

Capítulo 5 – Equações e Sistemas de Equações Não Lineares

⇒ Resolução Numérica de Equações Não Lineares

- o **problema** : Determinar os valores de X que satisfazem a **equação**,

$$f(x) = 0$$

⇒ Equações Diofantinas

- Equações polinomiais, apenas com **soluções inteiras**.

Diofanto de Alexandria [sec. III]

Caminhante! Aqui jaz Diofanto.
Os números dirão a duração da sua vida.
Cuja sexta parte foi ocupada por uma doce infância.
Decorrida mais uma duodécima parte da sua vida, o seu rosto cobriu-se
com barba. Passado mais um sétimo da sua vida casou. Cinco anos
depois, nasceu-lhe o seu único filho, que apenas durou metade da vida
do pai. Triste com a morte do seu filho, Diofanto viveu ainda quatro anos.
Diz-me, Caminhante, que idade tinha Diofanto quando a morte o levou?

- As equações diofantinas nem sempre têm solução. Por exemplo,

$$x^n + y^n = z^n$$

não tem solução para $n > 2$.

(*Último teorema de Fermat, só demonstrado em 1995*)

⇒ Equações polinomiais lineares, quadráticas, cúbicas e quárticas

- Equações polinomiais que têm **fórmulas resolventes**, umas mais complicadas do que outras...

- Vamos considerar apenas o caso de $f(x)$ ser uma **função real de variável real**.

➡ Equações transcendentais

- As **equações algébricas**, como por exemplo as polinomiais, envolvem apenas as operações aritméticas básicas. As **equações transcendentais** envolvem também funções trigonométricas, exponenciais, logarítmicas,...

$$f(x) = x - e^{-x} = 0$$

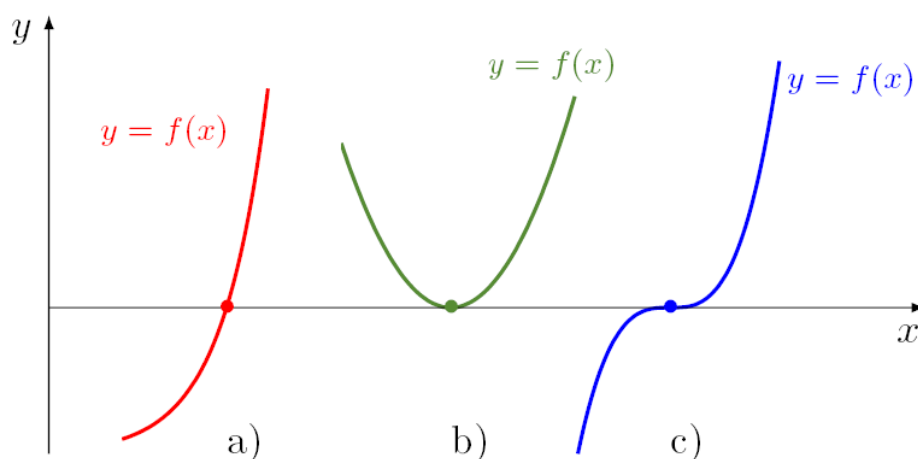
$$f(x) = x + \ln(x) = 0$$

$$f(x) = (2x + 1)^2 - 4\cos(\pi x) = 0$$

- As **soluções** das equações transcendentais podem obter-se apenas recorrendo a **métodos numéricos**.

* Raízes, Zeros e Multiplicidade

- Se $f(\alpha) = 0$ diz-se que α é uma **raiz da equação** $f(x) = 0$ ou que α é um **zero da função** $f(x)$:



- a) **zero simples** : $f(\alpha) = 0$
- b) **zero duplo** : $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$
- c) **zero triplo** : $f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = 0$

definição: A **multiplicidade de um zero** α da função $f(x)$ é o supremo m dos valores k tais que,

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{|f(x)|}{|x - \alpha|^k} = c < \infty$$

Se $m = 1$ o zero diz-se **simples**, se $m = 2$ o zero diz-se **duplo**, ...

exemplo1: $\alpha = 0$ é um zero **simples** da função $f(x) = \sin x$ porque,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{|x|} = 1$$

exemplo2: $\alpha = 0$ é um zero **duplo** da função $f(x) = 1 - \cos x$ porque,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|1 - \cos x|}{|x|^2} = \frac{1}{2}$$

nota: a multiplicidade de um zero pode não ser um número inteiro, nem sequer finita.

teorema: Se α for um zero da função $f(x)$ e se $f(x)$ for m vezes diferenciável em α então a **multiplicidade** de α é m se e só se,

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0$$

mas $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$

exemplo1: para $f(x) = \sin x$, $f(0) = 0$ mas $f'(0) \neq 0$, portanto $m = 1$

exemplo2: para $f(x) = 1 - \cos x$, $f(0) = f'(0) = 0$ mas $f''(0) \neq 0$, portanto $m = 2$

- Vamos utilizar apenas **métodos iterativos** ou de **aproximações sucessivas**.

* **Métodos Iterativos, Convergência e Erro**

- Os **métodos iterativos** para aproximar uma raiz α da equação $f(x) = 0$, partem do conhecimento de S valores aproximados $X_0, X_1, \dots, X_{S-1}$ da raiz α e com estes constroem uma **nova aproximação X_k** :

$$x_k = g_k(x_{k-s}, \dots, x_{k-1}), \quad k = s, s+1, \dots$$

- Este processo iterativo gera uma **sucessão de aproximações X_k** , cada uma com **erro** associado,

$$e_k = \alpha - x_k$$

- O método iterativo é **convergente** se,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha$$

$$\text{ou seja, } \lim_{k \rightarrow \infty} e_k = 0$$

definição: Seja $\{X_k\}$ uma sucessão convergente para α .

Se existirem duas constantes positivas p e C tais que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\alpha - x_{k+1}|}{|\alpha - x_k|^p} = C$$

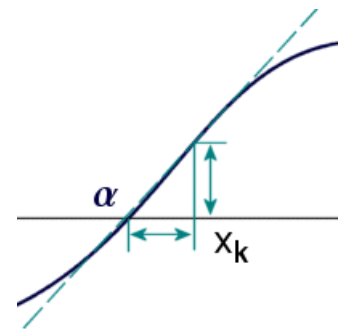
então diz-se que a sucessão $\{X_k\}$ é **convergente** para α **de ordem p** com uma **constante de convergência assintótica** igual a C .

- Se $p = 1$ a convergência diz-se de **primeira ordem** ou **linear** ($0 < c \leq 1$).
Se $p > 1$ a convergência diz-se **supralinear**.
Se $p = 2$ a convergência é de **segunda ordem** ou **quadrática**,
...
- Quanto maior for a **ordem de convergência** de um método iterativo menor será, em princípio, o **número de iterações** necessárias para atingir uma dada precisão.
No entanto a rapidez depende também do **esforço computacional** requerido em cada iteração.
- **Independentemente do método utilizado**, muitas vezes é possível obter um **majorante para o erro**:

teorema: Seja α a **raiz exacta** e x_k um **valor aproximado** da raiz da equação $f(x) = 0$ com $\alpha, x_k \in [a, b]$.

Se $f(x)$ for diferenciável em $[a, b]$ e $|f'(x)| \geq m > 0, \forall x \in [a, b]$ então,

$$|\alpha - x_k| \leq \frac{|f(x_k)|}{m}$$



demonstração: Pelo teorema do Valor Médio,

$$\frac{f(\alpha) - f(x_k)}{\alpha - x_k} = f'(\xi), \quad \xi \in \text{inter}(\alpha, x_k)$$

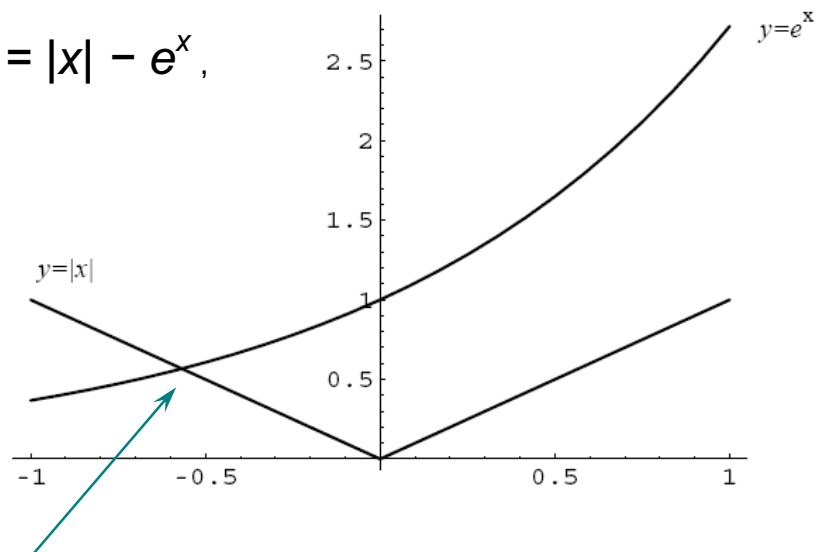
aplicando módulos,
$$|\alpha - x_k| = \frac{|f(x_k)|}{|f'(\xi)|}$$

e portanto,
$$|\alpha - x_k| \leq \frac{|f(x_k)|}{m}$$

* Localização e Separação das Raízes

- **Antes de aplicar um método iterativo** para resolver a equação $f(x) = 0$, é necessário obter uma **aproximação inicial**, o que exige a **separação** das possíveis raízes em intervalos tão pequenos quanto possível.
- O método mais prático consiste em analisar a **representação gráfica** de $f(x)$, ou da combinação dos termos que formam a sua expressão analítica.

Por exemplo, para $f(x) = |x| - e^x$,



primeiro, verificamos que

existe um **ponto de intersecção** de $|x|$ com e^x no intervalo $(-1, 0)$

Depois, **confirmamos** essa observação, com base em **dois resultados**:

1. Se $f(x)$ é uma função real e contínua entre $x = a$ e $x = b$, sendo a e b números reais, tendo $f(a)$ e $f(b)$ **sinais contrários**, então **existe** pelo menos uma raiz real entre a e b .
2. Se a **derivada** de $f(x)$ **existe**, é **contínua** e **mantém o sinal** no intervalo (a, b) , então **a raiz é única**.

Para o exemplo: $f(x) \in C((-1, 0))$

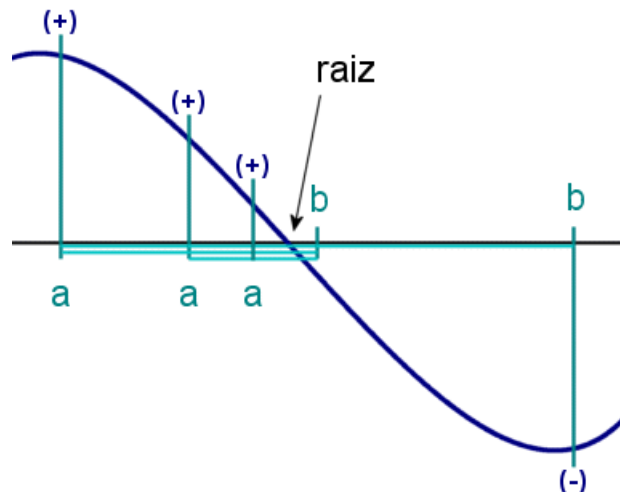
$$f(-1) = 0.632 > 0 \quad \text{e} \quad f(0) = -1 < 0$$

$$f'(x) = -1 - e^x < 0 \quad \text{em todo o intervalo } (-1, 0)$$

* Métodos Intervalares

➔ Método das Bissecções Sucessivas

- Partindo de um intervalo (a, b) que contém a raiz, construir uma **sucessão de subintervalos**, sendo cada um deles o semi-intervalo do anterior que contém a raiz.



- Algoritmo:**

$$\{ \alpha \in (a, b) \wedge \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \wedge f(a) f(b) < 0 \}$$

$$fa \leftarrow f(a)$$

enquanto $|a - b| / 2 \geq \varepsilon$ **fazer**

$$meio \leftarrow (a + b) / 2$$

$$fm \leftarrow f(meio)$$

$$\text{se } (fa > 0) = (fm > 0)$$

$$\text{então } \{ \alpha \in (meio, b) \} \quad a \leftarrow meio$$

$$\text{senão } \{ \alpha \in (a, meio) \} \quad b \leftarrow meio$$

fim enquanto

$$\{ \alpha \in (a, b) \wedge |a - b| / 2 < \varepsilon \}$$

- note que:
 - Só é necessário calcular o valor de $f(x)$ **uma vez** por iteração.
 - Não é necessária uma **multiplicação** para comparar os sinais.
 - Em aritmética de reais é extremamente improvável atingir o valor exacto da raiz, pelo que não vale a pena **testar a igualdade**.
 - A sequência de subintervalos $\{ (a_k, b_k) \}$ foi representada pelos sucessivos valores das variáveis a e b .
- Para um dado **erro absoluto máximo** ε , em cada iteração k , utilizámos o **teste**:

$$\frac{|b_k - a_k|}{2} \leq \varepsilon$$

de modo a que o **erro** cometido seja **inferior à semi-amplitude do intervalo**.

Deste modo, sendo C_k os sucessivos **pontos médios**,

$$|c_1 - \alpha| \leq \frac{b-a}{2}; \quad |c_2 - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^2}; \dots; \quad |c_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

o que nos permite estimar o **número n de iterações** necessárias, para garantir uma aproximação da raiz com um erro absoluto máximo de ε :

$$\frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon$$

ou seja,

$$2^n \geq \frac{b-a}{\varepsilon} \Rightarrow n \geq \frac{\ln \frac{b-a}{\varepsilon}}{\ln 2}$$

para o mesmo exemplo: $f(x) = |x| - e^x$, com $\varepsilon = 10^{-6}$

k	a_k	b_k
1	-1.000000	0.000000
2	-1.000000	-0.500000
3	-0.750000	-0.500000
4	-0.625000	-0.500000
5	-0.625000	-0.562500
6	-0.593750	-0.562500
7	-0.578125	-0.562500
8	-0.570313	-0.562500
9	-0.570313	-0.566406
10	-0.568359	-0.566406
11	-0.567383	-0.566406
12	-0.567383	-0.566895
13	-0.567383	-0.567139
14	-0.567261	-0.567139
15	-0.567200	-0.567139
16	-0.567169	-0.567139
17	-0.567154	-0.567139
18	-0.567146	-0.567139
19	-0.567146	-0.567142
20	-0.567144	-0.567142

$$\frac{b-a}{2^n} = 0.00000095 \longrightarrow$$

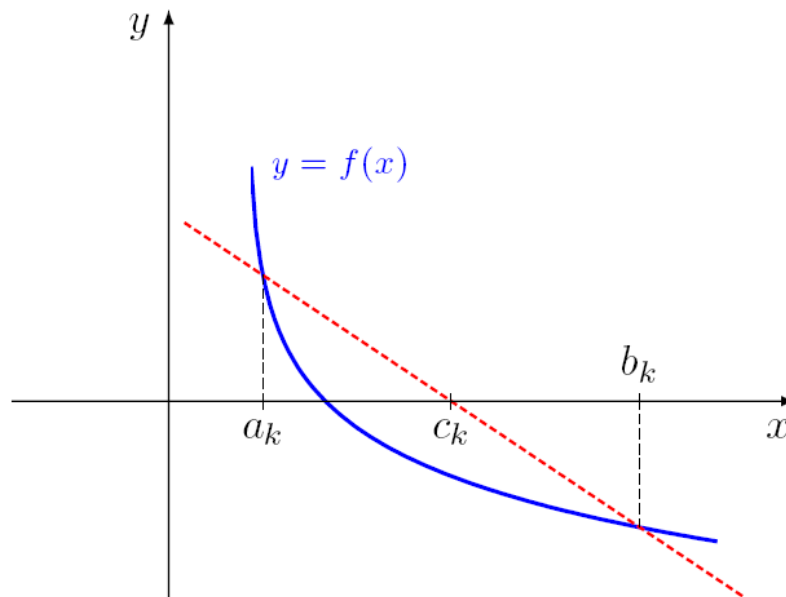
$$n \geq \frac{\ln \frac{b-a}{\varepsilon}}{\ln 2} = 19.931569$$

- Uma **vantagem** do método das bissecções sucessivas é que **converge sempre** (desde que exista raiz no intervalo inicial).
- Outra **vantagem** é a possibilidade de **prever um majorante** para o erro cometido ao fim de um certo número de iterações.
- O **custo** computacional de cada iteração é **muito baixo**.
- A pior **desvantagem** reside no facto da sua **convergência** ser **muito lenta** (muitas iterações) quando comparada com a dos outros métodos.

Verifique que o método das bissecções sucessivas é **linear**, com **constante de convergência** igual a **1/2**.

➔ Método da Corda Falsa

- O Método da Corda Falsa pode ser encarado como um **melhoramento** do Método das Bissecções Sucessivas.
- Em vez do ponto médio, um ponto C_k é determinado como a **intersecção da secante** que passa pelos pontos $(a_k, f(a_k))$ e $(b_k, f(b_k))$ com o eixo dos xx .



- A partir da equação da secante,

$$y - f(b_k) = \frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k} (x - b_k)$$

e fazendo $y = 0$ obtemos,

$$c_k = b_k - \frac{f(b_k)}{f(b_k) - f(a_k)} (b_k - a_k)$$

- Note-se que os sucessivos cálculos desta fórmula **não provocam** efeitos de **cancelamento subtractivo** pois $f(b_k)$ e $f(a_k)$ têm sinais contrários.

* Métodos iterativos dependentes de um só ponto

- Em cada iteração, a nova aproximação **depende apenas da anterior**.

➔ Método Iterativo do Ponto Fixo

- Pretendemos **determinar a solução** α de uma equação não linear da forma,

$$x = g(x)$$

- Dada uma equação na forma $f(x) = 0$ é sempre possível fazer,

$$x = \underbrace{x + f(x)}_{g(x)}$$

- Mais geralmente podemos considerar,

$$g(x) = x + c(x)f(x)$$

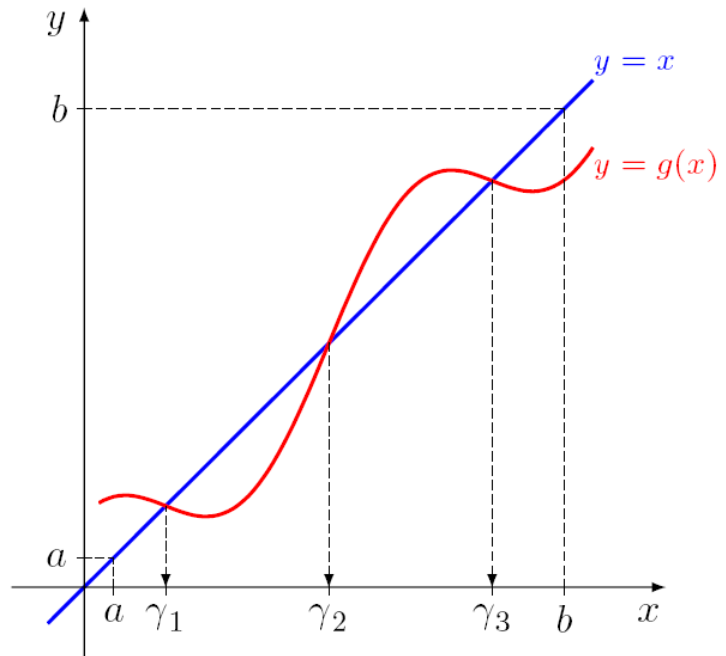
onde $c(x)$ é uma função contínua, **não nula** e **limitada** no intervalo $I = [a, b]$ que contém a raiz α de $f(x) = 0$.

definição: Um **ponto fixo** de uma função $g(x)$ é um número real α tal que $\alpha = g(\alpha)$.

- Dada uma aproximação inicial $x_0 \in I$, **o método iterativo do ponto fixo** consiste numa **sucessão de aproximações** $\{x_k\} \rightarrow \alpha$ tal que,

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- Geometricamente, os **pontos fixos** de uma função $y = g(x)$ são os pontos de intersecção de $y = g(x)$ com $y = x$



- Assim, se $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$, **determinar a raiz** de $f(x) = 0$ em $[a, b]$ é o mesmo que **procurar o ponto fixo** de $g(x)$ em $[a, b]$.

➡ **Exemplo: Método Babilónico (1800 - 1600 AC)**
para calcular a Raiz Quadrada de um número



0. Começar com uma estimativa
1. Dividir o número pela estimativa
2. Calcular a média entre essa divisão e a estimativa
3. Fazer desta média a nova estimativa
4. e voltar a 1.

- Ou seja, o cálculo de $\sqrt{a}$ consiste na **sucessão de aproximações**:

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{x_k} + x_k \right)$$

- Experimentemos para $a = 16$,
começando com $x_0 = 10$:

0	10.00000000
1	5.80000000
2	4.27931034
3	4.00911529
4	4.00001036
5	4.00000000

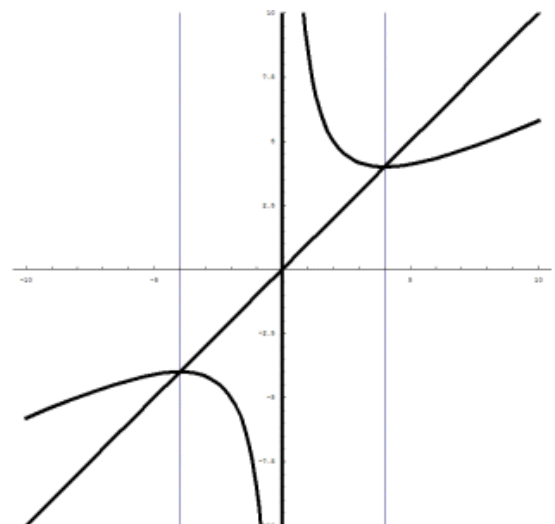
- O método utilizado tem por base a **equação**,

$$x = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{a}{x} + x \right)}_{g(x)}$$

obviamente equivalente a $x^2 = a$

e consiste na **pesquisa de um ponto fixo** da função $g(x)$

Para $a = 16$ a função $g(x)$
tem **dois pontos fixos**,
em $x = 4$ e $x = -4$

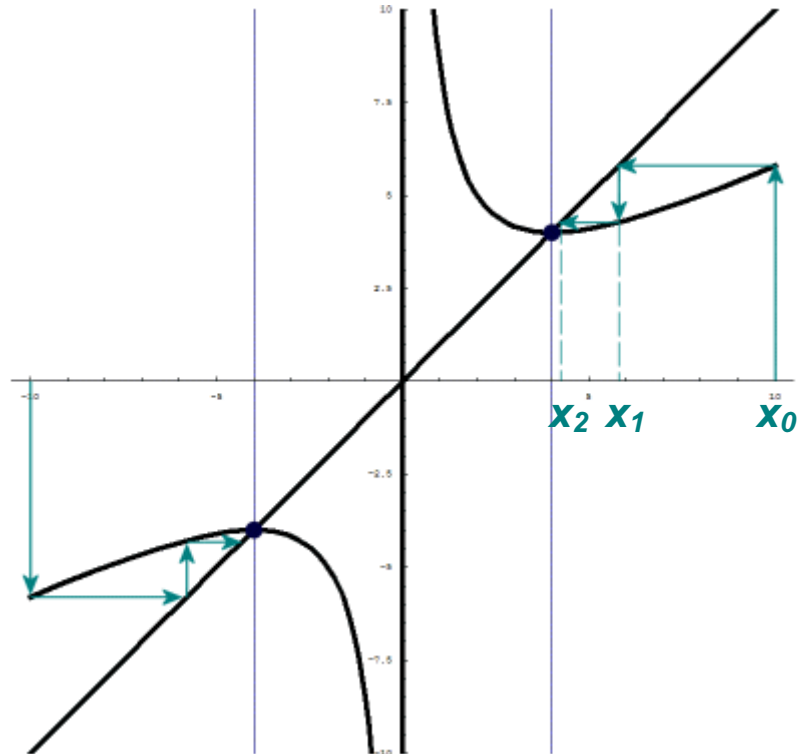


- E de facto, se partirmos de uma **estimativa inicial negativa**, o método babilónico encontra a **raiz negativa** de 16.

0	-10.00000000
1	-5.80000000
2	-4.27931034
3	-4.00911529
4	-4.00001036
5	-4.00000000

- Como funciona?

A partir de uma aproximação inicial x_0 , uma **sucessão de aproximações** da forma $x_{k+1} = g(x_k)$ **converge para um ponto fixo** da função $g(x)$.



- Porque funciona?

teorema: Seja $g(x)$ uma **função contínua** e $\{x_k\}$ uma sucessão gerada pelo **método iterativo do ponto fixo** $x_{k+1} = g(x_k)$.

Se $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha$ então α é um **ponto fixo** de $g(x)$.

demonstração: Se $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha$ então também $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \alpha$
e como $g(x)$ uma função contínua,

$$g(\alpha) = g\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \alpha$$

portanto α é um **ponto fixo** de $g(x)$.

- Quando **existe** ponto fixo?

teorema: Seja $g(x) \in C([a, b])$.

Se para todo o $x \in [a, b]$, se verifica que $g(x) \in [a, b]$

(isto é, se g for uma **contracção**)

então g tem **pelo menos um ponto fixo** em $[a, b]$.

demonstração: Se $g(a) = a$ ou $g(b) = b$ então o ponto fixo é óbvio.

Caso contrário defina-se a função auxiliar h em $[a, b]$,

$$h(x) = x - g(x)$$

Como h é contínua em $[a, b]$ e

$$g(a) \in [a, b] \Rightarrow h(a) = a - g(a) < 0$$

$$g(b) \in [a, b] \Rightarrow h(b) = b - g(b) > 0$$

então existe **pelo menos** um valor $\alpha \in (a, b)$ tal que $h(\alpha) = 0$.

Logo $\alpha = g(\alpha)$ e α é um **ponto fixo**.

- Quando é **único** o ponto fixo?

teorema: Se $g'(x)$ está definida em $[a, b]$ e existe uma **constante positiva** $L < 1$,

com $|g'(x)| \leq L < 1$ para todo o $x \in [a, b]$,

então $g(x)$ tem **um único ponto fixo** em $[a, b]$.

demonstração: Suponhamos que existiam **dois pontos fixos** $\alpha_1, \alpha_2 \in [a, b]$.

Então, pelo Teorema do Valor Médio, existiria um

$c \in (\alpha_1, \alpha_2) \subseteq (a, b)$ tal que,

$$g'(c) = \frac{g(\alpha_2) - g(\alpha_1)}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

mas nesse caso, sendo α_1 e α_2 pontos fixos,

$$\frac{g(\alpha_2) - g(\alpha_1)}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = 1$$

donde $g'(c) = 1$, contradizendo a hipótese de $|g'(x)| < 1$ para todo o $x \in [a, b]$.

Logo **não é possível** existirem **dois pontos fixos**.

- Quando **converge** o método do ponto fixo?

Teorema do Ponto Fixo:

Sejam $g(x), g'(x) \in C([a, b])$:

$g(x) \in [a, b]$ para todo o $x \in [a, b]$,

$|g'(x)| < 1$ para todo o $x \in [a, b]$,

$x_0 \in [a, b]$.

Então a sucessão $\{x_k\}$ gerada por $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$

converge para o único ponto fixo $\alpha \in [a, b]$.

demonstração: Nas condições da hipótese e pelo teorema anterior, **existe e é único** um **ponto fixo** α da função $g(x)$ no intervalo $[a, b]$.

Resta demonstrar que o método **converge** para ele.

Consideremos o **erro absoluto** na iteração $k+1$:

$$|e_{k+1}| = |\alpha - x_{k+1}| = |g(\alpha) - g(x_k)|$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\xi_k \in \text{inter}(\alpha, x_k)$ tal que,

$$g'(\xi_k) = \frac{g(\alpha) - g(x_k)}{\alpha - x_k}$$

Consideremos o número positivo L , tal que $|g'(x)| = L < 1$ para todo o $x \in [a, b]$. Assim,

$$|g(\alpha) - g(x_k)| \leq L |\alpha - x_k|$$

ou seja, $|e_{k+1}| \leq L |e_k|$ para $k = 0, 1, 2, \dots$

Aplicando esta relação indutivamente, temos,

$$|e_k| \leq L^k |e_0|$$

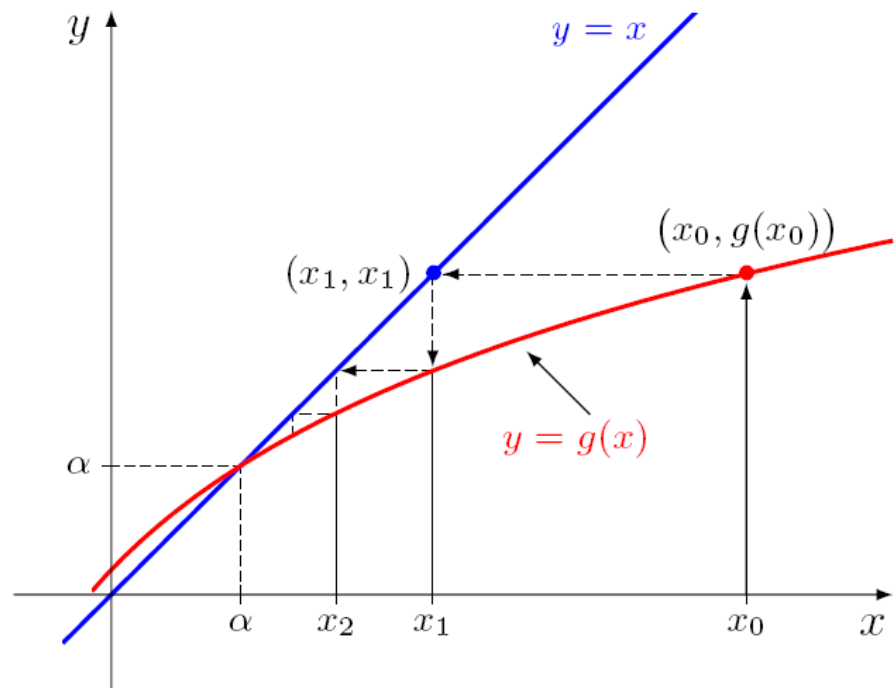
e uma vez que $L < 1$, então,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |e_k| = 0$$

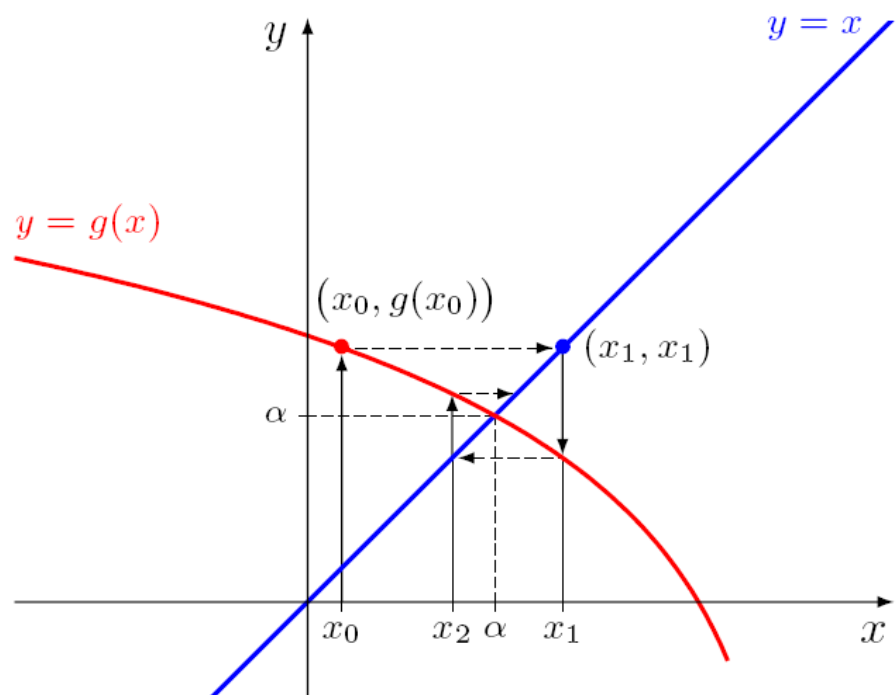
Assim, desde que a aproximação inicial $x_0 \in [a, b]$, o método iterativo de ponto fixo é **convergente**.

- **Como converge** o método do ponto fixo?

Convergência **monótona** quando $0 < g'_0(x) < 1$:



Convergência **oscilante** quando $-1 < g'_0(x) < 0$:



- Quando **diverge** o método do ponto fixo?

teorema: Seja $g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Se: $g, g' \in C(D)$

$g(x)$ tem um ponto fixo $\alpha \in [a, b] \subset D$,

$|g'(x)| > 1$ para todo o $x \in D$,

$x_0 \in [a, b]$ (com $x_0 \neq \alpha$) .

Então a sucessão $\{x_k\}$ gerada por $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$,

não converge para o ponto fixo $\alpha \in [a, b]$.

demonstração: De modo análogo ao anterior,

considerando o **erro absoluto** na iteração $k+1$:

$$|e_{k+1}| = |\alpha - x_{k+1}| = |g(\alpha) - g(x_k)|$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\xi_k \in \text{inter}(\alpha, x_k)$

tal que,

$$g'(\xi_k) = \frac{g(\alpha) - g(x_k)}{\alpha - x_k}$$

Ou seja, $|e_{k+1}| = |g'(\xi_k)| |e_k|$

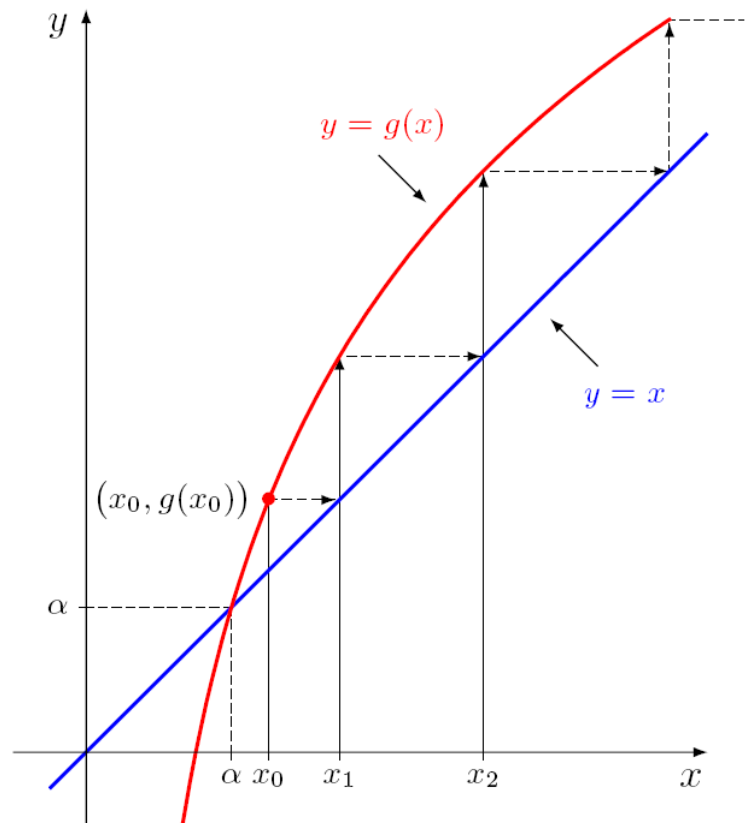
Contudo, neste caso $|g'(\xi_k)| > 1$

e portanto $|e_{k+1}| > |e_k|$

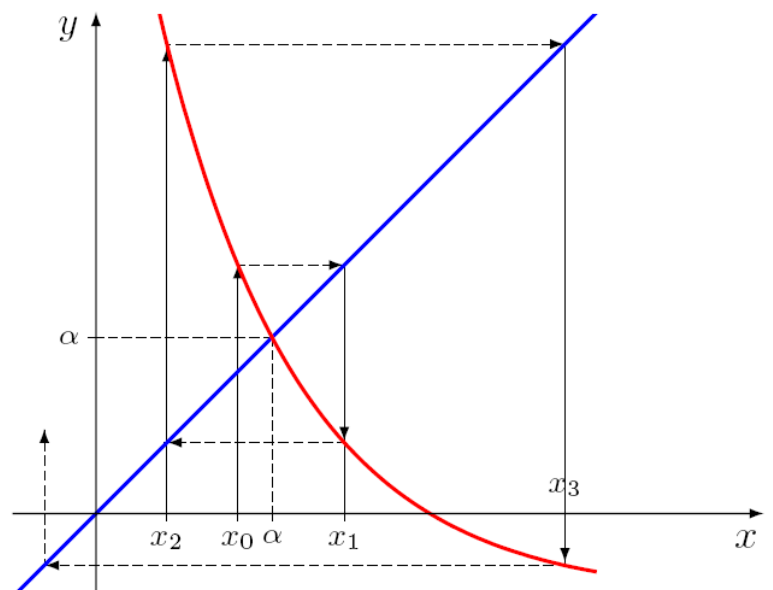
Assim, o método iterativo de ponto fixo é **divergente**.

- **Como diverge** o método do ponto fixo?

Divergência **monótona** quando $g'(x) > 1$:



Divergência **oscilante** quando $g'(x) < -1$:



- Quando converge, qual a **ordem de convergência** do método do ponto fixo?

Consideremos que $g(x), g'(x) \in C([a, b])$

e que o método do ponto fixo é **convergente** para α .

1) No caso de $g'(\alpha) \neq 0$

Como vimos, $|e_{k+1}| = |g'(\xi_k)| |e_k|$, $\xi_k \in \text{inter}(\alpha, x_k)$

ou seja, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} |g'(\xi_k)| = |g'(\alpha)|$

Portanto, no caso de $g'(\alpha) \neq 0$, e como $|g'(\alpha)| < 1$,

então o método do ponto fixo apresenta **ordem de convergência linear**

sendo $|g'(\alpha)|$ a **constante assintótica** de convergência.

2) No caso de $g'(\alpha) = 0$ e $g''(\alpha) \neq 0$

Assumindo que $g(x) \in C^2([a, b])$, consideremos o desenvolvimento de Taylor de ordem 1 em torno de α :

$$g(x) = g(\alpha) + g'(\alpha)(x - \alpha) + \frac{g''(\xi)}{2!}(x - \alpha)^2$$

$$\xi \in \text{inter}(x, \alpha)$$

Para $X = X_k$ e como $g'(\alpha) = 0$, com $g''(\alpha) \neq 0$,

$$x_{k+1} = g(x_k) = g(\alpha) + \frac{g''(\xi_k)}{2}(x_k - \alpha)^2$$

$$\xi_k \in \text{inter}(x_k, \alpha)$$

e uma vez que $\alpha = g(\alpha)$,

$$|e_{k+1}| = \frac{|g''(\xi_k)|}{2} |e_k|^2$$

Assim, se o método for convergente,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|g''(\xi_k)|}{2} = \frac{|g''(\alpha)|}{2}$$

Portanto, no caso de $g'(\alpha) = 0$ e $g''(\alpha) \neq 0$,

o método do ponto fixo apresenta **ordem de convergência quadrática**

sendo $|g''(\alpha)|/2$ a **constante assintótica** de convergência.

- 3)** De um modo geral, assumindo que $g(x) \in C^n([a, b])$, se

$$g'(\alpha) = g''(\alpha) = \dots = g^{(n-1)}(\alpha) = 0$$

mas $g^{(n)}(\alpha) \neq 0$

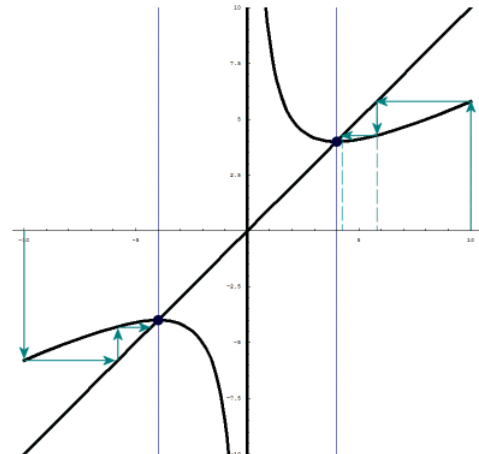
prova-se que o método iterativo do ponto fixo apresenta **ordem de convergência n** .

➡ Voltando ao Método Babilónico

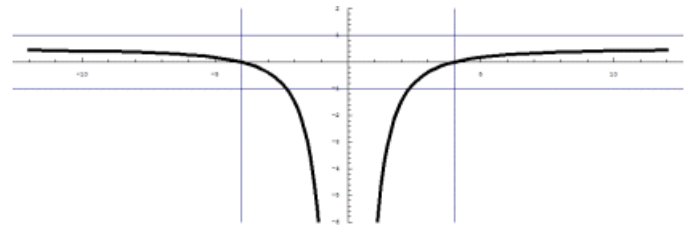
para calcular a Raiz Quadrada de $a = 16$

- Onde, $g(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{x} + x \right)$

tem uma descontinuidade em $x = 0$



- Derivando, $g'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{x^2} \right)$ e $g'(4) = 0$



verificamos que, na maior parte dos casos, $|g'(x)| < 1$

- A segunda derivada, $g''(x) = \frac{a}{x^3}$ e $g''(4) / 2 = 0.125$

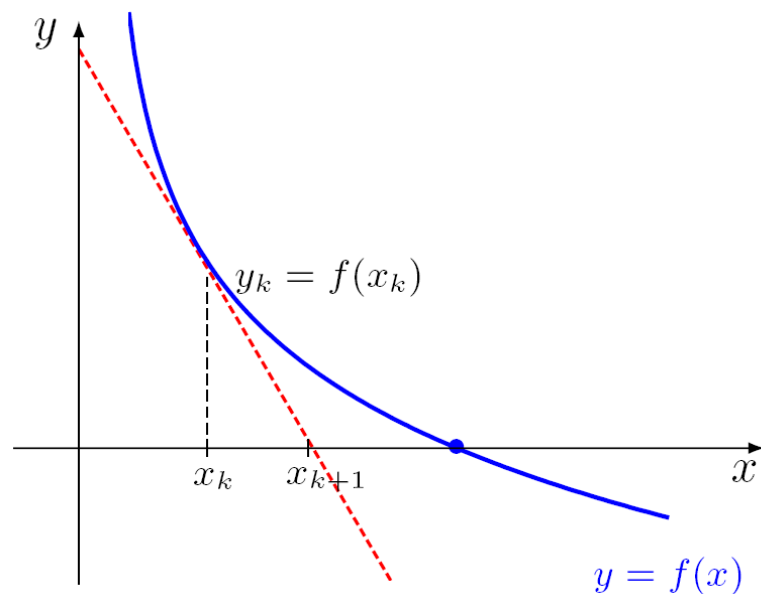
- Portanto a convergência é **quadrática**, com,

k	x_k	$ e_k $	$ e_{k+1} / e_k ^2$
0	10.00000000	6.00000000	
1	5.80000000	1.80000000	0.05000000
2	4.27931034	0.27931034	0.08620690
3	4.00911529	0.00911529	0.11684126
4	4.00001036	0.00001036	0.12471579
5	4.00000000	0.00000000	0.12499660

* Método de Newton-Raphson (ou Método da Tangente)

➡ Interpretação Geométrica

- Em cada iteração x_k , a curva $y = f(x)$ é aproximada pela sua **tangente** e a **intersecção** desta com o eixo dos xx é a nova aproximação x_{k+1} .



- A **equação da tangente** à curva no ponto $(x_k, f(x_k))$ é,

$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

e a sua **intersecção** com o eixo dos xx determina a **nova aproximação**,

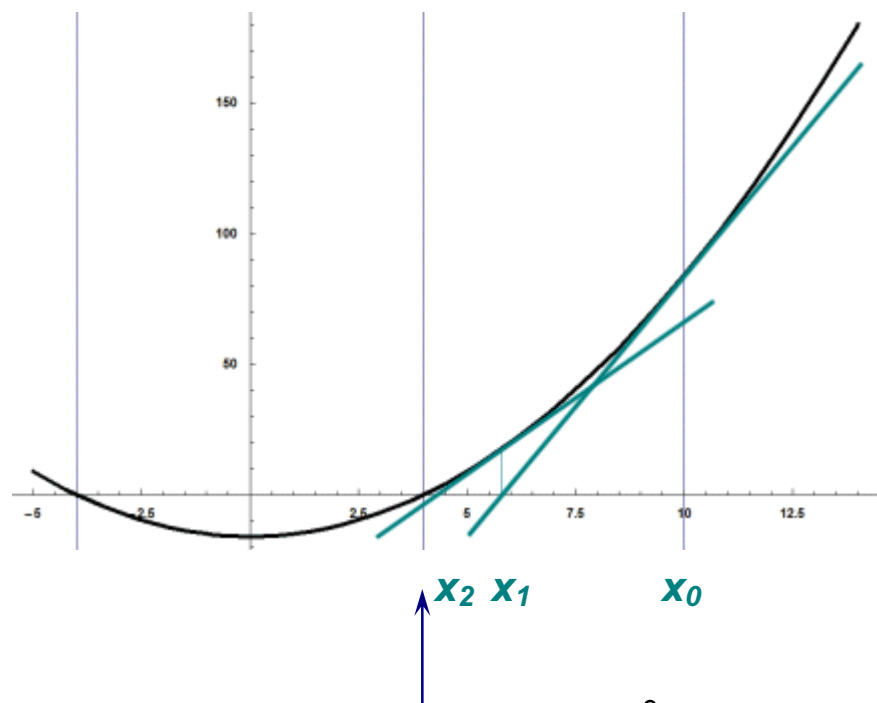
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

- A partir de uma aproximação inicial x_0 esta fórmula gera uma **sucessão** $\{x_k\}$ que, em certos casos, deverá convergir para um zero da função.

- Por exemplo, para a função $f(x) = x^2 - a$,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{x_k} + x_k \right)$$

e para o caso particular de $a = 16$, com a aproximação inicial $x_0 = 10$,



a sucessão das aproximações tende para um **zero** de $f(x) = x^2 - 16$.

k	x_k
0	10.00000000
1	5.80000000
2	4.27931034
3	4.00911529
4	4.00001036
5	4.00000000

o que já não era novidade na antiga Babilónia ...

➔ **Newton-Raphson como caso particular do Método do Ponto Fixo**

- Dada uma equação $f(x) = 0$, podemos passar para a forma $x = g(x)$ através da relação,

$$g(x) = x + c(x)f(x)$$

onde $c(x)$ é uma função contínua, **não nula** e **limitada** no intervalo $[a, b]$ que **contém a raiz** α de $f(x) = 0$.

- Pretendemos **definir** $c(x)$ de modo a que o método do ponto fixo (no caso de convergir) tenha uma ordem de **convergência pelo menos quadrática**.
- Assumindo que $f(x)$ e $c(x)$ são **diferenciáveis** em $[a, b]$,

$$g'(x) = 1 + c'(x)f(x) + c(x)f'(x)$$

e calculando no ponto α ,

$$g'(\alpha) = 1 + c'(\alpha)f(\alpha) + c(\alpha)f'(\alpha)$$

- Para que a convergência seja **quadrática**, devemos ter $g'(\alpha) = 0$.

E como $f(\alpha) = 0$ então,

$$c(\alpha) = -\frac{1}{f'(\alpha)}$$

Assim, **basta escolher**,

$$c(x) = -\frac{1}{f'(x)}$$

assumindo que $f'(x) \neq 0$ em todo o intervalo $[a, b]$.

- Substituindo, temos a nova forma,

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

que corresponde ao **Método de Newton-Raphson**,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

e que, por esta construção, **se convergir é quadrático**.

➡ O Método de Newton-Raphson a partir da série de Taylor

- Suponha-se que $f \in C^2([a, b])$, que o Método de Newton-Raphson é convergente e considere-se o desenvolvimento de Taylor de ordem 1 em torno de x_k :

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{f''(\xi_k)}{2}(x - x_k)^2$$

$$\xi_k \in \text{inter}(x, x_k)$$

Calculando em $x = \alpha$,

$$0 = f(\alpha) = f(x_k) + f'(x_k)(\alpha - x_k) + \frac{f''(\xi_k)}{2}(\alpha - x_k)^2$$

$$\xi_k \in \text{inter}(\alpha, x_k)$$

donde,

$$\alpha = x_k - \underbrace{\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}_{\text{nova aproximação}} - \underbrace{\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}(\alpha - x_k)^2}_{\text{erro cometido}}$$

e assim obtemos a **nova aproximação** x_{k+1} e o **erro** cometido.

- Note-se que assumimos que $|\alpha - x_k|$ é pequeno, para todo o k , incluindo a aproximação inicial $k = 0$.

➔ Ordem de Convergência do Método de Newton-Raphson

- Pela expressão anterior,

$$\alpha - x_{k+1} = -\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}(\alpha - x_k)^2$$

donde, tomando módulos,

$$\frac{|\alpha - x_{k+1}|}{|\alpha - x_k|^2} = \frac{|f''(\xi_k)|}{2|f'(x_k)|}$$

- Assim, no caso de o método convergir,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\alpha - x_{k+1}|}{|\alpha - x_k|^2} = \frac{|f''(\alpha)|}{2|f'(\alpha)|}$$

e a **convergência é quadrática**

com **constante** de convergência assintótica igual a $\frac{|f''(\alpha)|}{2|f'(\alpha)|}$

- **Observação:**

Se o zero de f não for simples a ordem do método degrada-se. Mostra-se que, no caso dos **zeros de multiplicidade 2** a convergência é apenas **linear**.

➔ **Um Majorante do Erro Absoluto**

- Pela expressão anterior,

$$\alpha - x_{k+1} = -\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)} (\alpha - x_k)^2, \quad \xi_k \in \text{inter}(\alpha, x_k)$$

temos,

$$|e_{k+1}| = \frac{|f''(\xi_k)|}{2|f'(x_k)|} |e_k|^2$$

- Se identificarmos um **majorante da segunda derivada** e um **minorante da primeira derivada**, para todo o intervalo,

$$M_2 \geq |f''(x)|, \quad \forall x \in [a, b]$$

$$0 < m_1 \leq |f'(x)|, \quad \forall x \in [a, b]$$

é simples calcular:

$$|e_{k+1}| \leq \frac{M_2}{2m_1} |e_k|^2$$

➔ Uma estimativa do Erro Absoluto

- Assumindo que $f \in C([a, b])$ e que o Método de Newton-Raphson é convergente, pelo Teorema do Valor Médio,

$$\frac{f(x_k) - f(\alpha)}{x_k - \alpha} = f'(\xi_k), \quad \xi_k \in \text{inter}(\alpha, x_k)$$

Donde, assumindo ainda que $f'(x) \neq 0, \forall x \in \text{inter}(\alpha, x_k)$

$$x_k - \alpha = \frac{f(x_k)}{f'(\xi_k)}$$

- Por outro lado, da expressão do próprio método,

$$x_k - x_{k+1} = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

- Para k suficientemente grande, $x_{k+1} \approx \alpha$, donde, $\xi_k \approx x_k$ e portanto,

$$x_k - x_{k+1} \approx x_k - \alpha$$

- Assim, podemos estimar,

$$|e_k| \approx |x_{k+1} - x_k|$$

- Em termos algorítmicos, é mais cómodo calcular,

$$e_{k-1} \approx |x_k - x_{k-1}|$$

- De facto, para o **exemplo anterior**,

k	x_k	$ e_k $	$ e_{k-1} $	$ x_k - x_{k-1} $
0	10.00000000	6.00000000		
1	5.80000000	1.80000000	6.00000000	4.20000000
2	4.27931034	0.27931034	1.80000000	1.52068966
3	4.00911529	0.00911529	0.27931034	0.27019506
4	4.00001036	0.00001036	0.00911529	0.00910492
5	4.00000000	0.00000000	0.00001036	0.00001036

➔ Critério de Convergência do Método de Newton-Raphson

teorema: Seja $f \in C^2([a, b])$. Se

- (i) $f(a)f(b) < 0$;
- (ii) $f'(x) \neq 0$ para todo o $x \in [a, b]$;
- (iii) $f''(x)$ não muda de sinal em $[a, b]$;
- (iv) $\left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right| < b - a$ e $\left| \frac{f(b)}{f'(b)} \right| < b - a$

Então, para qualquer $x_0 \in [a, b]$, a sucessão $\{x_k\}$ gerada pelo Método de Newton-Raphson **converge para o único zero** de f em $[a, b]$.

observações:

- (i) + (ii) garantem a **existência de uma só solução** em $[a, b]$.
- (ii) + (iii) garantem que a função é **monótona**, convexa ou côncava.
- (iv) garante que as **tangentes** à curva em $(a, f(a))$ e em $(b, f(b))$ **intersectam** o eixo dos xx em (a, b) .

➔ Vantagens do Método de Newton-Raphson

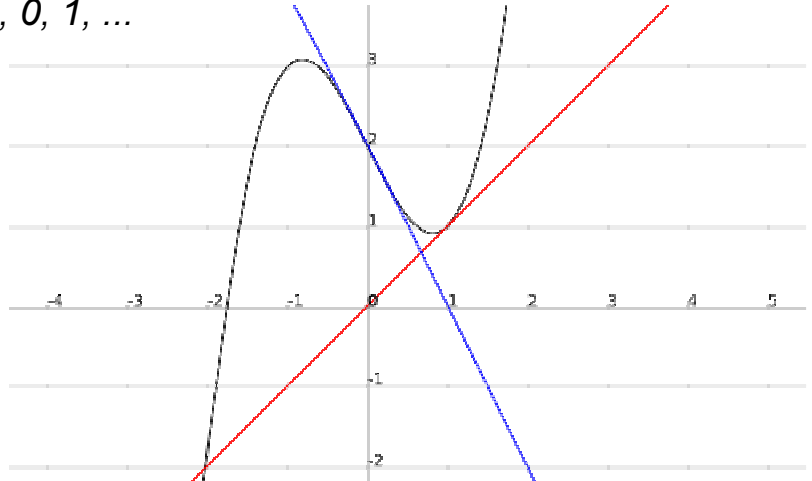
- Quando converge, tem **convergência quadrática**.
- Necessita apenas de **um ponto**, para estimativa inicial.

➔ Desvantagens do Método de Newton-Raphson

- Exige uma **boa aproximação inicial**. Caso contrário pode divergir, ou encontrar outra raiz.
- Exige o **cálculo da derivada** em cada iteração, o que pode ser lento ou mesmo impossível.
- Exige que a **derivada** (no denominador) **nunca se anule**. Note que, mesmo para valores da derivada **próximos de zero**, a intersecção da tangente com o eixo dos xx é um ponto muito afastado...

➡ **Alguns casos patológicos do Método de Newton-Raphson**

- Para a função $f(x) = x^3 - 2x + 2$, se escolhermos $x_0 = 0$, o método calcula $x_1 = 1$, gerando a sucessão de aproximações:
 $0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$



- Para a função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ o método gera uma sucessão tal que, $x_{k+1} = -2x_k$
- Para $f(x) = \sqrt{x}$, obtém-se $x_{k+1} = -x_k$ de modo que, para qualquer x_0 , o método gera a sucessão:
 $x_0, -x_0, x_0, -x_0, x_0, -x_0, \dots$

- Todo o **ponto de inflecção** provoca um afastamento da raiz.

...

