-1)^n$

  como vimos, tem como **domínio de convergência** o intervalo $[0, 1]$

  e sendo o **intervalo de convergência** $]0, 1[$, é portanto **uniformemente convergente** em qualquer **intervalo fechado** contido em $]0, 1[$.

- Por exemplo a série, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\,10^n}(x+4)^n$

  se tem como **domínio de convergência** o intervalo $]-14, 6]$ e como **intervalo de convergência** o intervalo $]-14, 6[$, é então **uniformemente convergente** em qualquer **intervalo fechado** contido em $]-14, 6[$.

- Note-se que, a propriedade anterior não relaciona directamente a **convergência uniforme** com o **domínio de convergência**.

- A propriedade seguinte, garante-nos que uma série de potências de raio de convergência não nulo é **uniformemente convergente** em todo o seu **domínio de convergência**.

- **O Teorema de Abel.**

Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *uma série de potências centrada na origem de raio de convergência* $R>0$.

Então verificam-se as condições seguintes:

i) se a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *converge em* $x = R$, *então ela converge uniformemente no intervalo* $[0,R]$ *e tem-se que*

$$\boxed{\lim_{x\to R^-}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n}$$

ii) se a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *converge em* $x = -R$, *então ela converge uniformemente no intervalo* $[-R,0]$ *e tem-se que*

$$\boxed{\lim_{x\to -R^+}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-R)^n}$$

- Generalizando,

- *Seja* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$ *uma série de potências centrada em* $c \neq 0$, *com raio de convergência* $R > 0$.

Então verificam-se as condições seguintes,

i) *Se a série* **converge** *em* $x = R + c$,

então ela **converge uniformemente** *no intervalo* $[\, c \,,\, R + c \,]$ *e tem-se,*

$$\lim_{x \to (R+c)^-} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (R+c-c)^n$$

ii) *Se a série* **converge** *em* $x = -R + c$,

então ela **converge uniformemente** *no intervalo* $[\, -R + c \,,\, c \,]$ *e tem-se,*

$$\lim_{x \to (-R+c)^+} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-R+c-c)^n$$

- Por exemplo a série, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^4+16} (2x-1)^n$

é então **uniformemente convergente** em todo o seu **domínio de convergência** $[0,\ 1]$.

- e por exemplo a série, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\ 10^n} (x+4)^n$

é **uniformemente convergente** no **domínio de convergência** $]-14,\ 6\,]$

⁕ Derivação e primitivação de séries de potências

- *Seja* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *uma série de potências de raio de convergência* $R \neq 0$.

  Então as séries de potências

  $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ *e* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ *têm raio de convergência* R.

- Generalizando,

- *Seja* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$ *uma série de potências centrada em* $x = c$, *com raio de convergência* $R > 0$.

  Então a ***série das derivadas***, $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x-c)^{n-1}$

  e a ***série das primitivas***, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-c)^{n+1}$

  têm também raio de convergência R.

- Como consequência, tanto a **série das derivadas** como a **série das primitivas**, **convergem uniformemente** em qualquer **sub-intervalo** fechado e limitado do seu **intervalo de convergência** que é $]-R+c, R+c[$.

- E com base neste facto, a proposição seguinte garante-nos que efectivamente podemos **derivar e integrar séries de potências termo a termo**.

- *Seja* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$ *uma série de potências centrada em x = c.*

Então verificam-se as condições seguintes,

i) *a série de potências* ***define uma função contínua*** *em todo o intervalo fechado contido no seu intervalo de convergência.*

ii) *a série de potências* ***pode integrar-se termo a termo*** *em todo o intervalo fechado contido no seu intervalo de convergência.*

iii) *a série de potências* ***pode derivar-se termo a termo*** *em todo o intervalo fechado contido no seu intervalo de convergência.*

- **Conjugando** o primeiro destes resultados com o **Teorema de Abel**, pode provar-se que a **continuidade** se verifica em todo o **domínio de convergência**.

- *Seja* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$ *uma série de potências centrada em x = c,*

  com raio de convergência não nulo,

e seja f(x) a sua ***soma****,*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$$

Então,

a) *a* ***soma da série*** *de potências é uma* ***função contínua*** *no* ***domínio de convergência*** *da série considerada.*

- Por exemplo a **função soma** da série, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^4+16}(2x-1)^n$ **é contínua** em todo o seu **domínio de convergência** $[0, 1]$.

- e por exemplo a **função soma** da série, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\,10^n}(x+4)^n$ **é contínua** em todo o seu **domínio de convergência** $]-14, 6]$

- *Seja* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ *uma série de potências centrada em* $x = c$*.* *com raio de convergência não nulo.*

  Seja I *o seu* ***intervalo de convergência***

  e seja $f(x)$ *a sua* ***soma****,*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$$

Então,

> *b)* *a* ***função soma da série*** *é* ***diferenciável*** *em* I
>
> *e para todo o* $x \in I$ *temos,*
>
> $$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n(x-c)^{n-1}$$

- Por **aplicações sucessivas** do mesmo resultado, temos também para todo *o* $x \in I$ e todo $k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-c)^{n-k}$$

c) *a função* $F(x)$ *definida por,*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}$$

é a ***primitiva*** *de* $f(x)$ *em* ***I*** *tal que* $F(c) = 0$.

d) *a função* $f(x)$ *é* ***integrável*** *em todo o intervalo* $[a, b]$ *contido no seu domínio de convergência e tem-se,*

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n\right) dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b (a_n(x-c)^n)\,dx\end{aligned}$$

- donde podemos calcular,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \left.\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}\right]_a^b \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{a_n}{n+1}(b-c)^{n+1} - \frac{a_n}{n+1}(a-c)^{n+1}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{a_n}{n+1}((b-c)^{n+1} - (a-c)^{n+1})\right).\end{aligned}$$

- Recordemos a série de funções,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

- A série é apenas **pontualmente convergente** no intervalo $]-1,\ 1[$, mas é **uniformemente convergente** em qualquer **intervalo fechado** de $]-1,\ 1[$.

- sendo uma série geométrica, a sua **função soma** é dada por,

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

- e sendo $]-1,\ 1[$ o **intervalo de convergência** então, pela **propriedade das derivadas**, temos para todo o $x \in\ ]-1,\ 1[$,

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \boxed{\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n}$$

- Por outro lado, a função $F(x) = -\ln(1-x)$

  é a **primitiva** de $f(x)$ que se anula em $x = 0$.

- Então, pela **propriedade dos integrais**, temos para todo o $x \in\ ]-1,\ 1[$,

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

- ou seja,

$$\boxed{\ln\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n}$$

- Assim, no intervalo] *−1, 1*[, as três funções seguintes são **representáveis por séries de potências**,

$$\textbf{(1)} \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$\textbf{(2)} \quad -\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

$$\textbf{(3)} \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$$

- A partir destas, por ou integrações, **outras representações por séries de potências** podem ser construídas.

- Como por exemplo,

$$\text{a)}\ \ f(x) = \frac{1}{1+2x}$$

$$\text{b)}\ \ f(x) = \ln(1+2x)$$

$$\text{c)}\ \ f(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+2x}$

- Podemos utilizar a série **(1)**, **substituindo** *x* por *−2x*,

$$\frac{1}{1+2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, 2^n x^n$$

$$= 1 - 2x + 2^2x^2 - 2^3x^3 + \cdots$$

- Não esquecendo de ajustar o **intervalo de convergência**, que passará a ser] *−1/2, 1/2*[.

- **Ou** podemos verificar directamente que se trata da fórmula da **soma de uma série geométrica**, com **primeiro termo** *1* e **razão** $r = -2x$.

- Naturalmente, a série geométrica será convergente apenas para os valores de $|-2x| < 1$, donde calculamos o **intervalo de convergência** $]-1/2, 1/2[$.

b) $f(x) = \ln(1+2x)$

- Uma possível solução consiste em notar que,

$$(\ \ln(1+2x)\ )' = \frac{2}{1+2x}$$

- e então, ou multiplicando por *2* a representação obtida em **a)**, ou notando que se trata de da **soma de uma série geométrica**, com **primeiro termo** *2* e **razão** $r = -2x$, obtemos,

$$\begin{aligned}\frac{2}{1+2x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, 2^{n+1} x^n \\ &= 2 - 2^2 x + 2^3 x^2 - 2^4 x^3 + \cdots\end{aligned}$$

cujo **intervalo de convergência** é $]-1/2, 1/2[$.

- Por outro lado, a função $F(x) = \ln(1+2x)$

é a **primitiva** de $f(x) = \dfrac{2}{1+2x}$ que se **anula** em $x = 0$.

- Resta então **integrar cada termo**, $(-1)^n\, 2^{n+1} x^n$

- E, pela **propriedade dos integrais**, temos para todo o **intervalo de convergência**]*–1/2, 1/2*[,

$$\ln(1+2x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, 2^{n+1}\, \frac{x^{n+1}}{n+1}$$
$$= 2x - 2^2\,\frac{x^2}{2} + 2^3\,\frac{x^3}{3} - \cdots$$

c) $f(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$

- Uma possível solução consiste em notar que,

$$\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2}{(1-x)^3}$$

- Mas já sabemos de **(3)** que,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$$

- Então, **derivando a termo** esta série e sendo]*–1, 1*[o **intervalo de convergência**
- temos, pela **propriedade das derivadas** para todo o $x \in\ ]-1,\ 1[$,

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$$

$$= 2 + 2\times 3\ x + 3\times 4\ x^2 + \cdots$$

- A partir da representação, $-\ln(1-x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$
  que é válida para todo o $x \in \,]-1,\ 1[$,
  procuremos agora uma **representação em série de potências** para,
  $$f(x)=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$
  com indicação do **maior intervalo aberto no qual é válida**.

  - Comecemos por calcular,
  $$\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\ln(1-x)-\ln(1+x)$$

  - Então, por um lado sabemos que para todo o $x \in \,]-1,\ 1[$,
  $$\ln(1-x)=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

  - e por outro lado verificamos que para todo o $-x \in \,]-1,\ 1[$,
  $$\ln(1+x)=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^{n+1}}{n+1}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}x^{n+1}$$
  ou seja, para todo o $x \in \,]-1,\ 1[$.

  - Resta então **subtrair**,
  $$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) &= \ln(1-x)-\ln(1+x)\\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}x^{n+1}\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1+(-1)^{n+1}}{n+1} x^{n+1}$$

- Esta expressão pode ser **simplificada** pois,

  para n par, $-1+(-1)^{n+1} = -1-1 = -2$

  para n ímpar, $-1+(-1)^{n+1} = -1+1 = 0$

  ou seja, **anulam-se** todos os termos para os quais n é ímpar (ou $n+1$ par)

- Deste modo obtemos a **representação em série de potências**,

$$\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-2}{2n+1} x^{2n+1}$$

  que é **válida para o intervalo** $]-1, 1[$.

- Pode também ocorrer o **problema inverso**, isto é, dada uma representação em série de potências **calcular a função soma**.

- Por exemplo, a partir da representação $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

  que é válida para todo o $x \in]-1, 1[$.

  calcular a **função soma** da série $\sum_{n=1}^{+\infty} n \dfrac{x^n}{2^n}$

  indicando o **maior intervalo** em que essa representação é válida.

- Partindo de, $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

  e **substituindo** *x* por *x/2* obtemos, $\dfrac{1}{1-\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{x}{2}\right)^n$

  ou seja, $\dfrac{2}{2-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{2^n}$

- E se a expressão inicial era válida para todo o $x \in \,]-1,\ 1[$,

  esta é válida para $x/2 \in \,]-1,\ 1[$, ou seja, para todo o $x \in \,]-2,\ 2[$.

- Para relacionar esta com a série pretendida $\sum_{n=1}^{+\infty} n\dfrac{x^n}{2^n}$

  basta notar que $(x^n)' = n\,x^{n-1}$.

- Assim, pela **propriedade das derivadas** das séries de potências temos,

$$\left(\frac{2}{2-x}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{x^{n-1}}{2^n}$$

ou seja,

$$\frac{2}{(2-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{x^{n-1}}{2^n}$$

para todo o $x \in \,]-2,\ 2[$.

- E **multiplicando** ambos os membros por *x*, temos a **soma** pretendida,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{x^n}{2^n} = x\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{x^{n-1}}{2^n} = \frac{2x}{(2-x)^2}$$

que é **válida** para todo o $x \in \,]-2,\ 2[$.