

Departamento de Matemática
Universidade de Aveiro

Cálculo II (2009/2010) – T2B

Acetatos de apoio às aulas,
segundo o texto

**“Cálculo com funções de uma variável”
de Virgínia Santos**

[**www.mat.ua.pt/rosalia/cadeiras/CII**](http://www.mat.ua.pt/rosalia/cadeiras/CII)

Rosália Rodrigues

Capítulo 3 – Séries Numéricas

* Conceitos básicos

- Como exemplo, recordemos a **sucessão** de **termo geral** $1/2^n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

- Sabemos que a sucessão $(1/2^n)$ é **convergente** e tem **limite** igual a 0 .

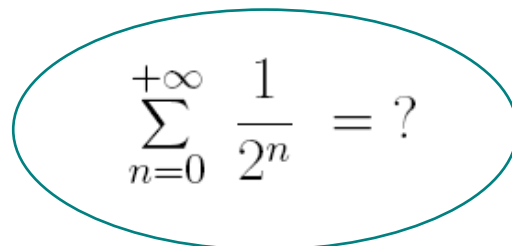
- Pretendemos agora saber o que acontece à **soma de todos os termos**,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = ?$$

Terá esta soma um valor **finito** ou **infinito**?

E se a soma for finita, qual o seu **valor**?

- Ou seja, pretendemos estudar a **série numérica** de **termo geral** $1/2^n$, $n \in \mathbb{N}_0$.


$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = ?$$

- Qual é a **natureza desta série**?
- Será **convergente** ou **divergente**?

- Para isso, vamos construir a **sucessão** das **somas parciais**,

$$\begin{aligned} s_0 &= 1 \\ s_1 &= 1 + \frac{1}{2} \\ s_2 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ &\vdots \\ s_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

- Neste caso, tratando-se de uma **progressão geométrica**, é fácil calcular,

$$s_n = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

- e também é simples calcular o **limite da sucessão** (s_n) **das somas parciais**,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2$$

- Por **definição** de **convergência de uma série** podemos concluir que,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 2$$

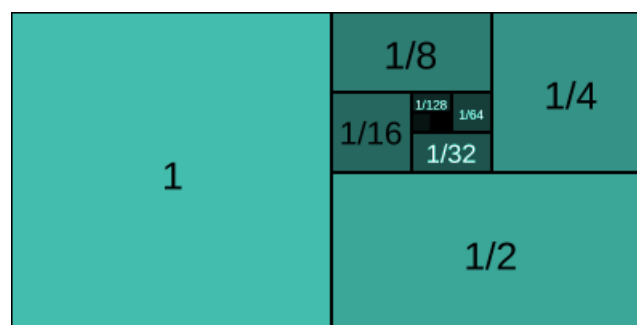
- ou seja, esta **série é convergente** e tem **soma** igual a 2.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

- Em termos **numéricos**, podemos observar as **convergências** do **termo geral** para 0 e das **somas parciais** para 2 ,

n	$1/2^n$	S_n
0	1.0000000000000000	1.0000000000000000
1	0.5000000000000000	1.5000000000000000
2	0.2500000000000000	1.7500000000000000
3	0.1250000000000000	1.8750000000000000
4	0.0625000000000000	1.9375000000000000
5	0.0312500000000000	1.9687500000000000
6	0.0156250000000000	1.9843750000000000
7	0.0078125000000000	1.9921875000000000
8	0.0039062500000000	1.9960937500000000
9	0.0019531250000000	1.9980468750000000
10	0.0009765625000000	1.9990234375000000
11	0.0004882812500000	1.9995117187500000
12	0.0002441406250000	1.9997558593750000
13	0.0001220703125000	1.9998779296875000
14	0.0000610351562500	1.9999389648437500
15	0.0000305175781250	1.9999694824218750
16	0.0000152587890625	1.9999847412109375
...		
∞	0	2

- Em termos **gráficos**, podemos visualizar o resultado da **soma** desta série,



- Este exemplo é um caso particular de uma **série geométrica** de **razão $r \neq 1$** , que tem forma geral,

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n + \dots$$

com **somas parciais**,

$$\begin{aligned} S_n &= a + ar + ar^2 + \dots + ar^n \\ &= (a - ar^{n+1}) / (1 - r) = a(1 - r^{n+1}) / (1 - r) \end{aligned}$$

Portanto: Quando $|r| < 1$ $(S_n) \rightarrow a / (1-r)$

e a série é **convergente** e tem **soma** $s = a / (1-r)$

Quando $|r| > 1$ $(S_n) \rightarrow \infty$

e a série é **divergente**.

- Uma **série geométrica** de **razão $r = 1$** é da forma,

$$a + a + a + \dots + a + \dots$$

e como as **somas parciais** são, $S_n = (n+1)a$

então $(S_n) \rightarrow \infty$ e a série é sempre **divergente**.

Note que, se $a > 0$ então $(S_n) \rightarrow +\infty$

se $a < 0$ então $(S_n) \rightarrow -\infty$

- Quando **$r = -1$** a série tem a forma,

$$a - a + a - a + \dots$$

Neste caso, como S_n **oscila** entre a e 0 , a sucessão (S_n) **não tem limite** e a série é **divergente**.

* *Algumas séries convergentes famosas*

- Soma dos inversos das potências de 2, mas com **sinais alternados**,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots \pm \frac{1}{2^n} \mp \cdots = \frac{2}{3}$$

- Somas dos inversos dos **factoriais**,

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = e$$

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots \pm \frac{1}{n!} \mp \cdots = \frac{1}{e}$$

- Soma dos **inversos dos ímpares**, com **sinais alternados**,

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \pm \frac{1}{2n-1} \mp \cdots = \frac{\pi}{4}$$

- As **séries de Euler**,

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \cdots$$

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \cdots$$

* **Propriedade:** *A natureza de uma série não depende dos seus primeiros termos.*

- Consideremos uma série qualquer, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$
e outra formada pelos seus **termos a partir de** $p > 1$, $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$

- Provemos que as duas séries **têm a mesma natureza.**

Sejam (S_n) e $(S'_n)_{n \geq p}$ as respectivas **sucessões de somas parciais**,

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad s'_n = \sum_{k=p}^n a_k$$

ou seja,

$$\overbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1}}^{S_{p-1}} + \overbrace{a_p + a_{p+1} + \dots + a_n}^{S'_n} = \underbrace{\hspace{10em}}_{S_n}$$

Então, $\lim_{n \rightarrow +\infty} s'_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n - s_{p-1})$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (s'_n + s_{p-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$$

e as **sucessões** (S_n) e $(S'_n)_{n \geq p}$ ou são **ambas convergentes**
ou são **ambas divergentes**.

- Portanto as **séries** $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ **têm a mesma natureza.**

- No **caso de serem ambas convergentes**, atendendo a que,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (s'_n + s_{p-1}) = s_{p-1} + \lim_{n \rightarrow +\infty} s'_n$$

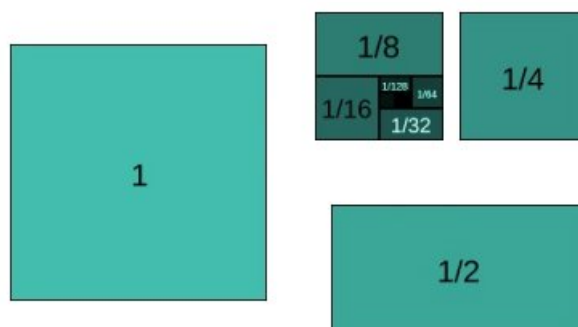
podemos concluir que,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s_{p-1} + \sum_{n=p}^{+\infty} a_n$$

- Por exemplo** as séries, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$, ...

têm todas **a mesma natureza.**

- E como sabemos que a primeira é **convergente**, podemos **provar** que:



$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} &= 1 \\ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n} &= \frac{1}{2} \\ \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^n} &= \frac{1}{4} \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\sum_{n=p}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{p-1}}$$

* As séries telescópicas ou séries de Mengoli

- Começemos por estudar a **série**,

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

que pode ser escrita na forma,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

- Se calcularmos as **somas parciais**,

$$\begin{aligned} s_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

verificamos que a maior parte dos **termos** se **cancelam mutuamente**, só restando o **primeiro** e o **último**.

Calculando o limite,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 1$$

- e portanto,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

- Para toda a **série telescópica** ou **série de Mengoli** (a_n) existe uma **sucessão** (u_n) e um número **natural** p , de modo que o **termo geral** pode ser escrito numa das formas,

$$a_n = u_n - u_{n+p} \quad \text{ou} \quad a_n = u_{n+p} - u_n$$

- O designação de **telescópica** procura ilustrar o efeito resultante do **cancelamento mútuo** da maior parte dos termos.



- No caso em que $a_n = u_n - u_{n+p}$ temos,

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\
 &= \sum_{k=1}^n (u_k - u_{k+p}) \\
 &= \sum_{k=1}^n u_k - \sum_{k=1}^n u_{k+p} \\
 &= \sum_{k=1}^n u_k - \sum_{k=p+1}^{n+p} u_k \\
 &= \sum_{k=1}^p u_k + \cancel{\sum_{k=p+1}^n u_k} - \cancel{\sum_{k=p+1}^n u_k} - \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \\
 &= \sum_{k=1}^p u_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k
 \end{aligned}$$

- A maior parte dos termos cancelam-se mutuamente, só restando os p **primeiros** e os p **últimos**.
- Assim, a **convergência** de (S_n) depende apenas da **convergência** da **soma dos p últimos termos**, que formam uma **sucessão** (v_n) ,

$$v_n = u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}$$

- Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = u_1 + \cdots + u_p - \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

- Se (v_n) for **divergente**, também o serão (s_n) e a série dada.
- Se (v_n) for **convergente**, podemos calcular, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = p \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

e então,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = u_1 + \cdots + u_p - p \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

- Aplicando directamente o **resultado anterior**, podemos verificar que,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)(n+3)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right) = 1.5$$

porque,

$$\begin{aligned} p &= 2 \\ u_n &= \frac{1}{n+1} \\ a_n &= u_n - u_{n+2} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \\ v_n &= u_{n+1} + u_{n+2} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \\ s_n &= u_1 + u_2 - v_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n &= u_1 + u_2 - \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} - 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 1.5 \end{aligned}$$

* **Proposição:** *Uma condição necessária de convergência.*

Se uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for convergente,
então $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

- Se a **série** é convergente, também o é a **sucessão** (S_n) , ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = s$$

- E se a **sucessão** (S_n) é convergente, também o é a sua **subsucessão** (S_{n+1}) ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n+1} = s$$

- e **subtraindo** termo a termo,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{(S_{n+1} - S_n)} = 0$$

- mas como $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$, temos que, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = 0$

que é o mesmo que, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

- Portanto:

série convergente $\Rightarrow$ termos tendem para zero

e por consequência:

termos não tendem para zero $\Rightarrow$ série divergente

termos não tendem para zero $\Rightarrow$ série divergente

- Por exemplo, nos casos de uma **série geométrica** em que a **razão** $|r| \geq 1$, como o termo geral tem a forma,

$$a_n = a r^n$$

a sucessão (a_n) ou **diverge** ou **não tem limite**, pelo que a série é **divergente**.

- Na série, $\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n}{n-2}$

como o termo geral tem a forma,

$$(-1)^n \frac{2n}{n-2} = \begin{cases} \frac{2n}{n-2} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{2n}{2-n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

(a_n) é uma **sucessão oscilatória**, pelo que o **limite não existe** e portanto a série dada é **divergente**.

- A série de termo geral, $a_n = n \operatorname{sen} \frac{1}{n}$

é também **divergente** porque,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \operatorname{sen} \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$$

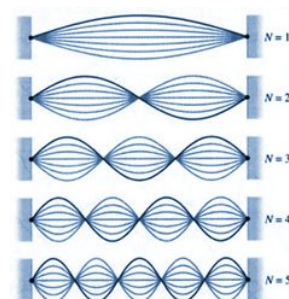
- Note que, do facto da sucessão $(a_n) \rightarrow 0$ **nada se pode concluir**.

* $A(s)$ série(s) harmónica(s)

- A **série harmónica** mais simples tem a forma,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

- O nome tem origem na **música**, onde representa as **diferentes frequências** obtidas pela vibração de uma corda, pressionada em diferentes pontos.



- Uma simples simulação numérica sugere que, **apesar da sucessão dos termos convergir** para 0 , a **série harmónica é divergente**.

n	$1/n$	S_n
1	1.000000000	1.000000000
2	0.500000000	1.500000000
3	0.333333333	1.833333333
4	0.250000000	2.083333333
5	0.200000000	2.283333333
6	0.166666667	2.450000000
7	0.1428571429	2.592857143
8	0.125000000	2.717857143
9	0.111111111	2.828968254
10	0.100000000	2.928968254
11	0.09090909091	3.019877345
12	0.08333333333	3.103210678
13	0.07692307692	3.180133755
14	0.07142857143	3.251562327
15	0.06666666667	3.318228993
16	0.06250000000	3.380728993
...		

- Existem **dezenas de demonstrações** da **divergência da série harmónica**.
- O raciocínio seguinte data de cerca do **ano 1350**.

$$\begin{aligned}
 & 1 + \frac{1}{2} + \boxed{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \boxed{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} + \frac{1}{9} + \dots \\
 & \begin{array}{c} \nearrow \\ \bigcirc > \end{array} 1 + \frac{1}{2} + \boxed{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \boxed{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}} + \frac{1}{16} + \dots \\
 & = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots \\
 & = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \rightarrow \bigcirc \infty
 \end{aligned}$$

- Como veremos, foi utilizado o **critério de comparação**.
- Já datando de **1976** existe uma elegante **demonstração por absurdo**.

Suponhamos que a série harmónica era **convergente** e tinha soma S .

Então,

$$\begin{aligned}
 S &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots \\
 &\quad \bigcirc > \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots \\
 &= S.
 \end{aligned}$$

donde concluiríamos que $S > S$, o que é **absurdo**.

- Mas veremos mais...

* Combinação linear de duas séries

- Dadas **duas séries** $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ e **dois números reais** α e β ,

podemos construir a **combinação linear**,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{k=1}^n a_k + \beta \sum_{k=1}^n b_k$$

- A **natureza** desta série depende naturalmente da natureza das séries dadas.

1) Se ambas as **séries dadas** forem **convergentes**, com somas S_1 e S_2 ,

- sendo, $s_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)$

$$s_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n b_k \right)$$

- Calculemos a sucessão (S_n) das somas parciais da nova série.

Para **todo** o $n \in \mathbb{N}$ e **todos** os $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n (\alpha a_k + \beta b_k) \\ &= \alpha \sum_{k=1}^n a_k + \beta \sum_{k=1}^n b_k \end{aligned}$$

- e calculemos o seu **limite**, aplicando propriedades dos limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\alpha \sum_{k=1}^n a_k + \beta \sum_{k=1}^n b_k \right) = \alpha s_1 + \beta s_2$$

- Portanto, a **série combinação linear** é também **convergente** e sabemos o valor da sua **soma**,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha s_1 + \beta s_2$$

2) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for **convergente** e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ for **divergente**, com $\beta \neq 0$.

- se a **primeira é convergente**, então tem uma soma S ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) = S$$

- se a **segunda é divergente**, então o limite,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n b_k \right)$$

ou **não existe** ou é **infinito** ($+\infty$ ou $-\infty$).

- Assim, se calcularmos a sucessão (s_n) das somas parciais da nova série.

Para **todo** o $n \in \mathbb{N}$ e **todos** os $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, com $\beta \neq 0$,

$$s_n = \alpha \sum_{k=1}^n a_k + \beta \sum_{k=1}^n b_k$$

- e calcularmos o **limite**, aplicando propriedades dos limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\alpha \sum_{k=1}^n a_k + \beta \sum_{k=1}^n b_k \right)$$

verificamos que o limite ou **não existe** ou é **infinito**.

- Portanto a **série combinação linear** é **divergente**.

3) Se forem **ambas divergentes** nada podemos afirmar.

Na maior parte dos casos a série combinação linear será divergente, mas podem ocorrer efeitos de cancelamento por subtração que tornam o resultado convergente.

- Analisemos alguns **casos particulares** da combinação linear de duas séries.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{k=1}^{+\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{+\infty} b_k$$

- **Soma de duas séries:** $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$

Basta fazer $\alpha = \beta = 1$. Se forem ambas **convergentes**,
então a soma é **convergente**.

Se uma for **convergente** e a outra **divergente**,
então a soma é **divergente**.

- **Produto de uma série por um número real:** $\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha a_n)$

Basta fazer $\beta = 0$.

Se a série for **convergente**,

então o seu produto por α é **convergente**.

Se a série for **divergente** e $\alpha \neq 0$,

então o seu produto por α é **divergente**.

- Estes resultados são de grande **utilidade prática**, como por exemplo:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = ?$

- O **produto** da série por $1/2$ permite transformar o problema no estudo de uma série geométrica de razão $2/3$,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{3^n} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{3^n} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1
 \end{aligned}$$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n} - 1}{2^n} = ?$

- Decompondo na **diferença de duas séries**,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n} - 1}{2^n} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(2^n - \frac{1}{2^n} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

- como a primeira é divergente e a segunda convergente, com soma = 1, a série dada é **divergente**.

- $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{4}{3^{n+1}} \right) = ?$

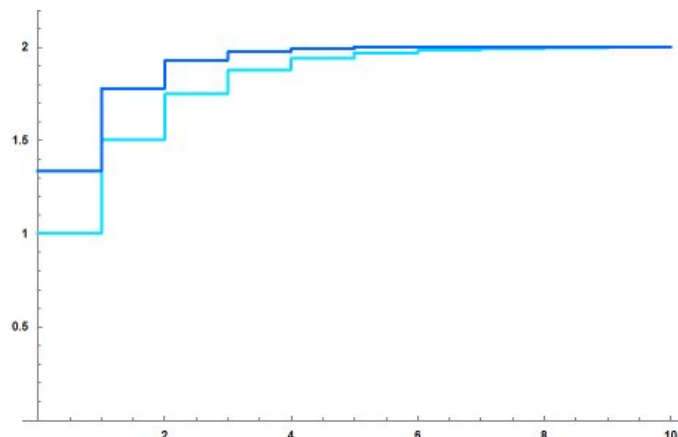
- Escrevendo na forma de uma combinação linear, facilmente calculamos,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{4}{3^{n+1}} \right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} - \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \\ &= 2 - \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = 0 \end{aligned}$$

- Podemos observar o comportamento das primeiras **somas parciais** das duas séries,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{3^{n+1}}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$$



* Séries de termos não negativos

- Analisemos as séries com **termo geral** $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- Neste caso, a **sucessão das somas parciais** (s_n) é **monótona crescente** pois,

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$$

- E como uma sucessão monótona crescente é convergente se e só se for limitada superiormente, então,

Uma **série de termos não negativos** é **convergente** se e só se a **sucessão das somas parciais** for **limitada superiormente**.

- Por exemplo, na série geométrica de **termos não negativos**,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$$

- a **sucessão das somas parciais** é **limitada superiormente por 2**,

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \leq 2 \end{aligned}$$

- como já vimos, nesta série o **majorante 2** é também o **limite** da sucessão (s_n) .

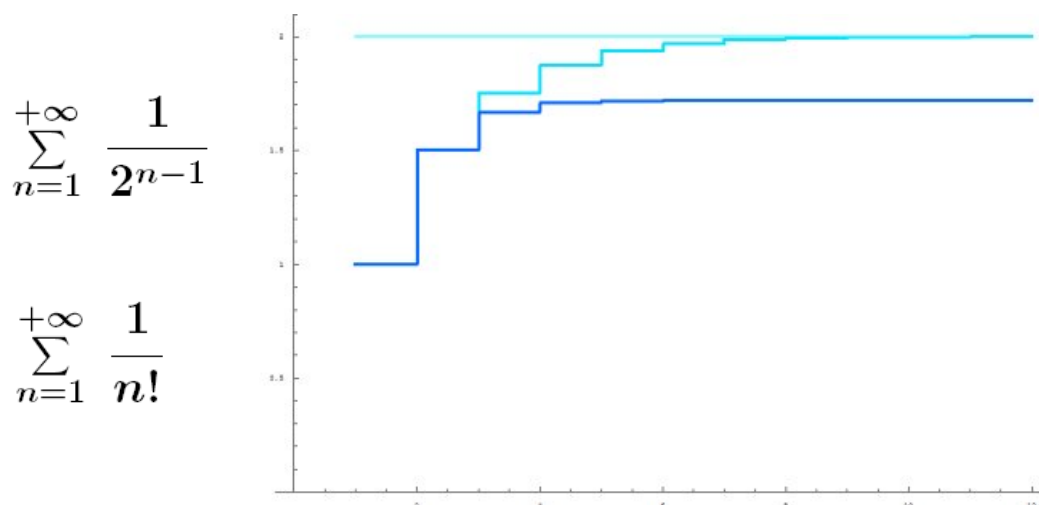
- Utilizemos agora esta série para estudar outra **série de termos não negativos**,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

- Porque sabemos que $k! \geq 2^{k-1}$ para todos os $k = 1, 2, \dots, n$, podemos encontrar um **majorante** para a sucessão das somas parciais desta série,

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} \leq 2 \end{aligned}$$

- Portanto esta série é também **convergente**.
- Neste caso, o **majorante 2** não é o **limite** da sucessão (s_n) que, como veremos mais tarde, é igual a $e - 1$.
- Observemos o comportamento das primeiras **somas parciais** das duas séries,



- Este raciocínio está na origem do seguinte critério ...

* **Critério de Comparação para séries de termos não negativos**

- Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries de termos não negativos tais que

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Então verificam-se as condições seguintes:

- (i) se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente;
- (ii) se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente, então $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é divergente.

- Sejam: (s_n) a sucessão das somas parciais de $\sum a_n$
 (s'_n) a sucessão das somas parciais de $\sum b_n$
- como $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, temos que $0 \leq s_n \leq s'_n$.

(i)

- Se por hipótese $\sum b_n$ for **convergente**, então a sucessão (s'_n) é **limitada superiormente**.
- Portanto, como $s_n \leq s'_n$, a sucessão (s_n) é também **limitada superiormente** e a série $\sum a_n$ é também **convergente**.

(ii)

- Se por hipótese $\sum a_n$ for **divergente**, então a sucessão (s_n) **não é limitada superiormente**.
- Portanto, como $s_n \leq s'_n$, a sucessão (s'_n) também **não é limitada superiormente** e a série $\sum b_n$ é também **divergente**.

- Retomemos as duas séries de **termos não negativos**,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

- Sabendo que a **primeira é convergente**, utilizemos o **critério de comparação** para estudar a segunda.
- Basta **comparar termo a termo**, pois como,

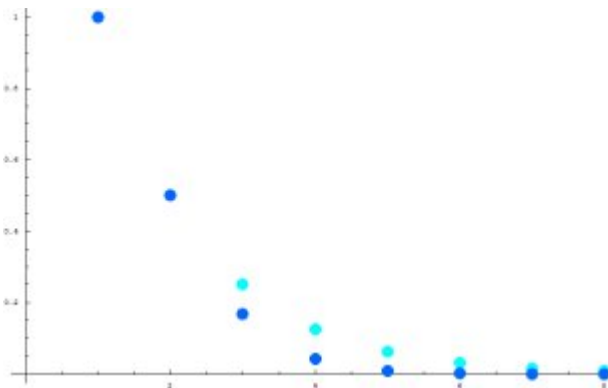
$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

então a segunda série é também **convergente**.

- Observemos o comportamento dos **primeiros termos** das duas séries,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$



- Note como ambas as sucessões tendem necessariamente para **zero**.
- Verifique também por que razão do critério de comparação é estabelecido **apenas** para séries de **termos não negativos**.

- Consideremos agora as duas séries de **termos não negativos**,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

- A primeira é a série harmónica básica, que sabemos ser **divergente**.
Utilizemos o **critério de comparação** para estudar a segunda.

- Comparando termo a termo**, como,

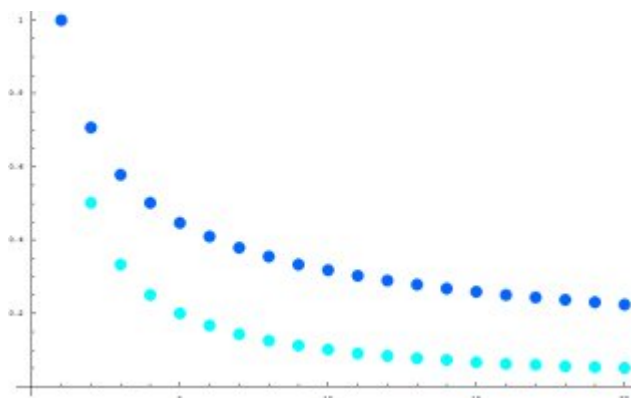
$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

concluimos que a segunda é também **divergente**.

- Observemos o comportamento dos **primeiros termos** das duas séries,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$



- Por comparação com uma das anteriores, estude a série,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n} - 1}$$

- O critério de comparação está na origem do seguinte ...

*** Critério de Comparação por Passagem ao Limite**
para séries de termos não negativos

- Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos não negativos
 e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ uma série de termos positivos.

Seja

$$L := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

- (i) se $L \in \mathbb{R}^+$, então as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ têm a mesma natureza;
- (ii) se $L = 0$ e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente,
 então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é também convergente;
- (iii) se $L = +\infty$ e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é divergente,
 então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é também divergente.

- Consideremos de novo as duas séries,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$$

Atendendo a que,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{2\sqrt{n}-1}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}} \\ &= 2 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 2 \end{aligned}$$

pelo critério da **passagem ao limite**, podemos concluir que **têm a mesma natureza**.

- Para estudar a série,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$$

começamos por confirmar que se trata de uma série de **termos não negativos**. Efectivamente, para $n \geq 1$ tem-se $0 < 1/n \leq 1$, pelo que o valor desta função seno é sempre positivo.

Podemos então **comparar por passagem ao limite** com a série harmónica básica,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

donde concluimos que as duas séries **têm a mesma natureza**.

- Consideremos agora as duas séries,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n + 3^n}$$

das quais sabemos que **a primeira é convergente**.

Sendo ambas de termos positivos, calculemos,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2^n + 3^n}}{\frac{1}{2^n}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{2^n + 3^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} = \frac{0}{0 + 1} = 0 \end{aligned}$$

Podemos então concluir **por passagem ao limite** que a segunda série é também **convergente**.

- Por **comparação por passagem ao limite** com a série harmónica básica, confirme a divergência a série,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n} - 1}$$

- O critério seguinte tem por base o critério de comparação, bem como a **estreita relação** entre as noções **de integral impróprio de 1ª espécie** e de soma infinita ou **série**.

* Critério do Integral para séries de termos não negativos

- Seja (a_n) uma sucessão de termos não negativos e f uma função definida no intervalo $[1, +\infty[$ e tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = a_n$.

Se f é decrescente no intervalo $[1, +\infty[$, então a série

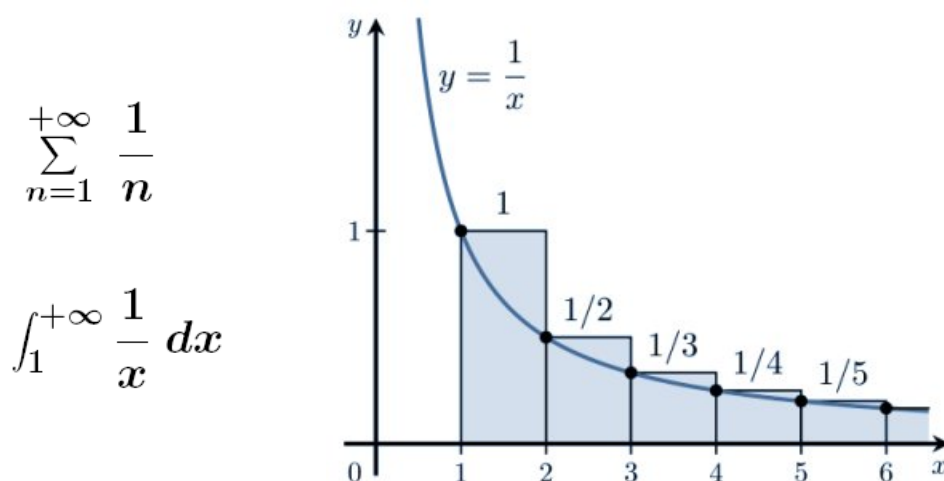
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

e o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx$$

têm a mesma natureza.

- Observemos por exemplo a **relação** entre a série harmónica básica e o integral impróprio, que sabemos ser divergente,



Como a área limitada pela curva é **infinita**, a soma das áreas dos rectângulos também é **infinita**.

- Aplicando o **critério do integral**, estudemos a série,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}$$

- Como referência, consideremos a **função**,

$$\begin{aligned} f : [2, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{1}{x \ln^3 x} \end{aligned}$$

- Verifiquemos se é **decrecente** no intervalo,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\ln^3 x - 3 \ln^2 x}{x^2 \ln^6 x} \\ &= \frac{-\ln x - 3}{x^2 \ln^4 x}. \end{aligned}$$

- Sendo o denominador sempre positivo, o numerador será negativo quando $\ln x + 3 > 0$, ou seja, $x > e^{-3} \approx 0.05 \dots$ Então, para $x \geq 2$, a derivada é sempre negativa e a **função sempre decrescente**.
- Portanto, segundo o critério do integral, a série dada tem **a mesma natureza** do integral impróprio,

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^3 x} dx$$

- Estudando o **integral**, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_2^t \frac{1}{x \ln^3 x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_2^t \frac{1}{x} (\ln x)^{-3} dx$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{2 \ln^2 x} \right)_2^t$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{2 \ln^2 t} + \frac{1}{2 \ln^2 2} \right)$$

$$= \frac{1}{2 \ln^2 2}$$
- Verificamos que o **integral impróprio é convergente** pelo que podemos finalmente concluir que **a série dada é convergente**.

* A série harmónica de ordem p

- Para todo o $p \in \mathbb{R}$ existe uma **série harmónica** com a forma,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$$

cujas **natureza** depende do valor de p .

- Para $p \leq 0$, a **sucessão dos termos** $(1/n^p) \rightarrow +\infty$, pelo que a série harmónica é **divergente**.
- Para $p = 1$, trata-se da **série harmónica básica**.

Como a função $f(x) = 1/x$ definida em $[1, +\infty[$ é sempre decrescente, pelo **critério do integral**, esta série tem a mesma natureza do integral impróprio,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$$

que sabemos ser divergente.

E assim, mais uma vez provamos que a série harmónica básica é **divergente**.

- Para $p > 0$, consideremos a função,

$$\begin{array}{ccc} f: & [1, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto \frac{1}{x^p} \end{array}$$

que é sempre decrescente em $[1, +\infty[$, porque neste intervalo,

$$f'(x) = \frac{-p}{x^{p+1}} < 0$$

- Então, pelo critério do integral, a série harmónica de ordem p tem a natureza do integral impróprio,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

- Tal como foi provado (pp. 300-301),

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{converge} & \text{se } p > 1 \\ \text{diverge} & \text{se } p < 1 \end{array} \right.$$

- Podemos portanto concluir que a **série harmónica de ordem p** ,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{converge} & \text{se } p > 1 \\ \text{diverge} & \text{se } p \leq 1 \end{array} \right.$$

- Por exemplo:

- para $p = 1/2$, já vimos que é divergente a série,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

- para $p = 2$, **Leonhard Euler** provou que,

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

* **Nota sobre o comportamento assintótico da série harmónica**

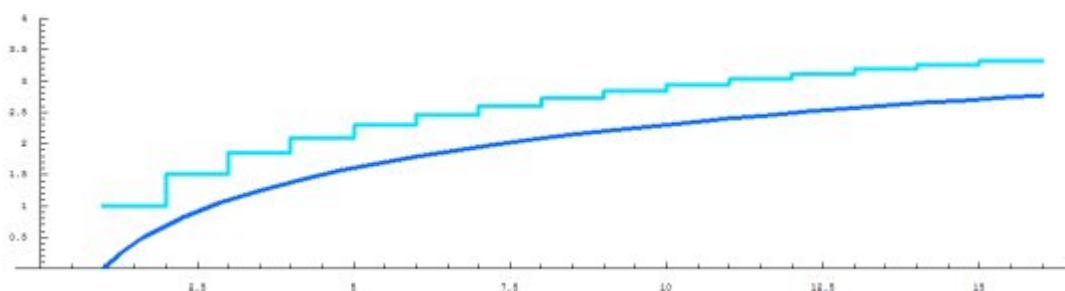
- Sabendo que uma dada série é **divergente**, em diversas aplicações práticas interessa também saber **como diverge**, isto é, qual o seu **grau de divergência**.
- Vejamos **como diverge** a **série harmónica básica**.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

- **Leonhard Euler** mostrou que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = \gamma \approx 0.577216$$

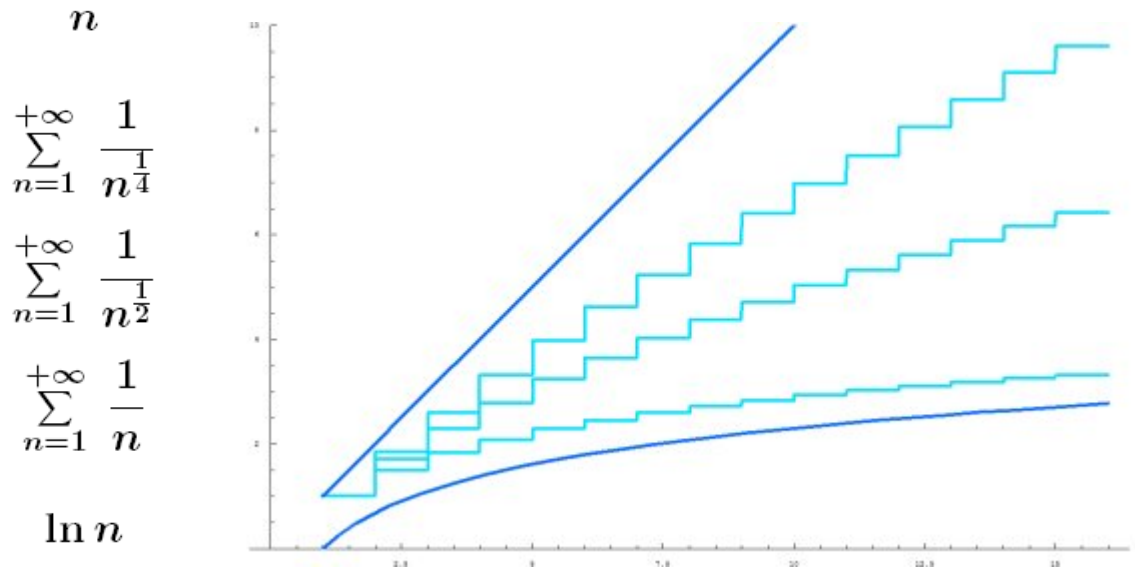
ou seja, que as sucessivas **somas harmónicas** s_n têm o mesmo **grau de crescimento** que a **função logaritmo**



- Significa isto que a série **diverge** sim, mas **“muito lentamente”**.

Por exemplo, para que uma soma parcial atinja o valor $s_n \approx 10$ são necessários **14000** termos e para que $s_n \approx 1000$ são necessários mais de **10^{435}** termos!

- Para $0 \leq p \leq 1$, quanto **menor** for o valor de p tanto **maior** é o **grau de divergência**, que varia entre $\ln n$ e n , para $p = 0$.



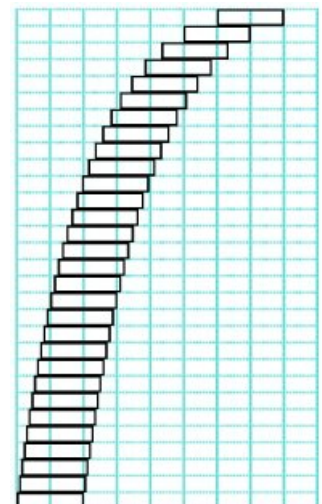
- Para valores de $p < 0$, a divergência torna-se evidentemente **“muito rápida”**, porque são séries do tipo,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^q$$

onde $q = -p > 0$.

- Uma curiosidade:

Demonstra-se que é possível empilhar uma torre inclinada de blocos iguais (tijolos, livros, CDs, ...) de tamanho (teoricamente) infinito, se os blocos estiverem sucessivamente desalinhados segundo os termos da série harmónica básica.



* Critérios de convergência para séries de termos não positivos

- Como vimos, para determinar a natureza de séries numéricas de **termos não negativos** podemos utilizar:
 - Critério de comparação
 - Critério de comparação por passagem ao limite
 - Critério do integral

- Como estudar então uma série **de termos não positivos**?

Como por exemplo,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - 2\sqrt{n}}$$

- Obviamente que,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - 2\sqrt{n}} = -1 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n} - 1}$$

e como o **produto** de uma série por um número real não nulo **mantém a sua natureza**, basta estudar a série de termos não negativos.

- Portanto a designação “**para séries de termos não negativos**”,
deve ser entendida no sentido de “**para séries de termos do mesmo sinal**”.

- A seguir vamos ver o que fazer quando os termos não têm sinal constante.