

⇒ Métodos Iterativos para Sistemas Não Lineares

- Consideremos um **sistema** de n **equações não lineares** a n incógnitas:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Na sua forma matricial, $F(x) = 0$ com,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Ao contrário dos sistemas lineares, é muito **difícil demonstrar a existência e unicidade** dos zeros $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de $F(x)$.
- A resolução de $F(x) = 0$, na maioria dos casos, só é possível por **métodos aproximados**.

Cada sucessiva aproximação tem a forma,

$$\mathbf{x}^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)$$

onde pretendemos que $\{ \mathbf{x}^{(k)} \} \rightarrow \alpha$.

* Método de Newton Generalizado

- Para $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ consideremos a **matriz Jacobiana**,

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

que assumimos ser **invertível**.

- Nesse caso,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} &\iff [\mathbf{J}(\mathbf{x})]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ &\iff \mathbf{x} = \mathbf{x} - [\mathbf{J}(\mathbf{x})]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

- O **Método de Newton Generalizado** consiste em calcular uma **sucessão de aproximações**,

$$\mathbf{x}^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right), \quad k = 1, 2, \dots$$

da **solução** $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ do sistema $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$,

partindo de uma **aproximação inicial** conveniente $\mathbf{x}^{(0)}$,

usando a relação,

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - [\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$$

- Também, a partir do **desenvolvimento de Taylor** de **ordem 1** em torno de $\mathbf{x}^{(k)}$, da função $F(\mathbf{x})$ calculado em $\mathbf{x} = \alpha$,

$$f_i(\alpha) \approx f_i(\mathbf{x}^{(k)}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) (\alpha_j - x_j^{(k)}) = 0$$

tomando α como a **nova aproximação** $\mathbf{x}^{(k+1)}$,

e assumindo que a **matriz Jacobiana** é invertível,

$$(\mathbf{J}(\mathbf{x}))_{ij} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) (\mathbf{x}), \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

podemos deduzir a mesma relação,

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - [\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$$

- Nesta relação é conveniente evitar o cálculo da **inversa da matriz Jacobiana**. Por isso é utilizada na forma:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) (\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$$

que conduz à **resolução de um sistema**

de n **equações lineares** nas n **incógnitas** $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)}$

Foi assim efectuada a **linearização** do problema original.

- O método:

Considerando $\Delta \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}$ o vector $\mathbf{x}^{(k+1)}$ pode ser calculado em **dois passos**:

1. Resolver o sistema $\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\Delta \mathbf{x}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$

2. Calcular $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)}$

exemplo: Resolver pelo Método de Newton generalizado,

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2x_3 = 1 \\ 2x_1x_2 + x_3 = 6 \\ x_1x_3 + 2x_2^2 = 1 \end{cases}$$

utilizando a aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 0, 1]^T$

• Partindo de $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2x_3 - 1 \\ 2x_1x_2 + x_3 - 6 \\ x_1x_3 + 2x_2^2 - 1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

• Calculamos $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 & x_3 & x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 & 1 \\ x_3 & 4x_2 & x_1 \end{bmatrix}$

- **1ª iteração:** $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(0)} = [1, 0, 1]^T$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O **sistema** para resolver $\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\Delta\mathbf{x}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$ consiste em,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Delta\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução é, $\Delta\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

- **Calculando** $\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k)}$

com $k = 0$ obtemos,

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- **2ª iteração:** com $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(1)}$

- Recalculando $-\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

temos o novo **sistema**,

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}$$

cuja solução é, $\Delta \mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 37/34 \\ -39/34 \\ -12/34 \end{bmatrix}$

o que nos permite obter, com $k = 1$, $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)}$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 37/34 \\ -39/34 \\ -12/34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37/34 \\ 29/34 \\ 56/34 \end{bmatrix}$$

- Note-se que esta aproximação $\mathbf{x}^{(2)} = [1.088235, 0.852941, 1.647059]^T$ ainda está bem longe do resultado pretendido $\alpha = [0.159098, 0.163872, 5.947856]^T$.

teorema: Sejam F de classe C^2 e α tal que $F(\alpha) = 0$.

Se $\det(\mathbf{J}(\alpha)) \neq 0$ então a **sucessão gerada pelo Método de Newton Generalizado** é **convergente** para α

qualquer que seja o **ponto inicial** $\mathbf{x}^{(0)}$ suficientemente próximo de α .

Verifica-se ainda que existe uma constante positiva C tal que,

$$\frac{\|\alpha - x^{(k+1)}\|}{\|\alpha - x^{(k)}\|^2} = c$$


ou seja a **convergência é quadrática**.

- Para o **exemplo anterior**, ao fim de **10 iterações**, e calculando a norma vectorial do máximo,

k	x_1	x_2	x_3	$\ x_k - x_{k-1}\ $	$\ e_k\ $
0	1.000000	0.000000	1.000000		4.947856
1	0.000000	2.000000	2.000000	2.000000	3.947856
2	1.088235	0.852941	1.647059	1.147059	4.300797
3	-5.850712	-5.297865	29.36768	27.72062	23.41982
4	-2.445027	-2.268177	15.54482	13.82285	9.596966
5	-0.960780	-0.920138	8.233546	7.311275	2.285690
6	1.043993	0.814904	11.25522	3.021672	5.307361
7	0.578240	0.475886	5.765444	5.489774	0.419142
8	0.152830	0.163623	6.215665	0.450222	0.267809
9	0.158825	0.163879	5.947947	0.267718	0.000273
10	0.159098	0.163872	5.947856	0.000273	0.000000

- Para $\alpha = [0.159098, 0.163872, 5.947856]^T$ podemos verificar que $\det(J(\alpha)) = 34.5994$, estando portanto garantida a convergência quadrática.
 - Contudo, com o **vector inicial** dado, só a partir da 7ª iteração o método começa efectivamente a **convergir** para a solução e a convergência só começa a ser **quadrática** a partir da 9ª iteração.
 - A convergência quadrática requer uma **aproximação inicial** $x^{(0)}$ suficientemente próxima de α .
-
- Tal como no caso das equações simples, o método de Newton pode ser encarado como um **caso particular do método do Ponto Fixo**.

* Método Iterativo de Ponto Fixo

- Para $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ pretendemos determinar $\alpha \in \mathbb{R}^n$ tal que,

$$G(\alpha) = \alpha$$

- O **Método Iterativo do Ponto Fixo** consiste em, dada uma **aproximação inicial** $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, calcular a **sucessão de aproximações** gerada por,

$$x^{(k+1)} = G(x^{(k)})$$

- Enquanto que no caso escalar do método do Ponto Fixo a **convergência** exigia que $|g'(x)| < 1$ no intervalo pretendido, para n dimensões será necessário exigir que $\rho(J_G(\alpha)) < 1$.
- Recorde também que $\rho(M) < 1$ é condição necessária e suficiente para a convergência dos métodos iterativos estacionários para sistemas lineares.

teorema: Assumindo que $G : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ **tem um ponto fixo** α no interior de D e que G é **continuamente diferenciável** numa vizinhança de α .

Sendo J_G a matriz Jacobiana de G

se $\rho(J_G(\alpha)) < 1$

então existe uma vizinhança S de α tal que $S \subset D$

onde, **para qualquer** $x^{(0)} \in S$,

todas as aproximações $x^{(k)}$ obtidas pelo processo iterativo de ponto fixo **estão em** D e a **sucessão converge** para α .

- Atendendo a que, para qualquer norma matricial natural $\rho(A) \leq \|A\|$, também neste caso basta encontrar uma norma da matriz Jacobiana $\|J_G(\alpha)\| < 1$.

exemplo: Resolver pelo Método do Ponto Fixo,

$$\begin{cases} 4x_1 - \cos(x_1 + x_2) = 4 \\ 3x_2 - \sin(x_1 + x_2) = 6 \end{cases}$$

- Passando à forma $x = G(x)$,

$$\begin{cases} x_1 = 1 + \frac{1}{4} \cos(x_1 + x_2) \\ x_2 = 2 + \frac{1}{3} \sin(x_1 + x_2) \end{cases}$$

- ou seja, $G(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{4} \cos(x_1 + x_2) \\ 2 + \frac{1}{3} \sin(x_1 + x_2) \end{bmatrix}$

- cuja matriz Jacobiana,

$$J_G(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \sin(x_1 + x_2) & -\frac{1}{4} \sin(x_1 + x_2) \\ \frac{1}{3} \cos(x_1 + x_2) & \frac{1}{3} \cos(x_1 + x_2) \end{bmatrix}$$

- Aplicando, por exemplo, a **norma 1** (máximo das somas por colunas),

$$\|J_G(x)\|_1 = \max\left\{\frac{1}{4}|\sin(x_1 + x_2)| + \frac{1}{3}|\cos(x_1 + x_2)|, \frac{1}{4}|\sin(x_1 + x_2)| + \frac{1}{3}|\cos(x_1 + x_2)|\right\}$$

- verificamos que,

$$\|J_G(x)\|_1 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$
- Portanto, $\rho(J_G(x)) < \|J_G(x)\|_1 < 1$ **para todo** $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$
 estando assim garantida a **convergência** do método,
 qualquer que seja a **aproximação inicial** escolhida.
- Podemos então escolher, **arbitrariamente**, $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1]^T$ e calcular:

k	x_1	x_2	g_1	g_2
0	1.00000	1.00000	0.89596	2.30310
1	0.89596	2.30310	0.75041	1.98085
2	0.75041	1.98085	0.77075	2.13297
3	0.77075	2.13297	0.75704	2.07854
4	0.75704	2.07854	0.76161	2.10042
5	0.76161	2.10042	0.75971	2.09198
6	0.75971	2.09198	0.76043	2.09529
7	0.76043	2.09529	0.76015	2.09400
8	0.76015	2.09400	0.76026	2.09450
9	0.76026	2.09450	0.76021	2.09431
10	0.76021	2.09431	0.76023	2.09438
11	0.76023	2.09438	0.76022	2.09435
12	0.76022	2.09435	0.76023	2.09436
13	0.76023	2.09436	0.76023	2.09436
...				

- ... até que seja cumprido algum **critério de paragem** estipulado.