

* Séries de módulos

- Para uma dada uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ cujos termos são números reais

(de **sinal não necessariamente constante**), por vezes interessa

estudar a **série dos módulos** $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ que lhe está associada.

- Por exemplo a série, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^3}$
tem como **série dos módulos**, $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\cos n}{n^3} \right|$

$$\text{e como, } 0 \leq \left| \frac{\cos n}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$$

podemos concluir por **comparação termo a termo** com a **série harmónica de ordem 3** que a **série dos módulos é convergente**.

- Por exemplo a série, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
tem como **série dos módulos**, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

que é a **série harmónica de ordem $\frac{1}{2}$** e portanto **divergente**.

- Existirá uma relação?

* **Proposição:** *Se a série dos módulos for convergente, então a série original também é convergente.*

- Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ a **série dos módulos** que assumimos ser **convergente**.

Mostremos que a **série dada** $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é **também convergente**.

- Começemos por verificar que, para todo o **número real** a ,

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

- então, também para **todos os termos** da série dada,

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$$

- donde, somando $|a_n|$ obtemos, $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$

- Mas se a série dos módulos é convergente, também é **convergente** o seu **produto** por 2,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2|a_n|$$

- e pelo **critério de comparação termo a termo**, também é convergente a série,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + |a_n|)$$

- Deste modo, podemos reescrever a **série dada** como a **soma de duas séries convergentes**,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} ((a_n + |a_n|) - |a_n|)$$

- pelo que a **série dada** é também **convergente**.

- Portanto: $\sum |a_n|$ *convergente* $\Rightarrow \sum a_n$ *convergente*
e por consequência: $\sum a_n$ *divergente* $\Rightarrow \sum |a_n|$ *divergente*

- Como por exemplo,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\cos n}{n^3} \right| \text{ convergente} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^3} \text{ convergente}$$

- ou então,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \text{ divergente} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |(-1)^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 \text{ divergente}$$

- Contudo, tal como veremos,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \pm \frac{1}{n} \mp \cdots = \ln 2$$

apesar da série harmónica básica ser divergente.

* *Convergência simples e absoluta*

- Uma série numérica chama-se **absolutamente convergente** quando a série dos seus módulos for convergente.

Quando for convergente, mas a série dos módulos for divergente, chama-se **simplesmente convergente** ou **convergente**.

- Portanto: **convergência absoluta** $\Rightarrow$ **convergência (simples)**
- Note que, se numa série **convergente** os termos forem **todos positivos** a série é também **absolutamente convergente**.

* Critério de Cauchy ou Critério da Raiz

- Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de números reais e

$$L := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Se o limite L existir, verificam-se as condições seguintes:

- (i) se $0 \leq L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente,
logo convergente;

- (ii) se $L > 1$ ou $L = +\infty$ então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

(Note que L nunca pode ser negativo e que nada se afirma para $L=1$)

- Por exemplo, para a série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

- Aplicando o **critério de Cauchy**,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{(\ln n)^n} \right|} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- calculámos $L = 0$, donde podemos concluir que a série é **absolutamente convergente**.

- Estudemos a série,

$$\frac{1}{3} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 - \left(\frac{4}{9}\right)^4 + \cdots \pm \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n \mp \cdots$$

- que tem forma geral,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$$

- Aplicando o **critério de Cauchy**,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^{n+1} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n\right|} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- $L = \frac{1}{2} < 1$ pelo que podemos concluir que a série é **absolutamente convergente**.

- Consideremos agora a série,

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{3}{4}\right)^9 + \cdots + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} + \cdots$$

- ou seja,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

- Apesar dos termos serem **todos positivos**, o **critério de Cauchy** é aqui bastante útil.

- Calculemos L ,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} \right|} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n = \frac{1}{e}\end{aligned}$$

- como $L = 1/e < 1$ a série é **absolutamente convergente**.
- Convém não esquecer a definição do **número de Neper**,

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

- No caso da série,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{3n}}{7^n}$$

- é simples verificar que $L = 8/7 > 1$ pelo que é **divergente**.
- Note que o critério de Cauchy **nada garante** para o caso de $L=1$.
 - Por exemplo, para as duas séries harmónicas,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

- calculando os dois limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 \qquad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$$

- em ambos os casos $L = 1$, sendo **uma divergente** e a **outra convergente**.

- Tentemos aplicar o **critério de Cauchy** à série,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

- Calculemos o limite,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| (-1)^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right|} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1} \right)^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \end{aligned}$$

- Neste caso, $L = 1$ e o critério de Cauchy **nada nos permite concluir**.
- Tentemos uma abordagem mais simples: será que a **sucessão dos termos tende para zero?**
- A sucessão dos termos tem claramente **duas sub-sucessões**: a dos termos de ordem par (positivos) e a dos termos de ordem ímpar (negativos).

Analisemos os **limites** das duas sub-sucessões,

$$\left\{ (-1)^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right\}_{n \text{ par}} \longrightarrow \frac{1}{e}$$

$$\left\{ (-1)^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right\}_{n \text{ ímpar}} \longrightarrow -\frac{1}{e}$$

- Então, a sucessão dos termos tem duas sub-sucessões com **limites diferentes**, pelo que **a sucessão dos termos não tem limite**.
- Sendo **condição necessária** para a convergência de uma série que a sucessão dos seus termos tenda para zero, podemos concluir que **a série é divergente**.

* Critério de d'Alembert ou Critério do Quociente

- Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de números reais não nulos e

$$L := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Se o limite L existir, verificam-se as condições seguintes:

- (i) $0 \leq L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente, logo convergente;
- (ii) $L > 1$ ou $L = +\infty$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

(Note que L nunca pode ser negativo e que nada se afirma para $L = 1$)

- Recordemos uma **série geométrica**, como por exemplo a de razão $r = -\frac{1}{2}$,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots \pm \frac{1}{2^n} \mp \cdots = \frac{2}{3}$$

- Aplicando o **critério de d'Alembert**, é simples verificar que $L = \frac{1}{2} < 1$ pelo que a série é **absolutamente convergente**.
- O mesmo se passa com todas a **séries geométricas** de **razão** r , onde o limite do critério de d'Alembert tem o valor $L = |r|$.

Assim, sempre que $L = |r| < 1$, a série geométrica é **absolutamente convergente** e será **divergente** quando $L = |r| > 1$.

- Tal como no estudo das séries geométricas, o valor de $L = |r| = 1$ tem de ser tratado como um **caso particular**.

- Estudemos a série,

$$\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \cdots + \frac{2^n}{n} + \cdots$$

- O limite do **critério de d'Alembert** tem o valor $L = 2 > 1$, pelo que a série é **divergente**.
- ... o que não é novidade, pois a **sucessão dos termos** é **crescente**.

- Por outro lado, para a série,

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \cdots$$

- o limite tem o valor $L = \frac{1}{2} < 1$, pelo que é **absolutamente convergente**.

- Analisemos agora a série,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n + n}$$

- Bem depressa descobrimos que uma aplicação directa do critério de d'Alembert não é conveniente ...
- Contudo, tratando-se uma série de **termos positivos**, podemos **tentar compará-la** com outra série mais simples.

Por exemplo, verificamos que para todo o $n \geq 1$,

$$\frac{n}{2^n + n} < \frac{n}{2^n}$$

- e efectivamente já provámos que a série é absolutamente convergente.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$$

- Portanto, pelo **critério de comparação** a série dada é também convergente e, sendo os seus termos todos positivos, é **absolutamente convergente**.

- Vejamos agora a série,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n n! + 1}{n^n}$$

- Também neste caso, uma aplicação directa do critério de d'Alembert é demasiado complicada.
- A **simplificação** mais óbvia consiste em notar que,

$$\frac{3^n n! + 1}{n^n} > \frac{3^n n!}{n^n}$$

- Então, vale a pena tentar averiguar se será **divergente** a série,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$$

- Calculemos o limite do **critério de d'Alembert**,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left| \frac{3^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \right|}{\left| \frac{3^n n!}{n^n} \right|} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n+1} (n+1)! n^n}{3^n n! (n+1)^{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 (n+1) n^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 n^n}{(n+1)^n} \\ &= 3 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{3}{e} \end{aligned}$$

- E efectivamente $L = 3/e > 1$, pelo que a série auxiliar é **divergente**. Assim, pelo **critério de comparação**, podemos concluir que a série dada é também **divergente**.

- Retomando a série,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{3n}}{7^n}$$
- Verificamos que, também para o critério de d'Alembert, obtemos o **mesmo valor** de $L = 8/7 > 1$.
- Este facto é consequência directa da seguinte propriedade dos limites de sucessões:

- Propriedade:**

Seja (u_n) uma **sucessão de termos positivos**.

Se
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a, \quad a \in \mathbb{R}^+$$

então
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = a$$

- E também o critério de d'Alembert **nada garante** para o caso de $L=1$.
- Por exemplo, para as duas séries harmónicas,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

- calculando os dois limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left| \frac{1}{n+1} \right|}{\left| \frac{1}{n} \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left| \frac{1}{(n+1)^2} \right|}{\left| \frac{1}{n^2} \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

- em ambos os casos $L = 1$, sendo **uma divergente** e a **outra convergente**.

* Séries alternadas

- Nas **séries alternadas** os termos são **alternadamente positivos e negativos**, ou seja,

$$a_n = (-1)^n z_n \quad \text{onde} \quad z_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{ou} \quad z_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Por exemplo, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n}$

é a nossa conhecida **série alternada**,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots \pm \frac{1}{2^n} \mp \cdots$$

que também podemos escrever na forma,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \left(-\frac{1}{2^n} \right)$$

- Também é uma **série alternada**,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} e^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (-e^n)$$

já que o resultado da função exponencial tem **sempre o mesmo sinal** (positivo para qualquer argumento).

- Contudo, $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cos n$

não é uma série alternada pois, por exemplo, $\cos 1 > 0$ e $\cos 4 < 0$.

* Critério de Leibniz

- Seja (a_n) uma sucessão de números reais positivos,
monótona decrescente e tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.
 Então a série alternada $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ é convergente.

- Estudemos a série, $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$

- Trata-se de uma **série alternada**, pois $\frac{1}{2n+1} > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$
- Começemos por averiguar a **possibilidade de ser absolutamente convergente**, pois nesse caso o problema estaria resolvido.

Para isso, analisemos a **série dos módulos**,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{2n+1} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}$$

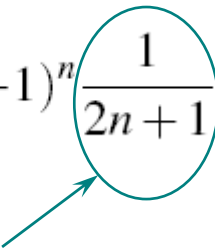
- Tomando como referência a **série harmónica básica**, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$:

Verificamos que o **critério de comparação** nada permite concluir.

Mas o **critério de comparação por passagem ao limite** revela que têm ambas a mesma natureza, ou seja, que a **série dos módulos é divergente**.

- Contudo, o facto da série dos módulos ser divergente **nada permite concluir** sobre a natureza da série dada.

- Vejamos se podemos utilizar o **critério de Leibniz**.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$


- Efectivamente, $a_n = \frac{1}{2n+1}$ é uma **sucessão de números reais positivos**.

- que é **monótona decrescente** pois, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{2n+1 - 2n-3}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{-2}{(2n+1)(2n+3)} < 0 \end{aligned}$$

- E também que essa sucessão **tende para zero**, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$
- Estão assim satisfeitas todas as condições do **critério de Leibniz**, pelo que podemos concluir que **a série dada é convergente**.

- Na verdade, sabe-se que,

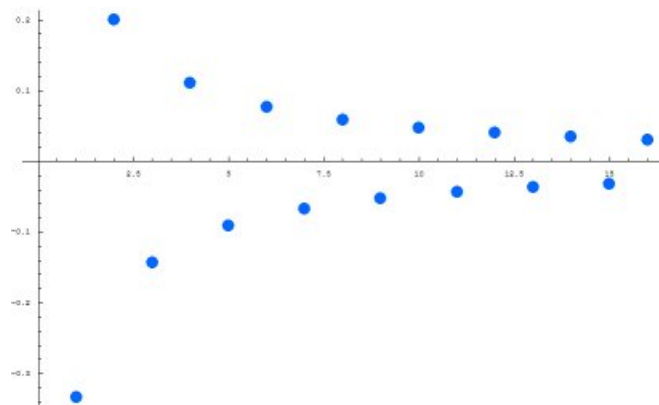
$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \pm \frac{1}{2n-1} \mp \cdots = \frac{\pi}{4}$$

- Em termos gráficos, observemos o comportamento desta série,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

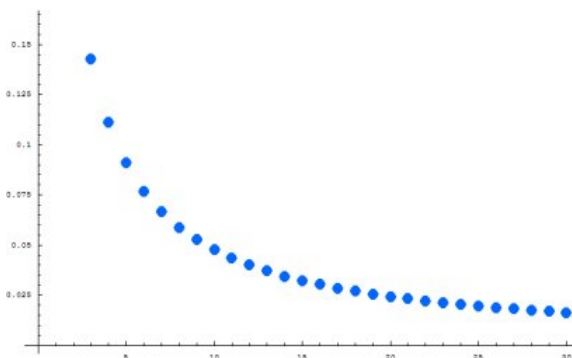
- Os termos são alternadamente positivos e negativos, mas formando uma sucessão que **tende para zero**.

$$(-1)^n \frac{1}{2n+1}$$



- e naturalmente, a sucessão dos módulos dos termos também tende para zero.

$$\frac{1}{2n+1}$$

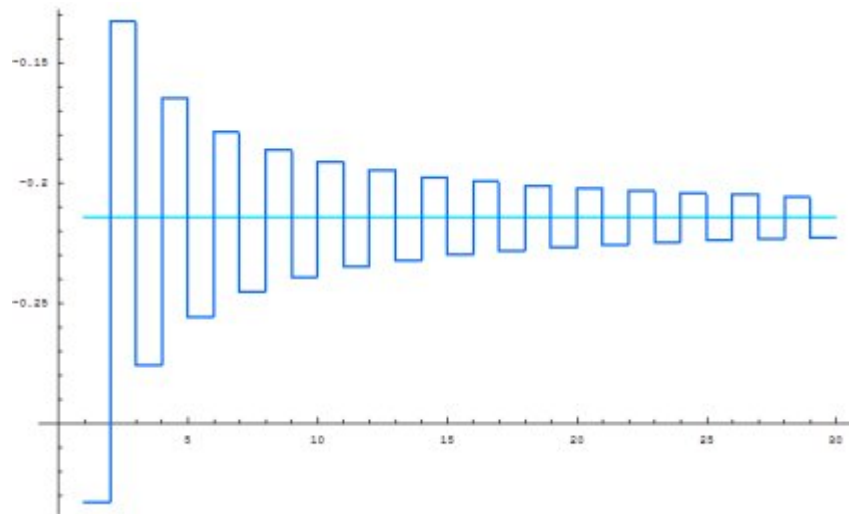


- Temos assim a **sucessão de termos positivos**, $\left(\frac{1}{2n+1} \right)$

que é **monótona decrescente** e **tende para zero**.

- Podemos então concluir pelo **critério de Leibniz** que **a série dada é convergente**.

- Observando o comportamento das primeiras **somas parciais** da série,



- verificamos que **convergem alternadamente**, para um valor que se sabe ser igual a $\pi/4 - 1$.

- Estudemos a série,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3n+1}{5n+2}$$

- Trata-se de uma **série alternada**, pois $\frac{3n+1}{5n+2} > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$
- Começemos por tentar a abordagem mais simples:
Será que a **sucessão dos termos tende para zero**?
Os termos formam **duas sub-sucensões**,

$$(-1)^n \frac{3n+1}{5n+2} = \begin{cases} \frac{3n+1}{5n+2} & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{3n+1}{5n+2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

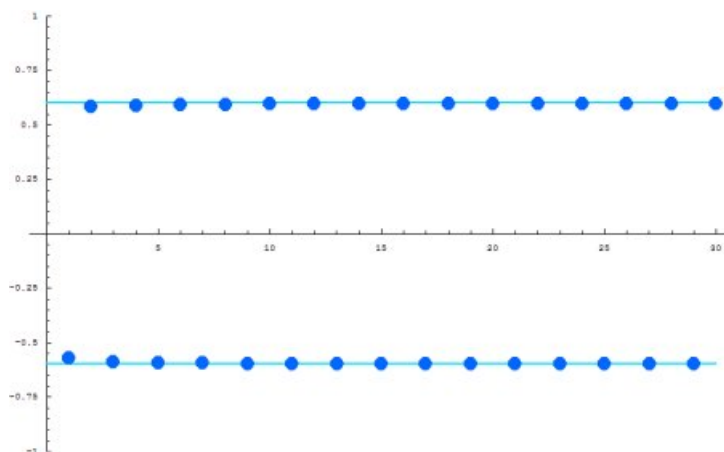
- Mas as duas sub-sucessões têm **limites diferentes**.

Então, **não existe o limite**,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{3n+1}{5n+2}$$

- E como é **condição necessária** para que a série seja convergente que esse limite exista e seja igual a zero, **a série dada tem de ser divergente**.
- Antes** de tentar aplicar qualquer um dos critérios de convergência, convém sempre verificar a **condição necessária de convergência mais simples**.
- Para este exemplo, foi fácil detectar a **não existência do limite** da sucessão dos termos da série.

Em termos gráficos,



podemos observar as duas sub-sucessões, cujos limites são $3/5$ e $-3/5$.

- Estudemos a série,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$$

- Trata-se de uma **série alternada**, pois $\frac{\ln n}{n} > 0$ para todo o $n \geq 2$.
- Começamos por verificar que a sucessão dos termos é formada por duas sub-sucessões, ambas de limite igual a zero.

Portanto, a **sucessão dos termos tem limite zero** e concluímos que **a série pode ser convergente**.

- Em seguida, vamos averiguar se será ou não absolutamente convergente, estudando a **série dos módulos**,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{\ln n}{n} \right| = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$$

- Para isso, podemos usar qualquer um dos três critérios para séries de termos positivos.

Por exemplo, pelo **critério de comparação por passagem ao limite**, utilizando como referência a **série harmónica básica**,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln n}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n = +\infty$$

donde concluímos que **a série dos módulos é divergente**.

- Portanto, a série dada **não é absolutamente convergente**, mas ainda pode ser simplesmente convergente ou divergente.
- Vejamos se podemos aplicar o critério de Leibniz.

- A série dada tem a forma, $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$
- Já verificámos que é uma **série alternada**, pois $\frac{\ln n}{n} > 0$ para $n \geq 2$.
- É necessário agora estudar o comportamento da **sucessão** $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n \geq 2}$
- Para verificar **se será monótona decrescente**, podemos utilizar a função auxiliar,

$$\begin{array}{ccc} f : [2, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\ln x}{x} \end{array}$$

que tem derivada,

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Ora para que seja $f'(x) \leq 0$, é preciso que $1 - \ln x \leq 0$

$$\ln x \geq 1$$

- Ou seja, a função auxiliar só é monótona decrescente para $x \geq e$.
Mas, como o comportamento da série **não depende dos seus primeiros termos** (neste caso apenas um termo), podemos considerar a **sucessão**,

$$\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n \geq 3}$$

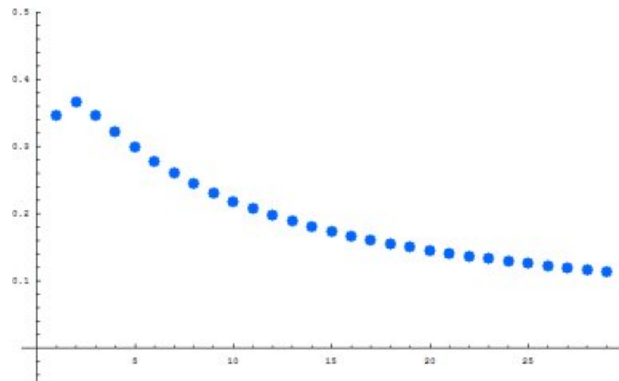
que é **monótona decrescente**.

É também simples verificar que esta sucessão tem **limite igual a zero**.

- Estando finalmente provadas todas as condições do **critério de Leibniz**, podemos concluir que a **série dada é convergente**.
E como verificámos que a série dos módulos é divergente, podemos ainda acrescentar que é **simplesmente convergente**.

- Observemos o comportamento dos **primeiros termos da sucessão**,

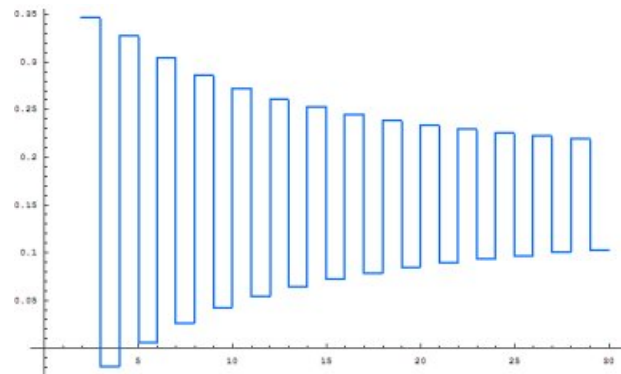
$$\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n \geq 2}$$



que efectivamente só é monótona decrescente a partir de $n = 3$.

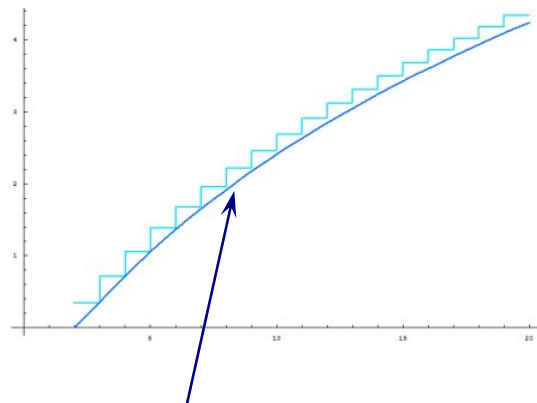
- E também as **primeiras somas parciais** da série dada,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$$



- A **série dos módulos** é contudo divergente,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$$



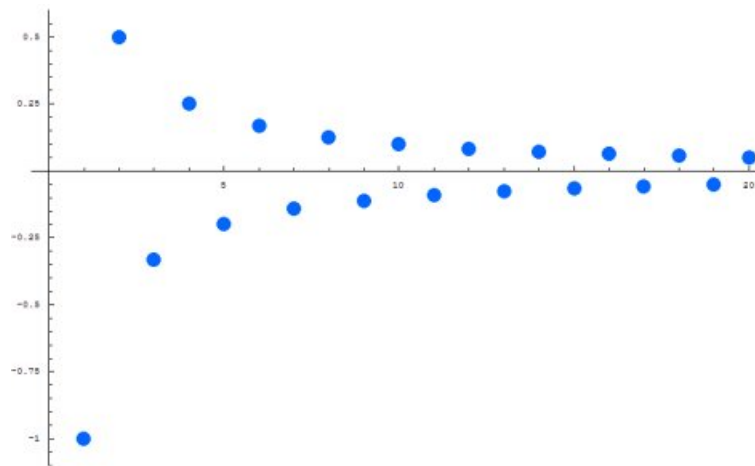
- Determine a expressão de uma **função $f(x)$** que tenha o mesmo comportamento assintótico que série dos módulos.

* As séries harmónicas alternadas

- Começemos por analisar a **série harmónica alternada básica**,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

- Trata-se efectivamente de uma **série alternada**, pois $1/n > 0$ para $n \geq 1$.



- A aplicação do **critério de Leibniz** é simples, pois $(1/n)$ é uma **sucessão monótona decrescente de limite zero**.

Portanto a série harmónica alternada básica é **convergente**.

- Além disso, como bem sabemos, a sua série dos módulos é divergente. Podemos então acrescentar que a série harmónica alternada básica é **simplesmente convergente**.

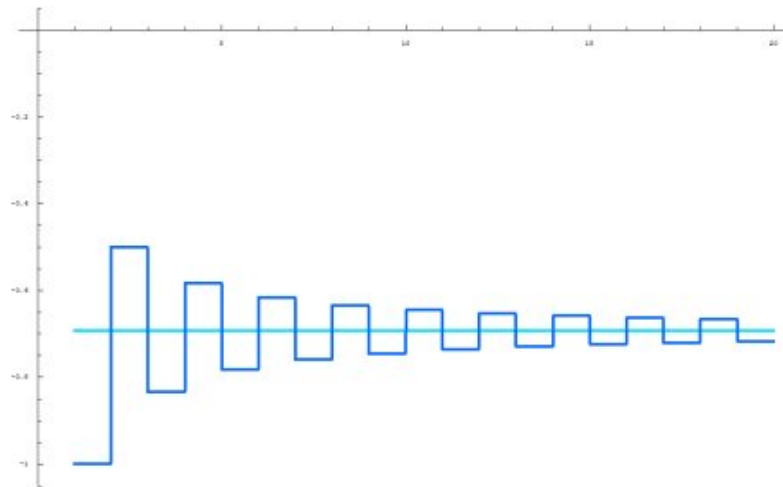
- Como depois veremos, prova-se ainda que,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \pm \frac{1}{n} \mp \cdots = \ln 2$$

- donde podemos calcular,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \mp \frac{1}{n} \pm \cdots = -\ln 2$$

- Observemos o comportamento das **primeiras somas parciais** da **série harmónica alternada básica** e a sua **convergência** para $-\ln 2$.



- Passemos ao caso geral da **série harmónica alternada de ordem p** .

Para todo o $p \in \mathbb{R}$ existe uma **série harmónica alternada** com a forma,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$$

cuja **natureza** depende do valor de p .

- Trata-se efectivamente de uma **série alternada**, pois $\frac{1}{n^p} > 0$ para $n \geq 1$.
- Já conhecemos a respectiva **série dos módulos**,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n^p} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$$

que é **convergente** se $p > 1$ e **divergente** se $p \leq 1$.

- Portanto, para $p > 1$ a série harmónica alternada de ordem p é **absolutamente convergente**.

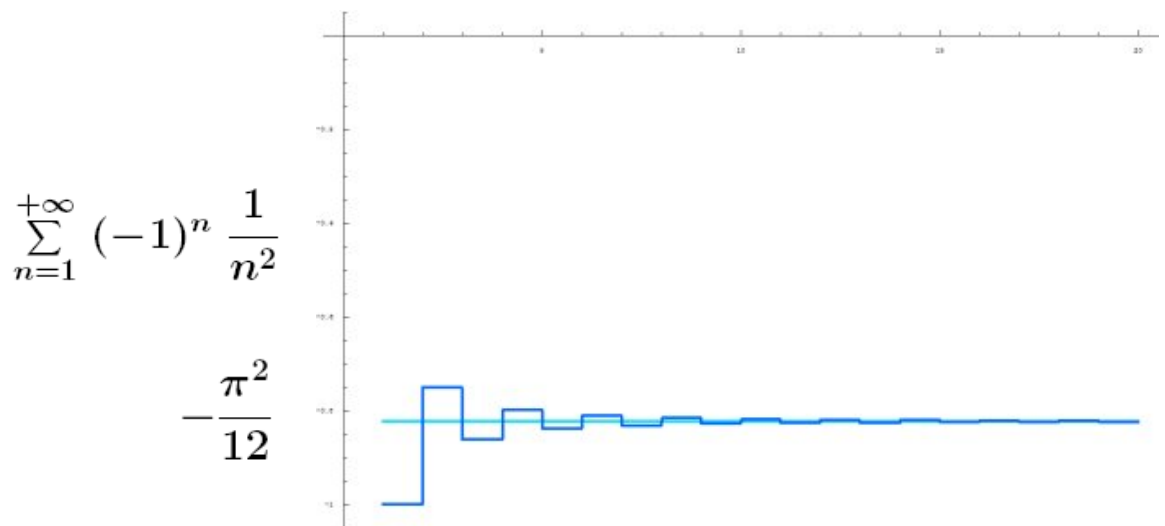
- Por exemplo para $p = 2$, **Leonhard Euler** provou que,

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots \pm \frac{1}{n^2} \mp \cdots = \frac{\pi^2}{12}$$

donde,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} = -1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \cdots \mp \frac{1}{n^2} \pm \cdots = -\frac{\pi^2}{12}$$

sendo a **convergência absoluta** (e muito rápida),



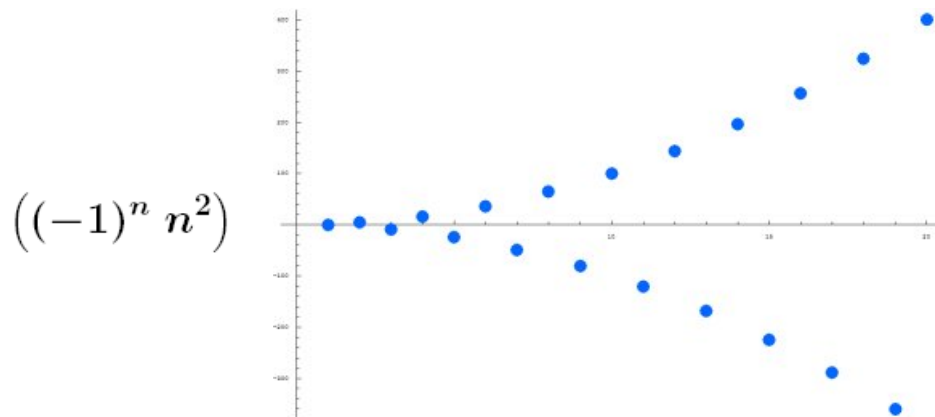
- Para $p = 0$ temos a série, $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$

que sabemos ser **divergente**.

- Para $p < 0$ como **não existe o limite**, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$

a série harmónica alternada é **divergente**.

- Por exemplo, para $p = -2$ a **sucessão dos termos** é formada por duas sub-sucessões que são ambas divergentes.



- Resta assim analisar os casos em que $0 < p \leq 1$.

- Vejamos se podemos aplicar o **critério de Leibniz**.

- A série dada tem a forma,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$$

- Sendo $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ uma **sucessão de números positivos** para $n \geq 1$,

analisemos o seu comportamento.

- Para verificar se será monótona decrescente, utilizemos a função auxiliar,

$$\begin{array}{ccc} f: & [1, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto \frac{1}{x^p} \end{array}$$

que derivamos,

$$f'(x) = \frac{-p}{x^{p+1}}$$

e donde concluimos que $f'(x) < 0$, para todo o $x \in [1, +\infty[$

e todo o $p \in]0, 1]$.

- Assim mostrámos que a função auxiliar é monótona decrescente

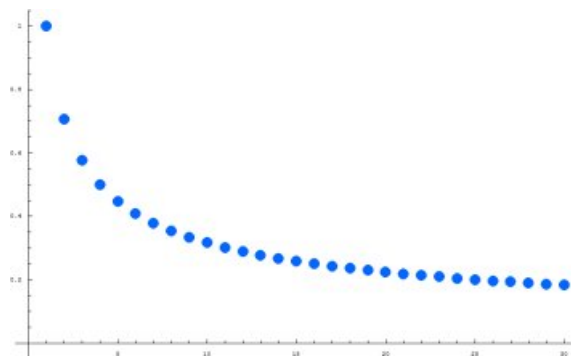
e portanto também que a **sucessão** $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ é **monótona decrescente** para $0 < p \leq 1$.

- Facilmente verificamos também que esta sucessão tem **limite igual a zero**.
- Estando reunidas todas as condições para a aplicação do **critério de Leibniz**, podemos concluir que a **série dada é convergente**.

E como sabemos que a série dos módulos é divergente, podemos ainda acrescentar que é **simplesmente convergente**.

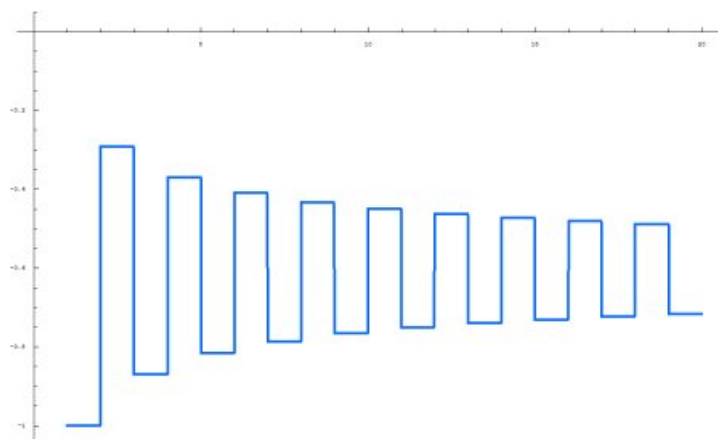
- Observemos por exemplo para $p = \frac{1}{2}$, o comportamento dos **primeiros termos da sucessão** dos módulos,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$



e das **primeiras somas parciais da série**,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$



- Em conclusão, a **série harmónica alternada de ordem p** ,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{é divergente} & \text{se } p \leq 0 \\ \text{é simplesmente convergente} & \text{se } 0 < p \leq 1 \\ \text{é absolutamente convergente} & \text{se } p > 1 \end{cases}$$

- E juntando,

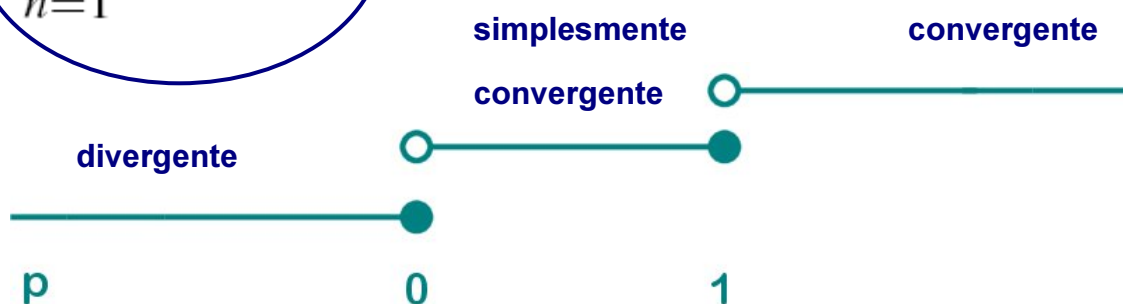
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$$

convergente



$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$$

absolutamente convergente



*** Exercícios sobre séries numéricas**

- Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos positivos convergente.
 - (a) Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ é divergente.
 - (b) Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ é convergente.
- Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries de termos positivos convergentes.

Indique, justificando, a natureza das seguintes séries:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n + \frac{1}{b_n} \right).$

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}.$

- Sejam $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas sucessões de números reais.

Sabendo que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n - \frac{b_n}{2} \right)$ é

convergente e que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente,

determine a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$

- (a) Defina soma de uma série de números reais.
- (b) Utilizando a definição, calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+4} \right)$.
- Calcule a soma das séries seguintes:

(a) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2}{n^2 - 2n}$.

(b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n - 3^{2n}}{10^n}$.

(c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3^{n+2}} - \frac{1}{3^n} \right)$.

- Estude a natureza das séries numéricas seguintes:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{n^2} \right)$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n} \right)^{n^2}$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-10 \sin(n)}{n} \right)^n$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n! + 20}$

- Estude a natureza das séries seguintes e, em caso de convergência, indique se se trata de convergência simples ou absoluta.

- $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{sen} \frac{1}{n}$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{sen} \frac{10}{n}$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n-3}{e^n} \right)^{2n}$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 4}$

- $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{n} \right)^n$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n + 1}{(2n)!}$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n-3}{e^n} \right)^{2n}$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 4}$