

Capítulo 4 – Sucessões e Séries de Funções

* Sucessões de funções

- Para um conjunto $\mathcal{F}(D)$ de funções definidas num domínio não vazio $D \subset \mathbb{R}$, uma **sucessão de funções** é uma aplicação,

$$\begin{array}{ccc} (f_n) : & \mathbb{N} & \longrightarrow \mathcal{F}(D) \\ & n & \longmapsto f_n \end{array}$$

onde, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{ccc} f_n : & D & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto f_n(x) \end{array}$$

- Por exemplo, no intervalo $[0, 1]$ podemos definir a **sucessão de funções** (f_n) , para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{ccc} f_n : & [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto f_n(x) = x^n \end{array}$$

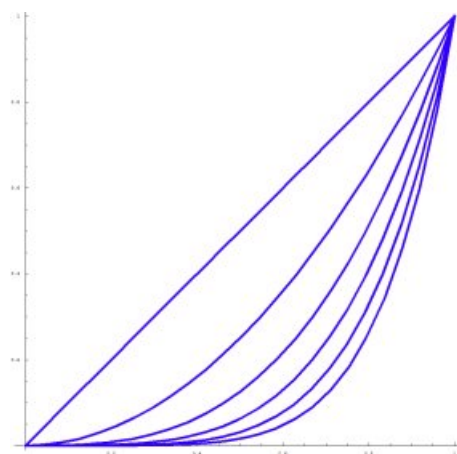
$$f_1 = x$$

$$f_2 = x^2$$

$$f_3 = x^3$$

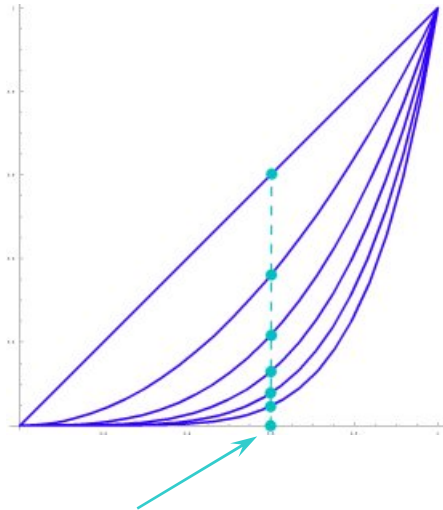
$$f_4 = x^4$$

...



* Convergência pontual de uma sucessão de funções

- A **cada ponto** $x \in D$ corresponde uma **sucessão numérica** $(f_n(x))$,



- Se para **um ponto** $x \in D$ a correspondente sucessão $(f_n(x))$ for **convergente para** $f(x)$, podemos definir a função,

$$\begin{aligned} f: D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \end{aligned}$$

- Quando, para **todos os pontos** $x \in D$ se verifica que,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

dizemos que a **sucessão de funções** (f_n) **converge pontualmente** para a função f e escrevemos,

$$f_n \xrightarrow{p} f$$

- A função $f(x)$ é o **limite pontual** da sucessão de funções $(f_n(x))$ no domínio D .

- Para o exemplo anterior,

$$\begin{aligned} f_n : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_n(x) = x^n \end{aligned}$$

se $0 \leq x < 1$ temos,

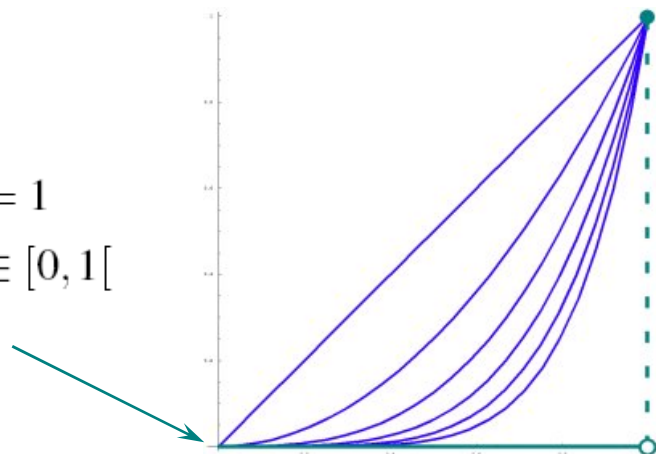
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$$

mas se $x = 1$ temos,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1^n = 1$$

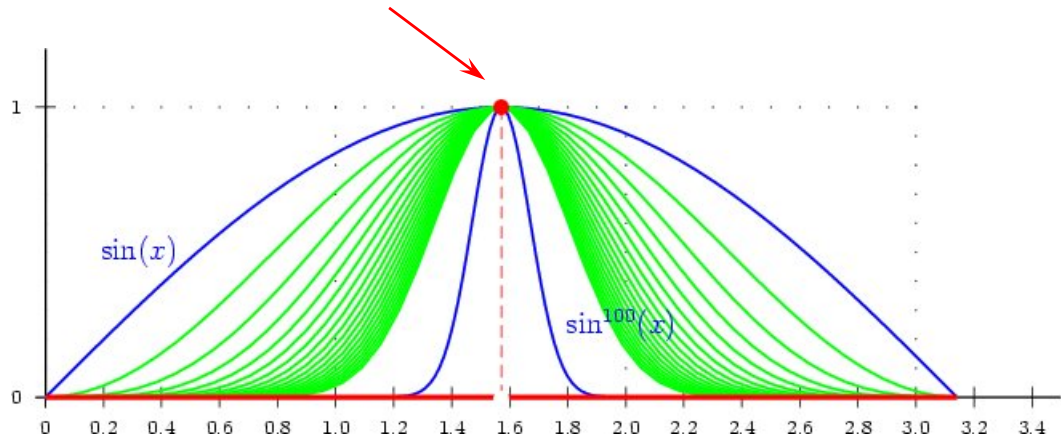
- Portanto, esta sucessão de funções **converge pontualmente** para a função,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } x \in [0, 1[\end{cases}$$



- Assim, a sucessão (x^n) de **funções contínuas** em **todo o domínio** $[0, 1]$ **converge pontualmente** para uma função $f(x)$ que **não é contínua** no ponto 1 .
- Verificamos também que, sendo **todas as funções** da sucessão (x^n) **diferenciáveis** em **todo o domínio** $[0, 1]$, a **função limite pontual** $f(x)$ **não é diferenciável** no ponto $x = 1$.

- O mesmo se passa, por exemplo, com a sucessão $(\sin^n(x))_{n \geq 1}$ de **funções contínuas** em $[0, \pi]$, que **converge pontualmente** para uma **função que é descontínua** em $x = \pi/2$.



- De um modo geral, a **convergência pontual** de uma **sucessão de funções contínuas não garante** que a **função limite pontual** seja também **contínua**.

➡ **Quatro questões para as quais a convergência pontual não garante resposta afirmativa:**

1. Seja $a \in \mathbb{R}$ um **ponto de acumulação** de D .

Se para cada $n \in \mathbb{N}$, o **limite** $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$ **existir e for finito**,

então será que também **existe e é finito o limite** $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$?

E nesse caso, será que,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) ?$$

2. Se para cada $n \in \mathbb{N}$ a função f_n for **contínua** em $x_0 \in \mathbb{R}$,
será que a **função limite** f também é **contínua** em x_0 ?
3. Se para cada $n \in \mathbb{N}$ a função f_n for **diferenciável** em $x_0 \in \mathbb{R}$,
será que a **função limite** f também é **diferenciável** em x_0 ?

E nesse caso, será que,

$$f'(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x_0)?$$

4. Seja $D = [a, b]$ com $a < b$.
Se para cada $n \in \mathbb{N}$ a função f_n for **integrável** em $[a, b]$,
será que a **função limite** f também é **integrável** em $[a, b]$?

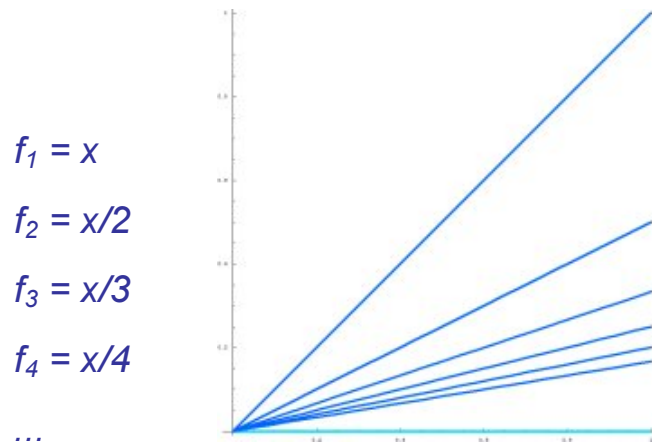
E nesse caso, será que,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right) ?$$

- Já vimos que a **convergência pontual** é uma noção “**demasiado fraca**” para garantir resposta afirmativa, para todos os casos, a estas quatro questões.
- Para isso é necessária a noção **de convergência uniforme**.
- Vejamos mais alguns exemplos...

- No intervalo $[0, 1]$ consideremos a **sucessão de funções** (f_n) onde, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{x}{n}$$



- Como $0 \leq x \leq 1$, temos para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n}$$

- então, pelo teorema da sucessões enquadadas,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$$

para todo o $x \in [0, 1]$

- Portanto, o **limite pontual** é a função $f(x) = 0$ em $[0, 1]$.
- Neste caso, tanto as funções da sucessão $(f_n(x) = x/n)$ como a função limite $f(x) = 0$ são **diferenciáveis** em todo o domínio.

Além disso, a **sucessão das derivadas** $(f'_n(x) = 1/n)$ **converge pontualmente** para a função $f(x) = 0$ em todo o $[0, 1]$, ou seja,

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x)$$

- No intervalo $[0, 1]$ consideremos a **sucessão de funções** (f_n) ,

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n}$$

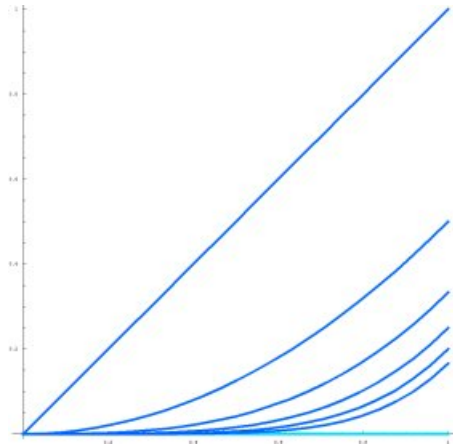
$$f_1 = x$$

$$f_2 = x^2/2$$

$$f_3 = x^3/3$$

$$f_4 = x^4/4$$

...



- Como $0 \leq x \leq 1$, temos para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \frac{x^n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

- então, pelo teorema da sucessões enquadadas,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n} = 0$$

para todo o $x \in [0, 1]$

- Portanto, o **limite pontual** é a função $f(x) = 0$ em $[0, 1]$.
- Neste caso, tanto as funções da sucessão $(f_n(x) = x^n/n)$ como a função limite $f(x) = 0$ são **diferenciáveis** em todo o domínio.

Contudo, a **sucessão das derivadas** $(f'_n(x) = x^{n-1})$ **converge pontualmente** em $[0, 1]$ para a função,

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } x \in [0, 1[\end{cases}$$

Assim, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(1) = F(1) = 1$ mas $f'(1) = 0$

ou seja, $f'(1) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(1)$

- Portanto, a desejada **propriedade** $f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x)$

não se verifica num ponto do intervalo $[0, 1]$.

- Segundo a noção de limite, no caso da convergência pontual, a função $f(x)$ é o **limite pontual** de uma sucessão de funções $(f_n(x))$, sse,
 $\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq p$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

- ou seja, o valor de p a partir do qual $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, depende de ε , mas também **depende do ponto** x escolhido.
- No caso da **convergência uniforme**, o valor de p depende apenas de ε , e **não depende do ponto** x escolhido.

* Convergência uniforme de uma sucessão de funções

- Para um domínio real D , dizemos que uma **sucessão de funções** (f_n) **converge uniformemente** para uma função f e escrevemos,

$$f_n \xrightarrow{u} f$$

se, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que,

para todo o $n \in \mathbb{N}$ se $n \geq p$, então, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

para todo o $x \in D$.

- Consequentemente,

convergência uniforme $\implies$ convergência pontual

- Retomemos a **sucessão de funções** (f_n) definidas em $[0, 1]$,

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n}$$

- Já sabemos que **converge pontualmente** para $f(x) = 0$ em $[0, 1]$.

Será que a convergência também é **uniforme**?

- Para $\varepsilon > 0$ qualquer, vejamos se **existe** um $p \in \mathbb{N}$ tal que,

para todo o $n \in \mathbb{N}$ se $n \geq p$, então,

$$|f_n(x) - 0| < \varepsilon \iff \left| \frac{x^n}{n} \right| < \varepsilon$$

para todo o $x \in [0, 1]$.

- Ora **para todo** o $0 \leq x \leq 1$ verificamos que,

$$\left| \frac{x^n}{n} \right| = \frac{|x|^n}{n} = \frac{x^n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

- basta então tomar um valor $p > 1/\varepsilon$,
e para todo o $n \geq p$, teremos,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - 0| &= \left| \frac{x^n}{n} \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \\ &\leq \frac{1}{p} < \varepsilon \end{aligned}$$

para todo o $x \in [0, 1]$.

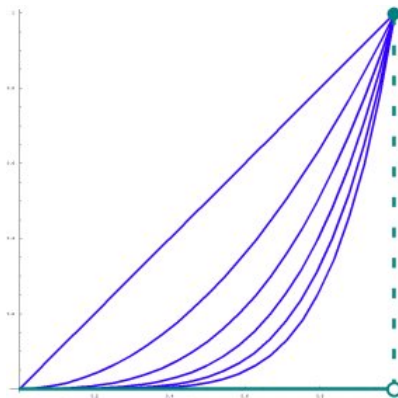
- Deste modo, provámos que a sucessão de funções **converge uniformemente** para $f(x) = 0$ em $[0, 1]$.
- Recordemos que:
 - Uma das propriedades desejáveis era:
Função limite **diferenciável** em todo o domínio, sendo a sua derivada igual ao limite das derivadas,
 - A sucessão de funções $(f_n = x^n/n)$, apesar de convergir uniformemente, não verifica esta propriedade.
 - Portanto, **mesmo a convergência uniforme não garante** que a derivada do limite seja igual ao limite das derivadas.

- Para provar que uma sucessão de funções (f_n) **não converge uniformemente** para uma função f basta provar que,

existe um $\varepsilon > 0$ tal que, para todo o $p \in \mathbb{N}$,

existem $n \in \mathbb{N}$ e $x_0 \in D$ tais que, $n \geq p$ e $|f_n(x_0) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

- Retomemos a sucessão de funções $(f_n = x^n)$, definidas no intervalo $[0, 1]$



- Já vimos que **converge pontualmente** para a função,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } x \in [0, 1[\end{cases}$$

Provemos que esta **convergência não é uniforme**.

- Para isso, **procuremos um** $\varepsilon > 0$ tal que, para todo o $p \in \mathbb{N}$,

existem $n \in \mathbb{N}$ e $x_0 \in [0, 1]$ tais que, $n \geq p$ e $|f_n(x_0) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

- Vemos que, em todo o domínio $[0, 1]$,

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = |x^n| = x^n$$

- Se fizermos $\varepsilon = \frac{1}{2}$ então, para todo o $n \in \mathbb{N}$ e todo o $x \in [0, 1[$,

$$|x^n| \geq \frac{1}{2} \iff \left(x \geq \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \wedge x \in [0, 1[\right)$$

- E então, para os valores $\varepsilon = \frac{1}{2}$ e $x_0 = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ temos que,

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| = |(x_0)^n| = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}} \right)^n = \frac{1}{2}$$

- Ou seja,

encontrámos um $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ tal que, para todo o $p \in \mathbb{N}$,
existe um $n = p$ e **existe um** $x_0 \in [0, 1]$, $x_0 = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$
 tais que, $n \geq p$ e $|f_n(x_0) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

- No caso da sucessão de funções $(f_n = x/n)$ definidas em $\mathbb{R}$
- Para verificar que a convergência para $f(x) = 0$ é **apenas pontual** e **não uniforme**,

Basta tomar $\varepsilon = 1$ e, para todo o $p \in \mathbb{N}$, tomar $n = p$ e $x_0 = p$.

E para esses valores,

$$|f_n(x_0) - 0| = \left| \frac{x_0}{p} \right| = \left| \frac{p}{p} \right| = 1$$

* Uma condição necessária e suficiente de convergência uniforme

- Sejam $D \subset \mathbb{R}$ um conjunto, (f_n) uma sucessão de funções definidas em D e $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.

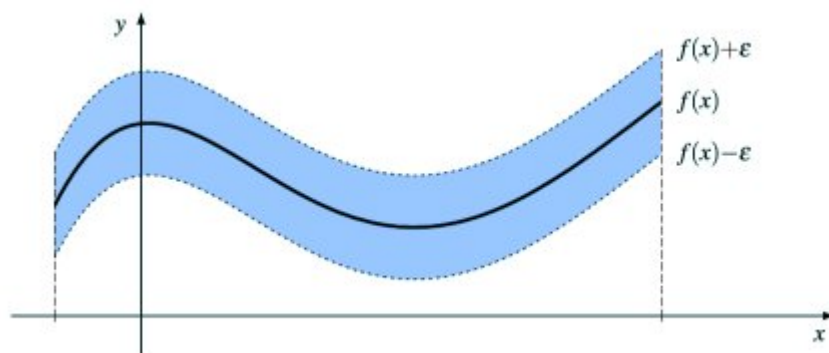
As condições seguintes são equivalentes:

i) $f_n \xrightarrow{u} f$

- ii) para todo o $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, se $n \geq p$, então

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in D\} < \varepsilon$$

- Tratando-se uma condição necessária e suficiente, ambas as noções podem ser usadas como **definição de convergência uniforme**.
- Em termos geométricos as duas noções significam que, para qualquer $\varepsilon > 0$, a partir de certa ordem $n \geq p$, a **distância** entre cada função $f_{n \geq p}(x)$ e a função limite $f(x)$ é **inferior** a ε , ao longo de **todo os valores** de $x \in D$.



* Outra condição necessária e suficiente de convergência uniforme

- Trata-se duma consequência imediata da condição anterior.

Dizer que, a partir de certa ordem,

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in D\} < \varepsilon$$

significa que a **sucessão dos supremos** das distâncias é um **infinitésimo**.

- Portanto, são também equivalentes,

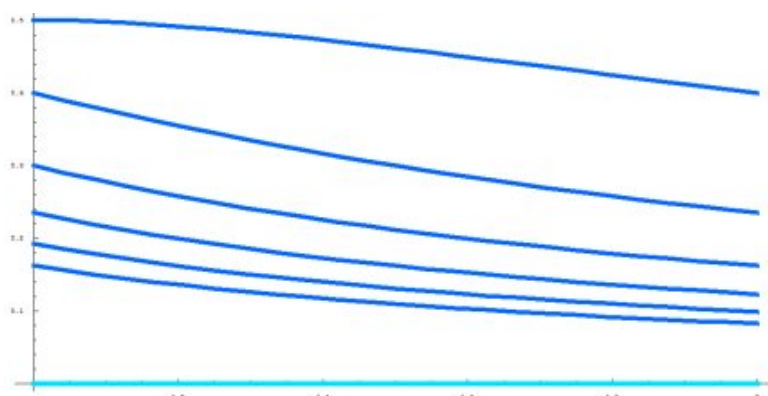
a) $f_n \xrightarrow{u} f$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in D\} \right) = 0$

- No intervalo $[1, 2]$ consideremos a **sucessão de funções** (f_n) onde, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}$$

- A sucessão **converge pontualmente** em $[1, 2]$ para a **função nula**.



- Utilizemos a condição anterior para provar que **a convergência é uniforme**.
- Para todo o $n \in \mathbb{N}$ e todo o $x \in [1, 2]$,

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{nx}{1 + n^2x^2} \right| = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$$

- Procuremos um **supremo** deste valor.

Como,

$$n^2x^2 + 1 \geq n^2x^2 > 0$$

então,

$$\frac{1}{1 + n^2x^2} \leq \frac{1}{n^2x^2}$$

e como n e x são positivos,

$$\frac{nx}{1 + n^2x^2} \leq \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx}$$

e porque $x \in [1, 2]$,

$$\frac{1}{nx} \leq \frac{1}{n}$$

Portanto, para **todo o** $n \in \mathbb{N}$ e **todo o** $x \in [1, 2]$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$$

ou seja,

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in [1, 2]\} \leq \frac{1}{n}$$

- E como $|f_n(x) - f(x)| \geq 0$, temos para todo o $n \in \mathbb{N}$ e todo o $x \in [1, 2]$,

$$0 \leq \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in [1, 2]\} \leq \frac{1}{n}$$

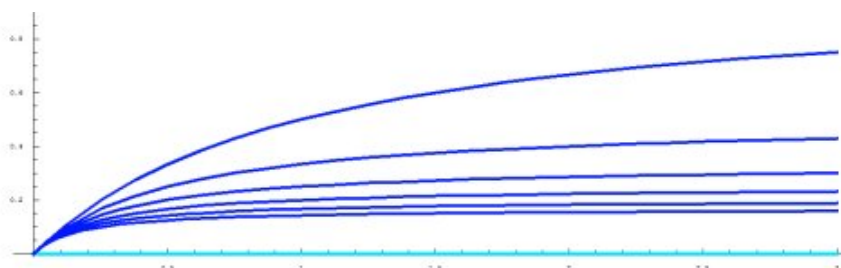
- Onde podemos concluir, pelo teorema das sucessões encaixadas,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup \{ |f_n(x) - f(x)|, x \in [1, 2] \} \right) = 0$$

- E portanto, a condição anterior garante que **a convergência é uniforme**.

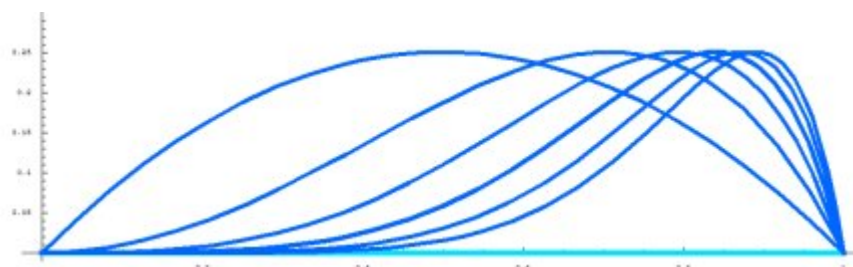
- Considere a **sucessão de funções** (f_n) definidas em $\mathbb{R}^+_0$,

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx}$$



- Mostre que **converge uniformemente** para a função $f(x) = 0$.
- Considere a **sucessão de funções** (f_n) definidas em $[0, 1]$,

$$f_n(x) = x^n(1 - x^n)$$



- Mostre que **converge pontualmente** mas **não uniformemente** para a função $f(x) = 0$.

* Séries de funções

- Para uma dada sucessão (f_n) de funções definidas em $D \subset \mathbb{R}$, podemos definir **série de funções** de termo geral f_n ,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$$

como o par ordenado $((f_n), (S_n))$ de sucessões de funções, onde,

(S_n) é a **sucessão das somas parciais**, calculadas para cada $n \in \mathbb{N}$ por,

$$s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n = \sum_{k=1}^n f_k$$

- Se existe o **limite** (pontual ou uniforme) da **sucessão** (S_n) , dizemos que **a série é convergente** e a esse limite chamamos **soma da série**,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n = f$$

- Uma série **converge pontualmente** em D quando a sucessão (S_n) converge pontualmente em D .
- Uma série **converge uniformemente** em D quando a sucessão (S_n) converge uniformemente em D .
- Tal como nas séries numéricas, a natureza de uma série de funções **não depende dos seus primeiros termos**.

➡ **Quatro questões para as quais a convergência pontual de séries não garante resposta afirmativa:**

1. Seja $a \in \mathbb{R}$ um **ponto de acumulação** de D .

Se para cada $n \in \mathbb{N}$, o **limite** $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$ **existir e for finito**,

então será que também **existe e é finito o limite da soma** $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$?

E nesse caso, será que,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) ?$$

2. Se para cada $n \in \mathbb{N}$ a função f_n for **contínua** em $x_0 \in D$,

será que a **função soma** f também é **contínua** em x_0 ?

3. Se para cada $n \in \mathbb{N}$ a função f_n for **diferenciável** em $x_0 \in D$,

será que a **função soma** f também é **diferenciável** em x_0 ?

E nesse caso, será que,

$$f'(x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x_0) ?$$

4. Seja $D = [a, b]$ com $a < b$.

Se para cada $n \in \mathbb{N}$ a função f_n for **integrável** em $[a, b]$,

será que a **função soma** f também é **integrável** em $[a, b]$?

E nesse caso, será que,

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right) ?$$

- Se uma série **converge pontualmente** em D para uma função f isso significa que, **para cada concretização** $x_0 \in D$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(x_0) = f(x_0)$$

ou seja,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

Portanto, a **convergência pontual de uma série** é equivalente à **convergência de todas as séries numéricas** correspondentes a cada concretização $x_0 \in D$.

- Analisemos a série de funções, definidas em $\mathbb{R}$,

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

- Para $x = 0$ a série tem soma 1.
- Para $x \neq 0$ é uma série geométrica de razão x , pelo que:
para $|x| \geq 1$ é divergente e
para $|x| < 1$ é convergente e tem soma $= 1 / (1 - x)$
- Portanto, **apenas para os valores** $-1 < x < 1$ a série de funções **converge pontualmente** para a função,

$$\begin{aligned} f:]-1, 1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

- e **apenas nesse intervalo**,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

- Chama-se **domínio de convergência** de uma série de funções, $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ ao **conjunto de pontos** $x \in D$ para os quais é **convergente** a correspondente **série numérica**, $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$

- Consideremos a série de funções, definidas em $\mathbb{R}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-nx}$$

- Calculando o limite do termo geral,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n e^{-nx}) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x \leq 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

vemos que só existe a **possibilidade** de ser convergente para $x > 0$.

- Para $x > 0$, aplicando o critério de Cauchy,

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|n e^{-nx}|} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n e^{-nx}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{-x} \sqrt[n]{n}) \\ &= e^{-x}. \end{aligned}$$

e a série será absolutamente convergente quando $0 \leq L < 1$,

ou seja,

$$|e^{-x}| < 1 \iff e^x > 1 \iff x > 0$$

- Portanto o **domínio de convergência** da série dada é $\mathbb{R}^+$.

- Consideremos a série de funções, definidas em $\mathbb{R}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \operatorname{sen} \frac{x}{3^n}$$

- Procuremos majorar o termo geral, para todo o $x \in \mathbb{R}$ e todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \left| 2^n \operatorname{sen} \frac{x}{3^n} \right| \leq \left| 2^n \frac{x}{3^n} \right| = |x| \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

- Para todas as concretizações de $x \in \mathbb{R}$, a série,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x| \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

é o produto de um número real por uma série geométrica convergente.

- Então, pelo critério de comparação, é também convergente a série,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| 2^n \operatorname{sen} \frac{x}{3^n} \right|$$

pelo que é absolutamente convergente a série, $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \operatorname{sen} \frac{x}{3^n}$

- Portanto, o **domínio de convergência** da série dada é todo o $\mathbb{R}$.
- Note-se que estudámos apenas a **convergência pontual** desta série.
- O critério de Weierstrass estabelece uma **condição suficiente** para testar a **convergência uniforme** de uma série de funções.

Como **não é uma condição necessária**, existem séries de funções uniformemente convergentes que não satisfazem o critério de Weierstrass.

* Critério de Weierstrass

- Sejam $D \subset \mathbb{R}$ e (f_n) uma sucessão de funções definidas em D .

Suponhamos que:

- i) existe uma sucessão (a_n) de números reais não negativos

tal que a série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente;

- ii) para todo o $n \in \mathbb{N}$ e, para todo o $x \in D$, $|f_n(x)| \leq a_n$

Então a série de funções $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente em D .



- Consideremos a série de funções, definidas em $\mathbb{R}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{n^2}$$

- Para aplicar o critério de Weierstrass, procuremos **majorar** o módulo do termo geral, pelo termo geral de uma **série numérica** de **termos não negativos** que seja **convergente**.

Neste caso é fácil pois, para todo o $x \in \mathbb{R}$ e todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{\text{sen}(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

- E sendo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ uma série numérica convergente de termos não

negativos, o critério de Weierstrass garante que a série dada é **uniformemente convergente** em todo o seu domínio $\mathbb{R}$.

- Consideremos a série de funções, definidas em $[0, +\infty[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(x+2)^n}$$

- Para todo o $x \geq 0$ e todo o $n \in \mathbb{N}$ podemos **majorar**,

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n(x+2)^n} \right| \leq \frac{1}{n2^n}$$

- Verifique que a correspondente **série numérica majorante**, de termos não negativos, é **convergente**.
- Então, o critério de Weierstrass garante a **convergência uniforme** da série dada em todo o seu domínio $[0, +\infty[$.

- Consideremos a série de funções, definidas em $\mathbb{R}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 4 + x^4}$$

- Para todo o $x \in \mathbb{R}$ e todo o $n \in \mathbb{N}$ podemos **majorar**,

$$\left| \frac{1}{4n^2 + x^4} \right| \leq \frac{1}{4n^2}$$

- E como a **série numérica majorante** é **convergente**, o critério de Weierstrass garante a **convergência uniforme** da série dada em todo o seu domínio $\mathbb{R}$.

- Veremos agora como a **noção de convergência uniforme**, tanto para **sucessões** como para **séries**, garante resposta afirmativa a algumas das **questões** que têm vindo a ser colocadas.

* Propriedades da Convergência Uniforme

➡ Propriedade dos limites para sucessões de funções

- Sejam $D \subset \mathbb{R}$ um conjunto, a um ponto de acumulação de D ,

e (f_n) uma sucessão de funções definidas em D .

Se a sucessão (f_n) converge uniformemente para a função

$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, o

limite $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$ existe e é finito,

então verificam-se as condições seguintes:

i) o limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$ existe e é finito;

ii) vale a igualdade

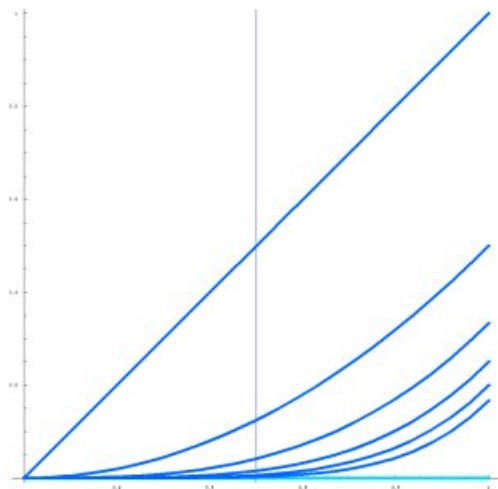
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right)$$

- Por exemplo, a **sucessão de funções** (f_n) definidas em $[0, 1]$,

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n}$$

- Já sabemos que **converge uniformemente** para $f(x) = 0$ em $[0, 1]$.

- Consideremos o ponto de acumulação $x = 1/2$,



- Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe e é finito o limite,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f_n(x) = \frac{1}{n 2^n}$$

- Então, também existe e é finito o limite,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n 2^n} \right)$$

- e o seu valor é igual ao do limite,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(x)) \right) = 0$$

- Como consequência imediata desta propriedade dos limites de uma **sucessão uniformemente convergente** de funções, resulta uma propriedade análoga para uma **série uniformemente convergente** de funções.

► Propriedade dos limites para séries de funções

- Sejam $D \subset \mathbb{R}$ um conjunto, a um ponto de acumulação de D

e $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ uma série de funções definidas em D .

Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente em D para a função

$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, o limite $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$ existe e é finito,

então verificam-se as condições seguintes:

i) a série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$ é convergente;

ii) vale a igualdade

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right)$$

- Ou seja, numa série uniformemente convergente a soma dos limites é igual ao limite das somas.
- Por exemplo, se soubermos que é **uniformemente convergente** em todo o $\mathbb{R}$ e conhecermos a **soma** da série de funções,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = e^x$$

- Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe e é finito o limite,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{n!}$$

- Então, ficamos a saber que é convergente a série numérica,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

- e ficamos também a conhecer o valor da sua soma,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{x \rightarrow 1} e^x = e$$

➡ Propriedade da continuidade para sucessões de funções

- Sejam $D \subset \mathbb{R}$ um conjunto e

(f_n) uma sucessão de funções definidas em D .

Se a sucessão (f_n) converge uniformemente em D para a função

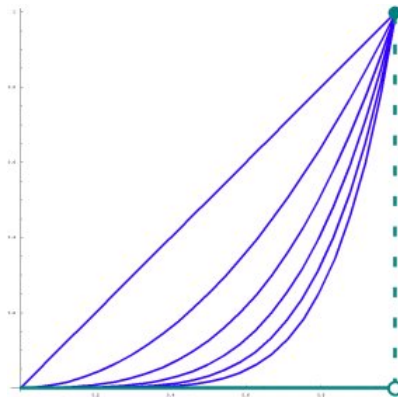
$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ e, para cada

$n \in \mathbb{N}$, a função f_n é contínua em $x_0 \in D$,

então a função f é também contínua em x_0 .

- Ou seja, o **limite uniforme** de uma sucessão de **funções contínuas** num ponto é uma **função contínua** nesse ponto.

- Recordemos a sucessão de funções $(f_n = x^n)$ definidas no intervalo $[0, 1]$, que vimos ser **convergente**.



- Como a função limite é **descontínua** no ponto $x_0 = 1 \in [0, 1]$, podemos imediatamente concluir que a **convergência não é uniforme**.
- Como consequência desta propriedade, resulta que a **função soma** de uma série **uniformemente convergente** de **funções contínuas** num ponto é também uma **função contínua** nesse ponto.

➡ Propriedade da continuidade para séries de funções

- Sejam $D \subset \mathbb{R}$ um conjunto e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \text{ uma série de funções definidas em } D.$$

Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente em D para a função

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R} \text{ e, para cada}$$

$n \in \mathbb{N}$, a função f_n é contínua em $x_0 \in D$,

então a função f é também contínua em x_0 .

- Por exemplo, se soubermos que é **uniformemente convergente** em todo o $\mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

- Como cada uma das funções,

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$$

é **contínua** no ponto $x_0 = 1$,

- Ficamos a saber que também e^x é **contínua** no ponto $x_0 = 1$.

- Consideremos a série de funções, definidas em $\mathbb{R}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{x^4 + n^4}$$

- Para todo o $x \in \mathbb{R}$ e todo o $n \in \mathbb{N}$ podemos **majorar**,

$$\left| \frac{\text{sen}(nx)}{x^4 + n^4} \right| \leq \frac{1}{x^4 + n^4} \leq \frac{1}{n^4}$$

- Verificamos que é convergente a série de termos não negativos, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$

- Então, pelo critério de Weierstrass, a série é **uniformemente convergente** em todo o $\mathbb{R}$.

- Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, cada função,

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{x^4 + n^4}$$

é **contínua** para todo o $\mathbb{R}$.

- Então, a propriedade anterior garante que a **função soma**,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{x^4 + n^4}$$

é também **contínua** para todo o $\mathbb{R}$.

- Quando a **função soma de funções contínuas** num ponto **não for uma função contínua** nesse ponto, ficamos imediatamente a saber que a convergência da série **não é uniforme**.

➡ Propriedade dos integrais para sucessões de funções

- Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$
e (f_n) uma sucessão de funções contínuas em $[a, b]$.
Se a sucessão (f_n) converge uniformemente em $[a, b]$
para a função $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$,
então a função f é integrável em $[a, b]$ e tem-se

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right)}$$

- Donde resulta,

➡ Propriedade dos integrais para séries de funções

- Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$

e $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ uma série de funções contínuas em $[a, b]$.

Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente em $[a, b]$

para a função $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$,

então a função f é integrável em $[a, b]$ e tem-se

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right)$$

- Consideremos a série de funções, definidas em $\mathbb{R}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$$

- Para todo o $x \in \mathbb{R}$ e todo o $n \in \mathbb{N}$ podemos **majorar**,

$$\left| \frac{1}{x^2 + n^2} \right| = \frac{1}{x^2 + n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

- E sendo convergente, e de termos não negativos, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

- então, pelo critério de Weierstrass, a série dada é **uniformemente convergente** em todo o $\mathbb{R}$.

- Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$ e por exemplo no **intervalo** $[0, 1]$, é **contínua** cada uma das funções,

$$f_n(x) = \frac{1}{x^2 + n^2}$$

- Então, pela propriedade anterior, é também **contínua** nesse **intervalo** $[0, 1]$ a função **soma da série**,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$$

- e também **integrável** no mesmo **intervalo** $[0, 1]$ e além disso podemos calcular o **integral da soma** como a **soma dos integrais**,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^1 \frac{1}{x^2 + n^2} dx \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left[\frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{x}{n} \right]_0^1 \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

- Retomemos a série de funções,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

- Apenas para **sub-intervalos fechados** de $] -1, 1[$ a série é **uniformemente convergente**, com soma,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}$$

- Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, cada uma das funções $f_n(x) = x^n$ é **contínua**.
- Então pela propriedade anterior, a função **soma da série** é **integrável** em qualquer **sub-intervalo** fechado $[a, b] \subset]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \frac{1}{1-x} dx \\ &= [-\ln(1-x)]_a^b \\ &= \ln(1-a) - \ln(1-b) \end{aligned}$$

- Além disso, o **integral da soma** iguala a **soma dos integrais**,

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{1-x} dx &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b x^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

- ou seja,

$$\ln(1-a) - \ln(1-b) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

- Se fixarmos $a = 0$ e fizermos $b = x$, desde que $x \in]-1, 1[$, podemos ainda concluir que,

$$\ln(1-x) = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \forall -1 < x < 1$$

➡ Propriedade das derivadas para sucessões de funções

- Sejam $D \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto

e (f_n) uma sucessão de funções definidas em D que

converge pontualmente para a função $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$.

Suponhamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

a função f_n é diferenciável em D e a função f'_n é contínua em D .

Se a sucessão (f'_n) é uniformemente convergente em D ,

então a função f é diferenciável em D e, para todo o $x \in D$, temos

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x)$$

ou seja,

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x)$$

- Note que, neste caso é sobre **a sucessão das derivadas** que se exige a **convergência uniforme**.

- Recordemos a sucessão de funções definidas em $[0, 1]$, $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$

- Apesar de a **sucessão das funções convergir uniformemente**, a propriedade das derivadas **não se verifica**, porque a **sucessão das derivadas $(f'_n(x) = x^{n-1})$ converge apenas pontualmente**.

- Desta propriedade resulta,

➡ Propriedade das derivadas para séries de funções

- Sejam $D \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto e

$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ uma série de funções definidas em D que

converge pontualmente em D para a função $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$.

Suponhamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função f_n é diferenciável em D

e a função f'_n é contínua em D .

Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$ é uniformemente convergente em D ,

então a função f é diferenciável em D e

temos, para todo o $x \in D$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$$

- Também aqui, é sobre **a série das derivadas** que se exige a **convergência uniforme**.
- Portanto, se a **série for convergente** (pontualmente ou uniformemente) e todas as funções f_n forem diferenciáveis, com **derivadas contínuas**, só no caso da **série das derivadas convergir uniformemente**, podemos derivar termo a termo, sendo a **derivada da soma igual à soma das derivadas**.

- Consideremos a série de funções, definidas em $\mathbb{R}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \cos(nx)$$

- Verifique que a **série é convergente** em $\mathbb{R}$.
- Para cada $n \in \mathbb{N}$ e para todo o $x \in \mathbb{R}$, **cada função**,

$$f_n(x) = \frac{1}{n^3} \cos(nx)$$

é **diferenciável**, com **derivada contínua**,

$$f'_n(x) = -\frac{1}{n^2} \sin(nx)$$

- Por outro lado, já estudámos a **série das derivadas**,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n^2} \sin(nx)$$

e verificámos que é **uniformemente convergente** em todo o $\mathbb{R}$.

- Então, a propriedade anterior garante-nos que a **função soma é diferenciável** para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \cos(nx)$$

- e que **a derivada da soma é igual à soma das derivadas**,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^3} \cos(nx) \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n^2} \sin(nx)$$

- Admitamos que sabemos que é **uniformemente convergente** em todo o $\mathbb{R}$ a série de funções,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

- Para cada $n \in \mathbb{N}$ e para todo o $x \in \mathbb{R}$, **cada função**,

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$$

é **diferenciável** e tem **derivada contínua**,

$$f'_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

- Será **uniformemente convergente** a **série das derivadas**?
- Ora a **série das derivadas é a própria série dada**, pois a derivada do primeiro termo é nula e,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

- Portanto, a **série das derivadas** é também **uniformemente convergente** e **podemos igualar**,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

- ... o que não é para admirar, pois,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = e^x$$