Capítulo 4 – Diferenciação e Integração Numéricas

⇨ Diferenciação Numérica

- Por vezes é necessário obter **valores das derivadas** de uma função **sem recorrer à respectiva expressão analítica**, por esta não ser conhecida ou por ser demasiado complicada.

- As **fórmulas de diferenciação numérica** podem ser obtidas por:
  - polinómios de Taylor
  - polinómios interpoladores de Lagrange

⁕ *Aproximação da primeira derivada*

- Considere-se **conhecidos** os **valores da função em 3 nós** x_{i-1}, x_i e x_{i+1} respectivamente, $f(x_{i-1})$, $f(x_i)$ e $f(x_{i+1})$.

  Considere-se ainda que o **espaçamento** entre nós consecutivos é **constante** de valor h ou seja, $h = x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i$.

- Com base nestes valores, vamos deduzir **três fórmulas**.

- Fórmula de **diferença finita progressiva**

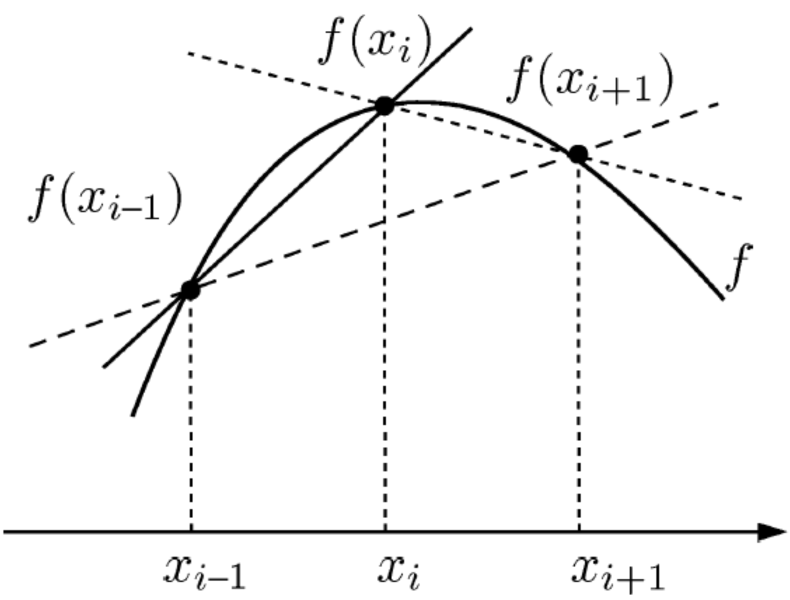
$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

- Fórmula de **diferença finita regressiva**

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$$

- Fórmula de **diferença finita centrada**

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$$



➡ Dedução da fórmula de diferença finita progressiva a partir do polinómio de Taylor

- Consideremos o **polinómio de Taylor de grau 1** centrado em x_i , com resto,

$$f(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + f''(\xi)\frac{(x - x_i)^2}{2}$$

para algum $\xi \in \operatorname{int}(x_i, x)$

- Calculando em $x = x_{i+1}$ e para $h = x_{i+1} - x_i$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2}f''(\xi)$$

para algum $\xi \in (x_i, x_{i+1})$

- donde,

$$\boxed{f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{h}{2}f''(\xi)}$$

para algum $\xi \in (x_i, x_{i+1})$

- ou seja,

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

com **erro** dado por,

$$e(x_i) = -\frac{h}{2}f''(\xi) \quad \text{para algum} \quad \xi \in (x_i, x_{i+1})$$

- Portanto, **se a 2ª derivada da função for limitada**, então **a diferença finita progressiva converge** para o valor exacto da derivada **com erro da ordem de *h***.

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + \mathcal{O}(h)$$

Como o erro é **linear** em ***h***, diz-se que a fórmula da diferença progressiva é uma **fórmula de primeira ordem**.

➡ Dedução da fórmula de diferença finita progressiva a partir do polinómio interpolador de Lagrange

- Considerando o **polinómio interpolador de Lagrange** para os dois pontos

$(x_i, f(x_i))$ e $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$,

$$p_1(x) = f(x_i) + f[x_i, x_{i+1}](x - x_i)$$

- a derivada desta expressão é uma diferença dividida de 1ª ordem,

$$p_1'(x) = f[x_i; x_{i+1}]$$

- e daqui obtemos a **aproximação**,

$$f'(xi) \approx p_1'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

- A expressão do erro poderia também ser determinada com base no erro **de interpolação**.

exercício: Deduza a fórmula de **diferença finita regressiva**, a partir do polinómio de Taylor e a partir do polinómio interpolador de Lagrange.

➧ Dedução da fórmula de diferença finita centrada

a partir do polinómio de Taylor

- Consideremos o **polinómio de Taylor de grau 2** centrado em x_i , com resto,

$$f(x) =$$

$$f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + f''(x_i)\frac{(x - x_i)^2}{2} + f'''(\xi)\frac{(x - x_i)^3}{6}$$

para algum $\xi \in \mathrm{int}(x_i, x)$

- Calculando em $x = x_{i+1}$ e em $x = x_{i-1}$ e para $h = x_{i+1} - x_i$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + f''(x_i)\frac{h^2}{2} + f'''(\xi_1)\frac{h^3}{6}$$

para algum $\xi_1 \in (x_i, x_{i+1})$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + f''(x_i)\frac{h^2}{2} - f'''(\xi_2)\frac{h^3}{6}$$

para algum $\xi_2 \in (x_{i-1}, x_i)$

- subtraindo as duas igualdades e assumindo que a terceira derivada é contínua em $[\, x_{i-1}\,,\, x_{i+1}]$, temos,

$$\boxed{f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi)}$$

para algum $\xi \in (x_{i-1}, x_{i+1})$

- ou seja,

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$$

com **erro** dado por,

$$e(x_i) = -\frac{h^2}{6} f'''(\xi) = \mathcal{O}(h^2)$$

- **Se a 3ª derivada da função for limitada**, então **a diferença finita centrada converge** para o valor exacto da derivada **com erro da ordem de** $\boldsymbol{h^2}$.

Como o erro é **quadrático** em $\boldsymbol{h}$, diz-se que a fórmula da diferença centrada tem uma **precisão de segunda ordem**.

exercício: Deduza a fórmula de **diferença finita centrada**, a partir do polinómio interpolador de Lagrange, **considerando três pontos**.

- Por esta razão, a fórmula é conhecida por **fórmula dos 3 pontos**, embora $f(x_i)$ não figure explicitamente.

⁕ *Aproximação da segunda derivada*

- Considere-se **conhecidos** os **valores da função em 3 nós** x_{i-1}, x_i e x_{i+1} respectivamente, $f\,(x_{i-1}),\ f\,(x_i)$ e $f\,(x_{i+1})$ e que o **espaçamento** entre nós consecutivos é **constante** de valor h.

- Considere-se o **polinómio de Taylor de grau 3** centrado em x_i , com resto, calculado em $x = x_{i+1}$ e em $x = x_{i-1}$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + f''(x_i)\frac{h^2}{2} + f'''(x_i)\frac{h^3}{6} + f^{(4)}(\xi_1)\frac{h^4}{24}$$

para algum $\xi_1 \in (x_i, x_{i+1})$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + f''(x_i)\frac{h^2}{2} - f'''(x_i)\frac{h^3}{6} + f^4(\xi_1)\frac{h^4}{24}$$

para algum $\xi_2 \in (x_{i-1}, x_i)$

- Somando as duas igualdades e assumindo que a quarta derivada é contínua em $[\,x_{i-1}\,,\,x_{i+1}]$, temos,

$$\boxed{f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi)}$$

para algum $\xi \in (x_{i-1}, x_{i+1})$

- assim,

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2}$$

com **erro** dado por,

$$e(x_i) = -\frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi) = \mathcal{O}(h^2)$$

- Para encontrar fórmulas para a **terceira derivada** e **quarta derivada**, procuram-se **combinações lineares** dos desenvolvimentos de Taylor de $f(x_{i-2})$, $f(x_{i-1})$, $f(x_{i+1})$ e $f(x_{i+2})$, em torno de x_i de tal forma que as derivadas de ordem inferior à pretendia se anulem.

⁕ *A influência dos erros de arredondamento*

- Teoricamente, se as derivadas apropriadas da função forem limitadas, a **derivada** calculada pelas fórmulas de diferenças finitas **converge** para o valor exacto de acordo com uma certa **potência do parâmetro *h***.
- Na prática os **erros de arredondamento** constituem o factor predominante de erro.

- **como exemplo**, consideremos a **fórmula dos 3 pontos**,

$$\boxed{f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi)}$$

para algum $\xi \in (x_{i-1}, x_{i+1})$

- Supondo que no cálculo de $f\,(x_{i-1})$ e de $f\,(x_{i+1})$ foram cometidos **erros de arredondamento** ,

$$f(x_{i+1}) = \overline{f}(x_{i+1}) + e(x_{i+1})$$
$$f(x_{i-1}) = \overline{f}(x_{i-1}) + e(x_{i-1})$$

- então o **erro total** cometido no **cálculo da derivada** é,

$$f'(x_i) - \frac{\overline{f}(x_{i+1}) - \overline{f}(x_{i-1})}{2h} =$$

$$\underbrace{\frac{e(x_{i+1}) - e(x_{i-1})}{2h}}_{\textbf{erro de arredondamento}} - \underbrace{\frac{h^2}{6} f'''(\xi)}_{\textbf{erro de truncatura}}$$

inversamente proporcional a h

directamente proporcional a h^2

- Portanto, tentar **controlar o erro total** em função de h é uma tarefa delicada, dependente de **dois factores contraditórios**.

  Enquanto que o erro de truncatura é menor para valores pequenos de h, esse **efeito é destruído** pelo crescimento do erro de arredondamento.

  É assim vital tentar encontrar um ***valor de equilíbrio*** para h, o que naturalmente também depende do valor de x considerado.

um exemplo:

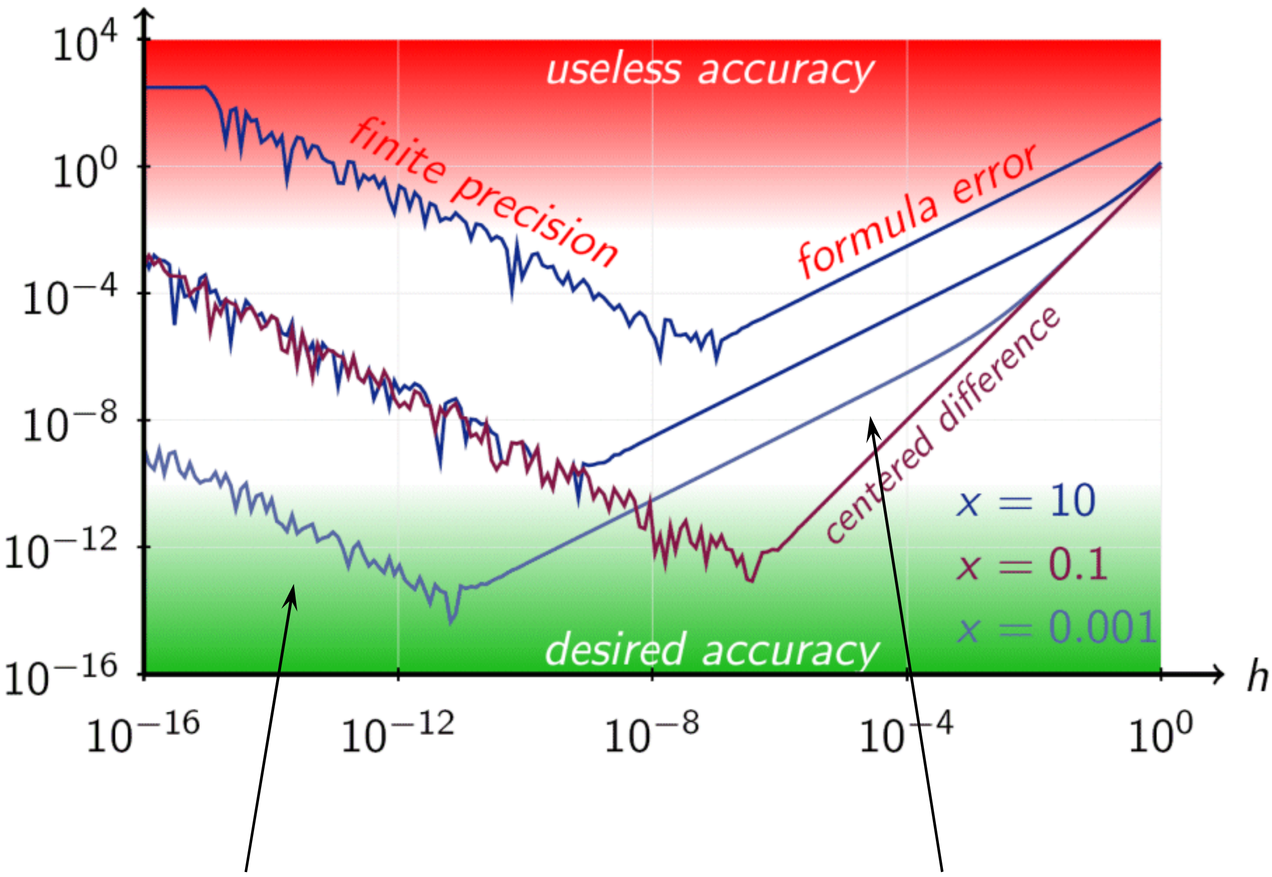
(ver: http://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_differentiation *)*

- A figura representa o comportamento do **erro total**, em função de h ,

  no cálculo da derivada de $f(x) = x^3$ nos pontos $x = 10$, $x = 0.1$ e $x = 0.001$

  usando a **fórmula de diferença finita progressiva** (para os 3 valores de x)

  e a **fórmula de diferença finita centrada** (para $x = 0.1$)



erros de arredondamento *erros de truncatura*

(notar os valores de equilíbrio para h)

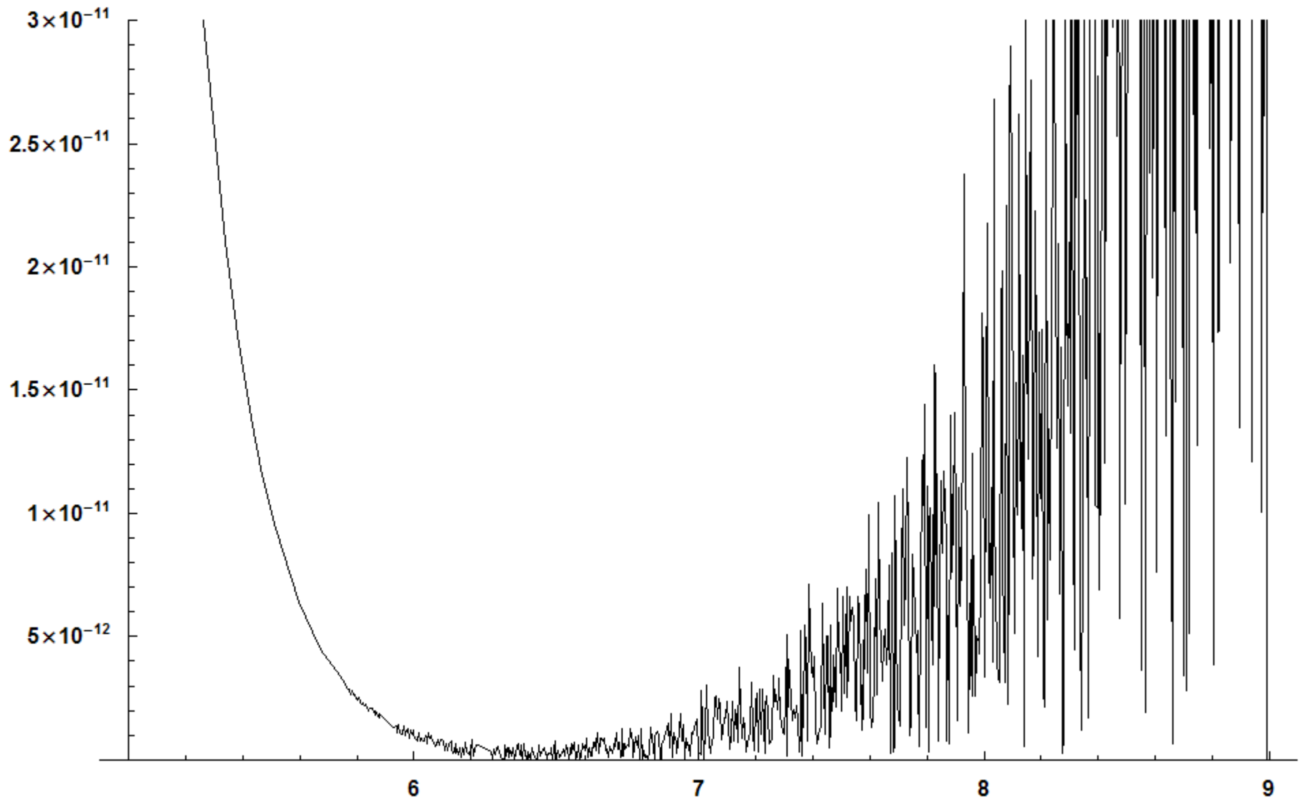
- Alguns resultados do cálculo da derivada de $f(x) = x^3$ no ponto $x = 0.1$ para a **fórmula de diferença finita centrada**.

h	$((x+h)^3 - (x-h)^3)/2h$	erro
1	1.03	-1.
$1.\times10^{-1}$	$4.\times10^{-2}$	$-1.\times10^{-2}$
$1.\times10^{-2}$	3.01×10^{-2}	$-9.9999999999986\times10^{-5}$
$1.\times10^{-3}$	3.0001×10^{-2}	$-1.000000000426\times10^{-6}$
$1.\times10^{-4}$	$3.0000010000002\times10^{-2}$	$-1.0000001774563\times10^{-8}$
$1.\times10^{-5}$	$3.0000000099991\times10^{-2}$	$-9.9991275676059\times10^{-11}$
$1.\times10^{-6}$	$3.0000000001014\times10^{-2}$	$-1.0144593498573\times10^{-12}$
$1.\times10^{-7}$	$3.0000000000472\times10^{-2}$	$-4.7235826361458\times10^{-13}$
$1.\times10^{-8}$	$2.9999999988546\times10^{-2}$	$1.1453865633726\times10^{-11}$
$1.\times10^{-9}$	$2.9999999988546\times10^{-2}$	$1.1453865633726\times10^{-11}$
$1.\times10^{-10}$	$2.9999998795924\times10^{-2}$	$1.2040762553678\times10^{-9}$
$1.\times10^{-11}$	$3.0000004216935\times10^{-2}$	$-4.2169346070597\times10^{-9}$
$1.\times10^{-12}$	$3.0000199373326\times10^{-2}$	$-1.9937332565445\times10^{-7}$
$1.\times10^{-13}$	$3.0000958314846\times10^{-2}$	$-9.583148463943\times10^{-7}$
$1.\times10^{-14}$	$3.0021558156124\times10^{-2}$	$-2.1558156123619\times10^{-5}$
$1.\times10^{-15}$	$3.0032400177848\times10^{-2}$	$-3.2400177848474\times10^{-5}$
$1.\times10^{-16}$	$2.9273458657109\times10^{-2}$	$7.2654134289138\times10^{-4}$
$1.\times10^{-17}$	$4.336808689942\times10^{-2}$	$-1.336808689942\times10^{-2}$

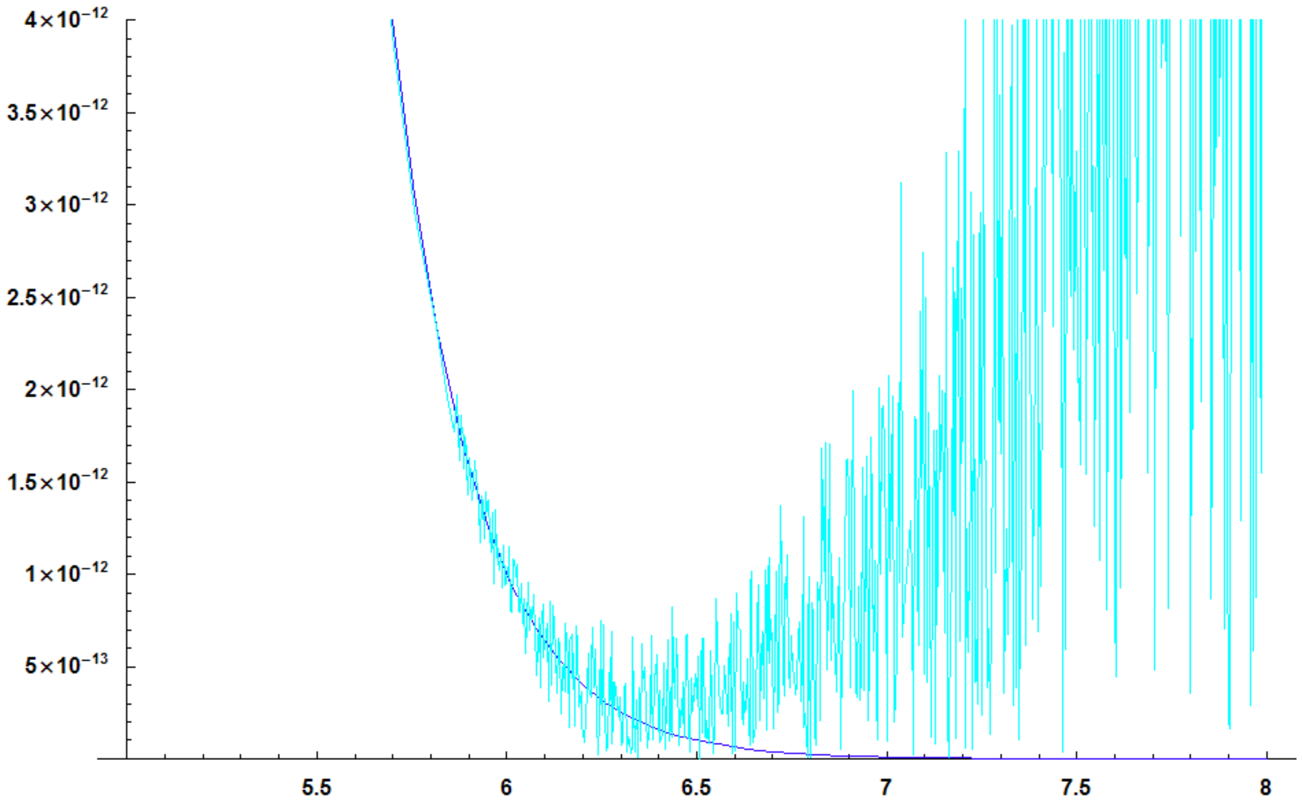
- Desde $h = 1$ até cerca de $h = 10^{-7}$ o erro (de **truncatura**) **decresce**.
- Mas a partir de $h = 10^{-7}$ o erro (provocado por **arredondamento**) **aumenta**.

- Como neste caso a terceira derivada é constante, $f'''(x)= 6$, o **erro de truncatura** é dado por $e(x_i) = - h^2$, tal como se pode verificar nos primeiros valores de h.

- Comportamento do **valor absoluto** do **erro total** para h desde 10^{-5} até 10^{-9} :



- Valores absolutos do **erro total** e do **erro de truncatura**, para h de 10^{-5} até 10^{-8} :



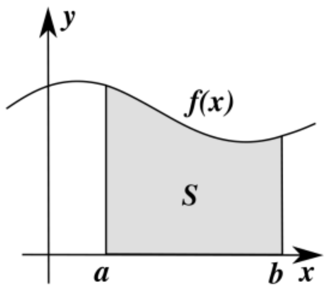
⇨ Integração Numérica

- Por vezes é necessário recorrer a **métodos aproximados** para calcular o valor do **integral de uma função num intervalo**, porque:
  - a **expressão analítica** da função não é conhecida (função dada por tabelas ou obtida por medições de grandezas físicas)
  - a expressão analítica da função é conhecida mas a **primitiva** não.

- o **problema**:

  Calcular um **valor aproximado** de,

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$



  onde f é integrável em $[a, b]$

- a **solução**:

  Aproximar f por **outra função** g cujo integral é fácil de calcular.

$$I(f) \simeq I(g) = \int_a^b g(x)dx$$

- o **erro** cometido:

$$E(f) = I(f) - I(g) = I(f-g)$$

  porque a integração é um **operador linear**.

  Assim, a aproximação do integral será tanto melhor quanto **melhor** a função g **aproximar** f no intervalo $[a, b]$.

- os **polinómios** são funções fáceis de integrar ...

⁕ *Fórmulas de Newton-Cotes*

- Consideremos a **Fórmula de Lagrange** para o **polinómio** p_n de grau $\leq n$ que interpola a função f nos nós distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

onde L_i é o **polinómio de Lagrange** associado ao nó x_i .

- Assim,

$$I(p_n) = \int_a^b p_n(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b L_i(x)\,dx$$

e fazendo $A_i = \int_a^b L_i(x)\,dx$ obtemos a **regra de integração** ou **fórmula de quadratura**:

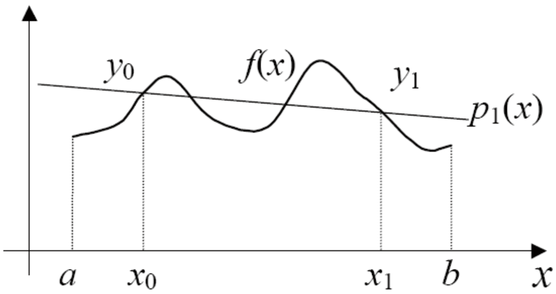
$$I(p_n) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

que nos permite **aproximar o integral** da função f ,

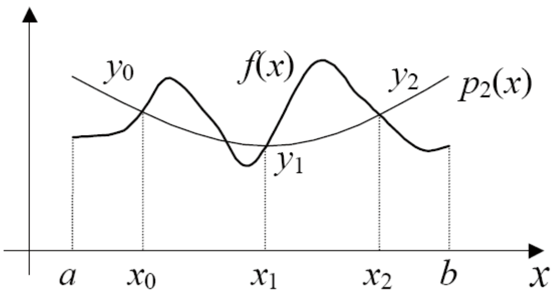
$$I(f) \simeq \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

Os A_i chamam-se **coeficientes** ou **pesos** da regra.

- Consoante o valor de n e a localização dos nós no intervalo $[a,\ b]$ obtêm-se diferentes **regras de integração**.



*polinómio interpolador em **2** nós*



*polinómio interpolador em **3** nós*

- Uma regra de integração diz-se de **grau de exactidão *n*** se **integrar exactamente todos os polinómios de grau ≤ *n*** e existir, pelo menos, um polinómio de grau $n+1$ que não é integrado exactamente.

Assim, toda a regra de integração que resulte da aproximação por um polinómio em $n+1$ nós (polinómio interpolador de grau n) tem grau de exactidão ≥ n.

➡ *Regra do Trapézio*

- Seja p_1 o polinómio de grau 1 interpolador de f nos nós a e b,

na **forma de Newton**,

$$p_1(x) = f(a) + f[a,\, b](x - a)$$

integrando, $$\int_a^b p_1(x)dx = \int_a^b f(a)dx + \int_a^b f[a,b](x-a)dx$$

$$= f(a)(b-a) + f[a,b]\left[\frac{(x-a)^2}{2}\right]_a^b$$

$$= f(a)(b-a) + f[a,b]\frac{(b-a)^2}{2}$$

$$= f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{(b-a)^2}{2}$$

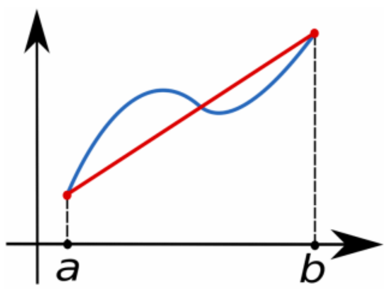
$$= \frac{b-a}{2}f(a) + \frac{b-a}{2}f(b).$$

ou seja,

$$\int_a^b p_1(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

e assim obtemos a **regra to trapézio** :

$$\boxed{I(f) \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]}$$



por ser afinal a expressão da área de um trapézio.

- O **grau de exactidão** desta fórmula é ***1***.

➡ *Regra de Simpson*

- Seja p_2 o polinómio de grau ≤ 2 interpolador de f nos nós a , $c = (a+b)/2$ e b, na **forma de Newton**,

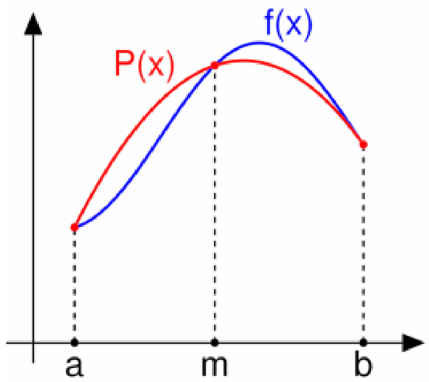
$$p_2(x) = f(a) + f[a,\, c](x-a) + f[a,\, c,\, b](x-a)(x-c)$$

integrando,

$$\int_a^b p_2(x)dx = \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(c) + f(b)]$$

e assim obtemos a **regra de Simpson** :

$$\boxed{I(f) \approx \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]}$$



- Pela construção anterior, o **grau de exactidão** desta fórmula é pelo menos 2, mas veremos que de facto é ***3***.

Ou seja, a regra de Simpson dá resultados exactos para polinómios de grau ≤ 3.

➨ *Regra dos três oitavos (Simpson)*

- Dividindo o intervalo [*a, b*] em **3 partes iguais** (em vez de 2) e considerando **interpolação cúbica** (em vez de quadrática) não é difícil deduzir a **regra dos 3/8**

$$I(f) \approx \frac{b-a}{8}\left[f(a) + 3f(\frac{2a+b}{3}) + 3f(\frac{a+2b}{3}) + f(b)\right]$$

- De forma análoga se podem definir mais regras de integração, baseadas na **interpolação por um polinómio** de grau cada vez maior, não sendo contudo de garantir que os resultados obtidos sejam melhores.

➨ *A família de regras de Newton-Cotes*

- Todas as fórmulas deste tipo podem ser deduzidas de forma sistemática:

  Cada uma é baseada na **interpolação** da função integranda **por um polinómio**, de grau n, em $n+1$ **pontos equidistantes** no intervalo de integração,

$$x_i = a + ih,\ i = 0, \ldots, n \quad \text{com} \quad h = \frac{b-a}{n}$$

e toda a regra tem a forma:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{d}\sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)}$$

com,

Regra	n	d	a_0	a_1	a_2	a_3	$\dots$
Trapézio	1	2	1				
Simpson	2	6	1	4			
Três Oitavos	3	8	1	3			
Boole	4	90	7	32	12		
___	5	288	19	75	50		
___	6	840	41	216	27	272	
$(\vdots)$							

e onde $a_{n-i} = a_i$

⁕ *Erros das fórmulas de Newton-Cotes*

➡ *Erro da Regra do Trapézio*

teorema: Seja $f \in C^2([a, b])$. Então:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] \boxed{-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)}$$

$$\eta \in (a, b)$$

(O erro depende da **segunda derivada**, o que vem confirmar que o **grau de exactidão** da Regra do Trapézio é **1**)

demonstração:

Sendo p_n o **polinómio** de grau $\leq n$ **que interpola** $f \in C^{n+1}([a, b])$ nos nós distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, então,

$$e_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

$$\xi(x) \in [a, b]$$

Como neste caso se trata de um polinómio de **grau 1**, interpolador nos pontos a e b ,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b p_1(x)dx + \int_a^b \frac{f''(\xi(x))}{2!}(x-a)(x-b)dx$$

$$= \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] + E_T$$

erro de integração da **Regra do Trapézio**

Falta assim demonstrar que,

$$E_T = \int_a^b \frac{f''(\xi(x))}{2!}(x-a)(x-b)dx = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta), \eta \in (a, b)$$

Para isso relembremos o,

Teorema do Valor Médio Pesado para Integrais:

Se $f \in C([a, b])$ e g é integrável em $[a, b]$ e $g(x)$ **não muda de sinal** em [a, b] ,

então existe um número c, $a < c < b$, tal que:

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

Como *(x-a) (x-b)* não muda de sinal em [a, b] e *f''* é contínua,

$$E_T = f''(\eta)\int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2}dx, \eta \in (a,b)$$

e porque,

$$\int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2}dx = -\frac{(b-a)^3}{12}$$

fica provado que,

$$\boxed{E_T = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)}, \eta \in (a,b)$$

➡ *Erro da Regra de Simpson*

De modo análogo se prova que, para $f \in C^4([a, b])$,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\eta)$$

$$\eta \in (a,b)$$

ou seja, a expressão do **erro** de integração da **Regra de Simpson**,

$$\boxed{E_S = -\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\eta)}, \eta \in (a,b)$$

(Como este erro depende da **quarta derivada**, vemos que o **grau de exactidão** da Regra de Simpson é efectivamente **3**)

➡ *Tabela de erros da família de regras de Newton-Cotes*

Nome da fórmula	n	Erro de truncatura
Regra do trapézio	1	$-\frac{1}{12}h^3 f''(\eta), \eta \in (a,b)$
Regra de Simpson	2	$-\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\eta), \eta \in (a,b)$
Regra dos três oitavos	3	$-\frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(\eta), \eta \in (a,b)$
Regra de Boole	4	$-\frac{8}{945}h^7 f^{(6)}(\eta), \eta \in (a,b)$
$(\vdots)$		

onde $h = (b-a)/n$

- Cada regra de Newton-Cotes é baseada na **interpolação** da função integranda **por um polinómio**, de grau n, em $n+1$ **pontos equidistantes** no intervalo de integração.

  Se n é **ímpar**, a regra tem **grau de exactidão *n***

  e se n é **par**, a regra tem **grau de exactidão *n+1***

- Contudo, devido a efeitos de **cancelamento subtractivo**, regras de grau mais elevado não produzem melhores resultados.

- Como as expressões dos erros dependem de **potências de *h***, a solução consiste em subdividir o intervalo de integração em **subintervalos menores**.

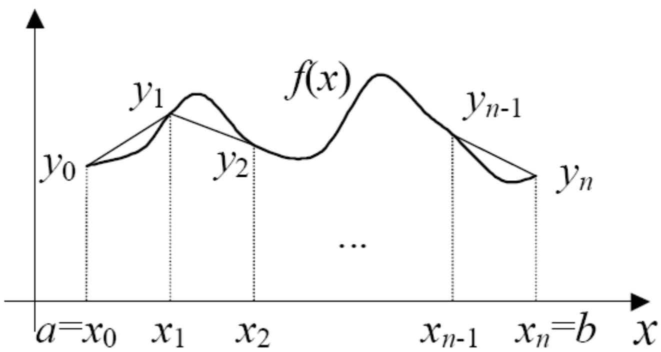
⁕ Regras Compostas

➡ Regra do Trapézio Composta

- Defina-se a **partição** de $[a, b]$ em N **subintervalos de igual amplitude**, nos pontos $x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b$, onde $x_i = a + i\,h$ com $h = (b-a)/N$.

Então,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$$



- Aplicando a **regra do trapézio** a cada um dos N integrais,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)] \quad , i = 1, 2, \ldots, N$$

somando, e considerando $f_i \equiv f(x_i)$ obtém-se a

Regra do(s) Trapézio(s) Composta :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{N-1} + f_N]}$$

➡ *Erro da Regra dos Trapézios Composta*

teorema:

Seja $f \in C^2([a, b])$ e $x_i = a + i\,h$ com $h = (b-a)/N$.

Então, $$\int_a^b f(x)\,dx =$$

$$\frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{N-1} + f_N] \boxed{- \frac{h^2}{12}(b-a)f''(\eta)}$$

$$\eta \in (a, b)$$

demonstração:

Tomando, $$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$$

aplicando a regra do trapézio a cada um dos subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)] - \frac{h^3}{12}f''(\eta_i)$$

$$\eta_i \in (x_{i-1}, x_i)$$

e somando temos, $$\int_a^b f(x)\,dx =$$

$$\frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{N-1} + f_N] - \sum_{i=1}^{N} \frac{h^3}{12}f''(\eta_i)$$

Seja,

$$E_T(h) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{h^3}{12} f''(\eta_i) = -\frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^{N} f''(\eta_i)$$

pelo **teorema do valor médio para somas finitas** de valores de uma função,

$$\exists \eta \in (a, b) : \frac{f''(\eta_1) + f''(\eta_2) + \ldots + f''(\eta_N)}{N} = f''(\eta)$$

donde obtemos o **Erro de Truncatura da Regra dos Trapézios Composta**,

$$E_T(h) = -\frac{h^3}{12} N f''(\eta) = \boxed{-\frac{h^2}{12}(b-a) f''(\eta)}$$

porque $h = (b - a) / N$

- Para o caso particular de $N = 1$ (ou seja $h = b - a$) temos a fórmula do erro para a regra do trapézio simples.
- O factor h^2 indica que o erro de truncatura depende (quadraticamente) da amplitude dos subintervalos considerados.
- Do ponto de vista prático, esta fórmula não é muito vantajosa ...

➡ *Estimativa para o Erro da Regra dos Trapézios Composta*

- Consideremos apenas o caso de o **número de subintervalos** ser **par**, $N = 2\,k$.

Se $f \in C^2([a, b])$ calculemos,

- uma aproximação $I_T(h)$ para $I(f)$ com ***N*** subintervalos,

$$I(f) = I_T(h) + E_T(h)$$

- e uma aproximação $I_T(2h)$ para $I(f)$ com ***N / 2*** subintervalos,

$$I(f) = I_T(2h) + E_T(2h)$$

- Onde, $$E_T(h) = -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\eta)$$ $$E_T(2h) = -\frac{(2h)^2}{12}(b-a)f''(\xi)$$ $$\xi, \eta \in (a, b)$$

e se f'' **não variar muito** em (a, b) então $f''(\eta) \approx f''(\xi)$ e

$$\boxed{E_T(2h) \approx 4E_T(h)}$$

- Subtraindo as duas fórmulas acima,

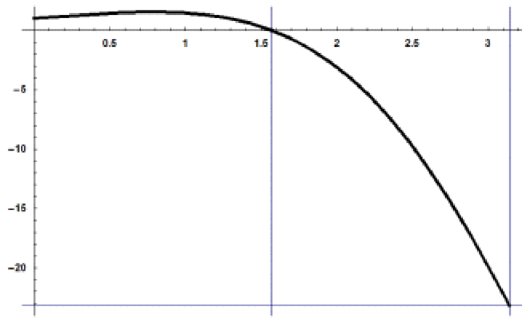
$$0 \approx I_T(h) - I_T(2h) + E_T(h) - 4E_T(h)$$

donde,

$$\boxed{|E_T(h)| \approx \frac{1}{3}\,|I_T(h) - I_T(2h)|}$$

por exemplo: Pelas **regras dos trapézios**, calculemos aproximações de,

$$I = \int_0^{\pi} e^x \cos x \, dx$$



(I = –12.070346316389634503 ...)

Com $f(x) = e^x \cos x$

se utilizarmos a regra do trapézio simples,

$$I_1 = \frac{\pi}{2}[f(0) + f(\pi)] = \text{ - 34.778519}$$

para $N = 2$ e $h = \pi / 2$,

$$I_2 = h[\frac{f(0) + f(\pi)}{2} + f(\pi/2)] = \text{- 17.389259}$$

para $N = 4$ e $h = \pi / 4$,

$$\begin{aligned} I_4 &= h[\boxed{\frac{f(0) + f(\pi)}{2}} + f(\pi/4) + \boxed{f(\pi/2)} + f(3\pi/4)] \\ &= \frac{1}{2} I_2 + h[f(\pi/4) + f(3\pi/4)] = \text{ - 13.336023} \end{aligned}$$

para $N = 8$ e $h = \pi / 8$,

$$I_8 = \frac{1}{2} I_4 + h[f(\pi/8) + f(3\pi/8) + f(5\pi/8) + f(7\pi/8)]$$

$= - 12.382162$

- Continuando, obteríamos:

N	I_N
1	-34.778519
2	-17.389259
4	-13.336023
8	-12.382162
16	-12.148004
32	-12.089742
64	-12.075194
128	-12.071558
256	-12.070649
512	-12.070422
1024	-12.070365

- Analisando os **valores reais dos erros**,

N	$E(N)$	$E(N) / E(2N)$
1	22.708172	4.2693258
2	5.3189130	4.2024268
4	1.2656765	4.0590479
8	0.31181611	4.0152590
16	0.077657784	4.0038452
32	0.019395801	4.0009632
64	0.0048477828	4.0002409
128	0.0012118727	4.0000602
256	0.00030296362	4.0000151
512	0.000075740619	4.0000038
1024	0.000018935137	

podemos verificar que efectivamente, $E(N) \approx \mathbf{4}\, E(2N)$

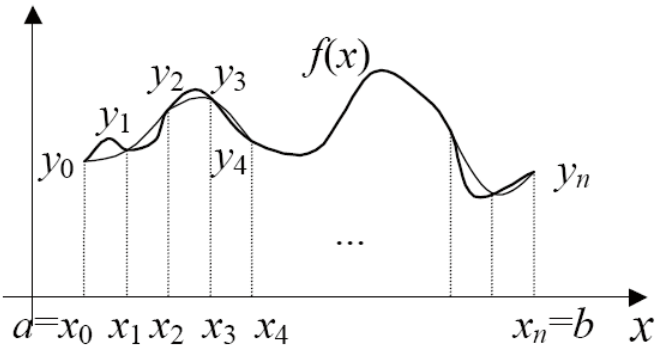
- Calculando $|I_{2N} - I_N|/3$ obtemos uma aproximação de $E(N)$:

$\|I_{2N} - I_N\|/3$	$E(N)$
5.796420	5.3189130
1.351079	1.2656765
0.3179535	0.31181611
0.0780528	0.077657784
0.0194207	0.019395801
0.0048493	0.0048477828
0.0012120	0.0012118727
0.0003030	0.00030296362
0.0000757	0.000075740619

➨ *Regra de Simpson Composta*

- Defina-se a **partição** de $[a, b]$ em N **subintervalos de igual amplitude**, nos pontos $x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b$, onde $x_i = a + i\,h$ com $h = (b-a)/N$.

Então,
$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$$



- Aplicando a **regra de Simpson** a cada **par de subintervalos** consecutivos,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \frac{2h}{6}[f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}]$$

$$i = 1, 3, 5 \ldots, N-1$$

somando, e considerando $f_i \equiv f(x_i)$ obtém-se a

Regra de Simpson Composta:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{N-2} + 4f_{N-1} + f_N\right]}$$

➡ *Erro da Regra de Simpson Composta*

teorema:

Seja $f \in C^4([a, b])$ e $x_i = a + i\,h$ com $h = (b-a)\,/\,N$ e N par.

Então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{N-2} + 4f_{N-1} + f_N\right] \boxed{- \frac{h^4}{180}(b-a)f^{(4)}(\eta)}$$

$$\eta \in (a, b)$$

demonstração: (*análoga à anterior ...*)

➡ *Estimativa para o Erro da Regra de Simpson Composta*

- Consideremos apenas o caso de o **número de subintervalos** ser **múltiplo de 4**, $N = 2k$. Se $f \in C^4([a, b])$ calculemos,

  - uma aproximação $I_S(h)$ para $I(f)$ com ***N*** subintervalos,

$$I(f) = I_S(h) + E_S(h)$$

  - e uma aproximação $I_S(2h)$ para $I(f)$ com ***N / 2*** (= $2k$) subintervalos,

$$I(f) = I_S(2h) + E_S(2h)$$

- Se $f^{(4)}$ **não variar muito** em (a, b) então, pela fórmula do erro, pode verificar-se que,

$$\boxed{E_S(2h) \approx 16 E_S(h)}$$

- Subtraindo as duas fórmulas acima,

$$0 \approx I_S(h) - I_S(2h) + E_S(h) - 16 E_S(h)$$

donde,

$$\boxed{|E_S(h)| \approx \frac{1}{15} |I_S(h) - I_S(2h)|}$$

para o mesmo exemplo: Pelas **regras de Simpson**, calculemos aproximações de,

$$I = \int_0^{\pi} e^x \cos x \, dx$$

(I = –12.070346316389634503 ...)

Comecemos por considerar a regra de Simpson para $N = 2$ e $h = \pi / 2$,

$$I_2 = \frac{h}{3}[f(0) + f(\pi) + 4f(\pi/2)] = -11.59283955$$

para $N = 4$ e $h = \pi / 4$,

$$I_4 = \frac{h}{3}[f(0) + f(\pi) + 2f(\pi/2) + 4f(\pi/4) + 4f(3\pi/4)]$$

$$= -11.98494402$$

- Continuando, obteríamos:

N	I_N
2	-11.59283955
4	-11.98494402
8	-12.06420896
16	-12.06995132
32	-12.07032146
64	-12.07034476
128	-12.07034622
256	-12.07034631
512	-12.07034632
1024	-12.07034632

- Analisando os **valores reais dos erros**,

N	$E(N)$	$E(N) / E(2N)$
2	0.47750676	
4	0.085402297	5.591264
8	0.0061373592	13.915154
16	0.00039499311	15.537889
32	0.000024860336	15.888486
64	1.5564582×10^{-6}	15.972377
128	9.7320544×10^{-8}	15.993110
256	6.0831885×10^{-9}	15.998279
512	$3.8020951 \times 10^{-10}$	15.999570
1024	$2.3763254 \times 10^{-11}$	15.999892

podemos verificar que efectivamente, $E(N) \approx \mathbf{16}\ E(2N)$

- Calculando $|\ I_{2N} - I_N\ | / 15$ obtemos uma aproximação de $E(N)$:

$\lvert I_{2N} - I_N \rvert / 15$	$E(N)$
	0.47750676
0.0261403	0.085402297
0.00528433	0.0061373592
0.000382824	0.00039499311
0.0000246755	0.000024860336
1.55359×10^{-6}	1.5564582×10^{-6}
9.72758×10^{-8}	9.7320544×10^{-8}
6.08249×10^{-9}	6.0831885×10^{-9}
3.80199×10^{-10}	$3.8020951 \times 10^{-10}$
0.	$2.3763254 \times 10^{-11}$

- Comparando com os resultados obtido para a Regra dos Trapézios, verificamos que **Regra de Simpson** é computacionalmente **melhor**.

- É possível utilizar regras de integração obtidas da utilização de polinómios que **interpolam** não só a **função integranda** mas também as suas **derivadas**.

⁕ *Fórmulas de integração com valores das derivadas da função integranda*

- Como caso particular considere-se o **Polinómio Cúbico de Hermite** interpolador de f e de f' em a e b, na forma de Newton,

$$H_3(x) = f(a) + f[a,\, a](x-a) + f[a,\, a,\, b](x-a)^2 +$$
$$f[a,\, a,\, b,\, b](x-a)^2(x-b)$$

- o **erro de interpolação** é,

$$e_3(x) = f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)^2(x-b)^2$$
$$\xi = \xi(x) \in (a,\, b)$$

e portanto,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b H_3(x)\,dx + \int_a^b e_3(x)\,dx$$

- Se calcularmos o integral de $H_3(x)$ em $[a, b]$, com $h = b-a$:

$$\begin{aligned}\int_a^b H_3(x)dx &= hf(a) + \frac{h^2}{2}f[a,a] + \frac{h^3}{3}f[a,a,b] - \frac{h^4}{12}f[a,a,b,b]\\ &= hf(a) + \frac{h^2}{2}f'(a) + \frac{h^2}{3}\left\{\frac{1}{h}[f(b)-f(a)] - f'(a)\right\} -\\ &\quad -\frac{h^2}{12}\left\{f'(a)+f'(b)-\frac{2}{h}[f(b)-f(a)]\right\}\\ &= \frac{h}{2}[f(a)+f(b)] + \frac{h^2}{12}[f'(a)-f'(b)].\end{aligned}$$

verificamos que,

$$\int_a^b H_3(x)\,dx = \underbrace{\frac{h}{2}[f(a)+f(b)]}_{\text{regra do trapézio}} + \underbrace{\frac{h^2}{12}[f'(a)-f'(b)]}_{\text{factor de correcção}}$$

- Justifica-se desta forma a designação **Regra do Trapézio Corrigida** para a fórmula:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(a)+f(b)] + \frac{h^2}{12}[f'(a)-f'(b)]}$$

- Para determinar o **Erro da Regra do Trapézio Corrigida** calculemos,

$$\int_a^b e_3(x)dx = \frac{1}{4!}\int_a^b (x-a)^2(x-b)^2 f^{(4)}(\xi)dx$$

que, recorrendo ao **Teorema do Valor Médio Pesado para Integrais**,

$$= \frac{1}{4!} f^{(4)}(\eta)\int_a^b (x-a)^2(x-b)^2 dx\,,\ \eta \in (a,b)$$

$$= \frac{h^5}{720} f^{(4)}(\eta)$$

e portanto

$$\boxed{\int_a^b e_3(x)\,dx = \frac{h^5}{720} f^{(4)}(\eta)}$$

para algum $\eta \in (a,\, b)$

➡ Regra dos Trapézios Corrigida Composta

- Considere-se $f \in C^4([a, b])$ e a **partição** de $[a, b]$ em N subintervalos de igual amplitude, nos pontos $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$,

  onde $x_i = a + i\,h$ com $h = (b-a)/N$.

  Então,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$$

- Aplicando a regra dos trapézios **corrigida** a cada um dos integrais do segundo membro,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx =$$

$$\frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)] + \frac{h^2}{12}[f'(x_{i-1}) - f'(x_i)] + \frac{h^5}{720} f^{(4)}(\eta_i)$$

$$\eta_i \in (x_{i-1}, x_i)$$

  e somando,

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)] + \frac{h^2}{12}[f'(x_{i-1}) - f'(x_i)] \right\} + \frac{h^5}{720} \sum_{i=1}^{N} f^{(4)}(\eta_i), \eta_i \in (x_{i-1}, x_i)$$

$$= \frac{h}{2}[f_0 + 2(f_1 + \cdots + f_{N-1}) + f_N] + \frac{h^2}{12}[f_0' - f_N'] + \frac{h^4}{720}(b-a) f^{(4)}(\eta), \eta \in (a,b).$$

obtém-se a fórmula dos **Trapézios Corrigida Composta**,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + \ldots + 2f_{N-1} + f_N] + \frac{h^2}{12}[f'(a) - f'(b)]}_{I_{TC}(h)}$$
$$+ \underbrace{\frac{h^4}{720}(b-a)f^{(4)}(\eta)}_{E_{TC}(h)}$$

e respectivo **erro**.

para o mesmo exemplo: Pelas regras dos **Trapézios** simples e **Trapézios Corrigida** (ambas **Compostas**)

N	I_T	E_T	I_{TC}	E_{TC}
2	-34.778519	22.708172	-9.498444451	2.571901865
4	-17.389259	5.3189130	-11.06924078	1.001105539
8	-13.336023	1.2656765	-11.75601821	0.3143281071
16	-12.382162	0.31181611	-11.98716127	0.08318504615
32	-12.148004	0.077657784	-12.04925381	0.02109250637
64	-12.089742	0.019395801	-12.06505454	0.005291771845
128	-12.075194	0.0048477828	-12.06902221	0.001324110305
256	-12.071558	0.0012118727	-12.07001522	0.0003311005667
512	-12.070649	0.00030296362	-12.07026354	0.00008277970405
1024	-12.070422	0.000075740619	-12.07032562	0.00002069521117

- verificamos que $E_{TC}(N) \approx E_T(2N)$

✱ *Fórmulas de Gauss-Legendre*

(Quadratura de Gauss com Polinómios de Legendre)

- Cada regra de integração da família Newton-Cotes,

$$I(f) \simeq \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

é baseada na interpolação polinomial da função integranda em $n+1$ **pontos equidistantes** e **fixos** x_i no intervalo de integração.

Os $n+1$ **coeficientes** A_i são determinados de modo a que a integração seja **exacta** para polinómios de **grau** $\leq n$.

- Na **Quadratura de Gauss**, os $n+1$ pontos x_i e mais os $n+1$ coeficientes A_i formam um conjunto de $2n+2$ **parâmetros**, que serão determinados de modo a que a integração seja **exacta** para polinómios de **grau** $\leq 2n+1$.

- No que se segue, a integração será efectuada no **intervalo** $[-1, 1]$.

  Para o caso geral, basta uma **mudança de variável**,

$$t = \frac{2x - a - b}{b - a} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{1}{2}[(b-a)t + a + b]$$

($t = -1 \Leftrightarrow x = a$ e $t = 1 \Leftrightarrow x = b$)

por forma a obter,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)t + a + b}{2}\right) \frac{b-a}{2}\, dt$$

➨ *Fórmula de Gauss-Legendre para 2 pontos*

- Neste caso ($n=1$) temos,

$$\mathrm{I}(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

onde A_0 , A_1 , x_0 , x_1 são $2n+2 = 4$ **incógnitas** a determinar,

de modo a que a integração seja **exacta** para polinómios de **grau** $\leq 2n+1 = 3$.

- No espaço P_3 dos **polinómios de grau até 3** consideremos a **base** $(1, x, x^2, x^3)$.

Como o operador integração é **linear**, a integração deverá ser **exacta** para as funções da base: 1, x, x^2 e x^3.

Assim, basta calcular:

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = \int_{-1}^{1} dx = 2 \\ A_0 x_0 + A_1 x_1 = \int_{-1}^{1} x dx = 0 \\ A_0 (x_0)^2 + A_1 (x_1)^2 = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \dfrac{2}{3} \\ A_0 (x_0)^3 + A_1 (x_1)^3 = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 \end{cases}$$

donde obtemos **4 condições**.

- A solução do **sistema** fornece os valores dos **4 parâmetros** procurados:

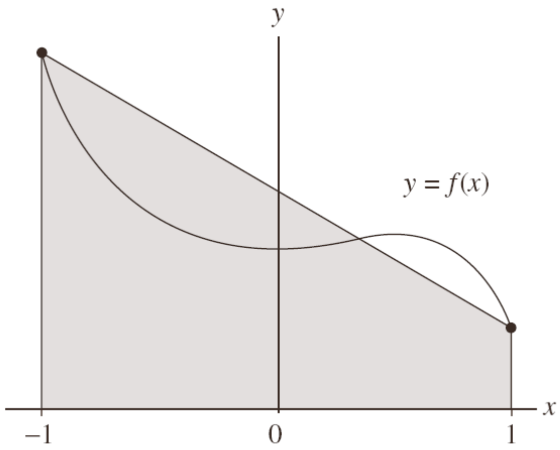
$$A_0 = A_1 = 1 \qquad x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

- Assim, a **fórmula de Gauss-Legendre para dois pontos**, consiste apenas na soma dos valores da função em dois pontos,

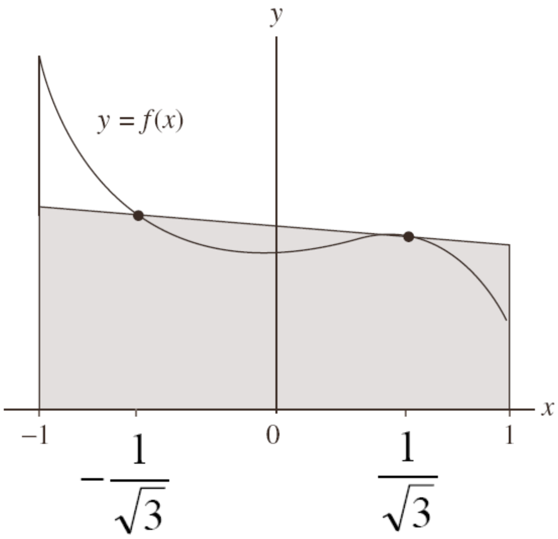
$$\boxed{\mathrm{I}(f) \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

e calcula uma aproximação do integral com **grau de exactidão** igual a **três**.

- Note-se que se trata efectivamente da **área de um trapézio**, no intervalo $[-1, 1]$, definido pelos valores de $f(x)$ em $x_0 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ e $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$



(regra do trapézio)



(fórmula de Gauss para 2 pontos)

- Apesar da sua simplicidade, com a fórmula de Gauss-Legendre de **dois pontos** a **integração é exacta** para todos os **polinómios de grau 1, 2 e 3**.

  Podemos verificar que o mesmo já não acontece para polinómios de grau 4.

  Para $f(x) = x^4$,

$$\int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5} \qquad \text{mas} \qquad f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{9}$$

para o mesmo exemplo: Pela **fórmula de Gauss-Legendre de dois pontos** calculemos uma aproximação de,

$$I = \int_0^{\pi} e^t \cos t \; dt$$

(I = –12.070346316389634503 ...)

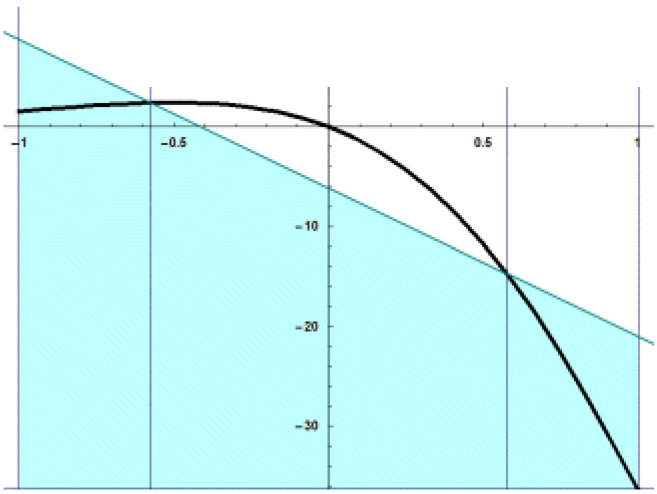
Efectuando uma mudança de variável, de forma a obter $x \in [-1,1]$

$$\int_a^b g(t)\; dt = (\frac{b-a}{2}) \int_{-1}^{1} g(\frac{a+b+(b-a)x}{2})\; dx = \int_{-1}^{1} f(x)\; dx$$

$$I = \int_0^{\pi} e^t \cos t \; dt = \int_{-1}^{1} \underbrace{(\pi/2)\; e^{\pi(x+1)/2} \cos(\pi(x+1)/2)}_{f(x)}\; dx$$

$$f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\,12.33621047$$

$$E_2 = 0.2658641493$$



- Prova-se que, se $f \in C^4([-1, 1])$, o **erro de truncatura** da **fórmula de Gauss-Legendre de dois pontos** é dado por,

$$\boxed{E_2 = \frac{f^{(4)}(\eta)}{135},} \qquad \eta \in (-1, 1)$$

➡ *Fórmulas de Gauss-Legendre para n pontos*

- Se $f \in C^6([-1, 1])$ podemos deduzir de modo análogo a **fórmula de Gauss-Legendre para três pontos**,

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{5f(-\sqrt{3/5}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{3/5})}{9} + E_3(f)$$

onde, $$E_3(f) = \frac{f^{(6)}(c)}{15,750}$$

Verifique que esta fórmula tem **grau de exactidão** igual a **5**.

- Assim temos,

n	x_i	A_i
0	$x_0 = 0$	$A_0 = 2$
1	$x_0 = -\sqrt{1/3}$ $x_1 = \sqrt{1/3}$	$A_0 = 1$ $A_1 = 1$
2	$x_0 = -\sqrt{3/5}$ $x_1 = 0$ $x_2 = \sqrt{3/5}$	$A_0 = 5/9$ $A_1 = 8/9$ $A_1 = 5/9$

- O mesmo procedimento poderia ser aplicado para qualquer valor de $n+1$, exigindo contudo a resolução de um sistema de $2n+2$ equações a $2n+2$ incógnitas.

  No entanto, é possível mostrar que tanto os **nós** x_i como os **pesos** A_i podem ser obtidos a partir dos **polinómios de Legendre**.

  Cada **polinómio de Legendre** $P_n(x)$ tem $\boldsymbol{n}$ **raízes** no intervalo $[-1,1]$ e essas raízes são exactamente os **nós** das regras de quadratura gaussiana.

- Sob o ponto de vista prático são utilizadas **tabelas** onde, em função do **número de pontos** $(n+1)$ considerado, são dados os valores dos **nós** x_i e dos **pesos** A_i, com $i = 0, 1, ..., n$.

$n+1$	x_i	A_i	Erro
2	-0.5773502692 0.5773502692	1.0000000000 1.0000000000	$\dfrac{f^{(4)}(c)}{135}$
3	±0.7745966692 0.0000000000	0.5555555556 0.8888888888	$\dfrac{f^{(6)}(c)}{15{,}750}$
4	±0.8611363116 ±0.3399810436	0.3478548451 0.6521451549	$\dfrac{f^{(8)}(c)}{3{,}472{,}875}$
5	±0.9061798459 ±0.5384693101 0.0000000000	0.2369268851 0.4786286705 0.5688888888	$\dfrac{f^{(10)}(c)}{1{,}237{,}732{,}650}$
6	±0.9324695142 ±0.6612093865 ±0.2386191861	0.1713244924 0.3607615730 0.4679139346	$\dfrac{f^{(12)}(c)2^{13}(6!)^4}{(12!)^3 13!}$
7	±0.9491079123 ±0.7415311856 ±0.4058451514 0.0000000000	0.1294849662 0.2797053915 0.3818300505 0.4179591837	$\dfrac{f^{(14)}(c)2^{15}(7!)^4}{(14!)^3 15!}$
8	±0.9602898565 ±0.7966664774 ±0.5255324099 ±0.1834346425	0.1012285363 0.2223810345 0.3137066459 0.3626837834	$\dfrac{f^{(16)}(c)2^{17}(8!)^4}{(16!)^3 17!}$

para o mesmo exemplo: Pelas **fórmulas de Gauss-Legendre** calculemos sucessivas aproximações de,

$$I = \int_0^{\pi} e^t \cos t \; dt$$

(I = –12.070346316389634503 ...)

$$I = \int_0^{\pi} e^t \cos t \; dt = \int_{-1}^{1} (\pi/2) \; e^{\pi(x+1)/2} \cos(\pi(x+1)/2) \; dx$$

$n+1$	I_{n+1}	E_{n+1}
2	-12.33621046570	$2.66E-1$
3	-12.12742045017	$5.71E-2$
4	-12.07018949029	$-1.57E-4$
5	-12.07032853589	$-1.78E-5$
6	-12.07034633110	$1.47E-8$
7	-12.07034631753	$1.14E-9$
8	-12.07034631639	$< 5.0E-12$

- Verificamos que o **erro decresce muito rapidamente** quando o número de pontos de integração aumenta.
- Compare com a aplicação das regras anteriores, onde erros da ordem de 10^{-10} são apenas obtidos para mais de 1000 pontos.