Capítulo 3 – Aproximação de Funções e de Dados

⁕ *Interpolação*

O Problema: Dado um conjunto de pontos,

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$$

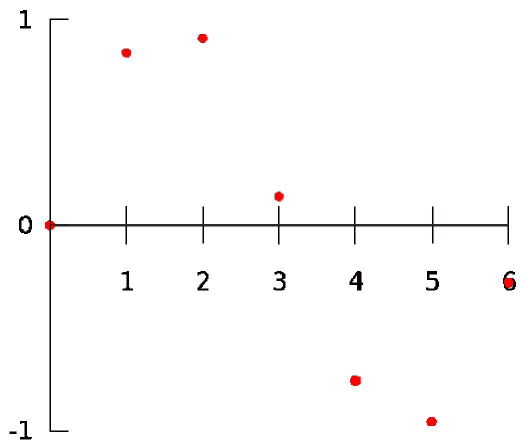
com $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$, com $i, j = 0, 1, \ldots, n$

determinar uma **função de interpolação** φ tal que,

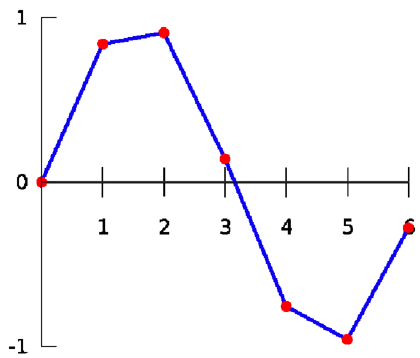
$$\varphi (x_i) = y_i , \; i = 0, 1, \ldots, n$$

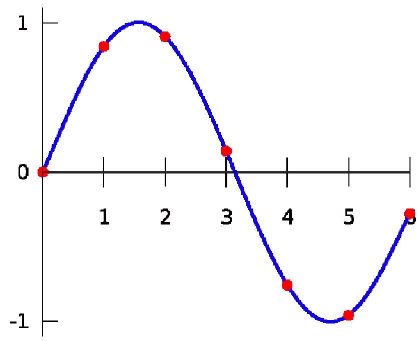
por exemplo:

Dado o conjunto de pontos,



duas possíveis soluções seriam,





Terminologia:

- Os valores $x_0, \; x_1, \ldots, x_n$ chamam-se **nós de interpolação** e os respectivos $y_0, \; y_1, \ldots, y_n$ são os **valores nodais**

- O conjunto $\{ \, (x_i, y_i) \,, \; i = 0, 1, \ldots, n \, \}$ chama-se **suporte de interpolação**

- $\{ \, \varphi(x_i) = y_i \,, \; i = 0, 1, \ldots, n \, \}$ é a **função de interpolação** nesse suporte

- Existem vários **tipos de funções de interpolação**, tais como:

  - **Interpolação polinomial**

$$\varphi(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

  - **Interpolação trigonométrica**

$$\varphi(x) = a_{-M} e^{-iMx} + \ldots + a_0 + \ldots + a_M e^{iMx}$$

onde M é um inteiro igual a $n/2$ se n é **par** e $(n-1)/2$ se n é **ímpar**,

i é a unidade imaginária

  - **Interpolação racional**

$$\varphi(x) = \frac{a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0}{a_{k+1} x^n + \ldots + a_{k+n} x + a_{k+n+1}}$$

✱ *Polinómios*

definição: Um **polinómio de grau *n*** é uma função da forma,

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

onde $a_n \neq 0$, excepto se $n = 0$

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ os **coeficientes** do polinómio

✱ *O esquema de Horner*

Como **calcular o valor** de um polinómio num dado ponto?

exemplo: $p_3(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ { $n + (n-1) + \ldots + 2 + 1 =$

$= n(n+1)/2 =$ **6 multiplicações** }

$p_3(x) = ((a_3 x + a_2) x + a_1) x + a_0$ { $n = 3$ **multiplicações** }

algoritmo: { Entrada: $a_0, a_1, \ldots, a_n, x \in \mathbb{R}$ }

polinomio $\leftarrow a_n$

para k desde n – 1 até 0 fazer

  polinomio $\leftarrow$ polinomio $*$ x + a_k

{ Saída: polinomio = $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ }

complexidade: ***n*** multiplicações e ***n*** adições

teorema: (**Horner**)

Para calcular $p_n(c)$, **valor de um polinómio** de grau n **no ponto** c,

faça-se $b_n = a_n$

e calcule-se $b_k = a_k + c\, b_{k+1}$ para $k = n-1, n-2, \ldots, 1, 0$

então $b_0 = p_n(c)$

Mais ainda, se $q_0(x) = b_n\, x^{n-1} + b_{n-1}\, x^{n-2} + \ldots + b_2\, x + b_1$

então $p_n(x) = (x - c)\, q_0 + r_0$

onde $q_0(x)$ é o **polinómio cociente** de grau $n-1$ e

$r_0 = b_0 = p_n(c)$ é o **resto**.

exemplo: Calcular $p_5(\mathbf{3}) = x^5 - 6\,x^4 + 8\,x^3 + 8\,x^2 + 4\,x - 40$

pelo esquema de Horner,

	$b_5 = a_5$		$= 1$
	$b_4 = a_4 + 3\, b_5$	$= -6 + 3$	$= -3$
	$b_3 = a_3 + 3\, b_4$	$= 8 - 9$	$= -1$
	$b_2 = a_2 + 3\, b_3$	$= 8 - 3$	$= 5$
	$b_1 = a_1 + 3\, b_2$	$= 4 + 15$	$= 19$
$p_5(\mathbf{3}) =$	$b_0 = a_0 + 3\, b_1$	$= -40 + 57$	$= 17$

ficando assim também calculado o **polinómio cociente**,

$$\mathbf{q_0(x)} = b_n\, x^{n-1} + b_{n-1}\, x^{n-2} + \ldots + b_2\, x + b_1 = x^4 - 3\,x^3 - x^2 + 5\,x + 19$$

e o **resto**, $\mathbf{r_0} = \mathbf{b_0} = 17$

de modo que:

$$\mathbf{p_5(x)} = \mathbf{(x - c)\; q_0 + r_0} = (x - 3)\,(x^4 - 3\,x^3 - x^2 + 5\,x + 19) + 17$$

Assim, os resultados parciais obtidos pelo **método de Horner** são efectivamente os sucessivos valores calculados pela **Regra de Ruffini** :

	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0		
	1	-6	8	8	4	-40		
x = 3		3	-9	-3	15	57		
	1	-3	-1	5	19	**17**	=	**$p_5(3)$**
	b_5	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0		

permitindo calcular:

$$p_5(x) = (x - 3)\ (x^4 - 3\,x^3 - x^2 + 5\,x + 19\quad) + 17$$

⁕ *Interpolação Polinomial*

Os **polinómios** são excelentes candidatos a **funções interpoladoras**, porque:

- O **cálculo dos valores** é realizável em **ordem linear** no número de multiplicações e adições.
- As operações de **derivação e primitivação** são simples e podem ser facilmente programáveis.
- São de classe C^{∞}.
- **Aproximam tanto quanto se queira** qualquer **função contínua** num **intervalo finito**.(Teorema de Weierstrass).

Sempre que as funções de interpolação consideradas são polinómios falamos em **Interpolação Polinomial**.

O Problema: Dado um **suporte de interpolação** com $n+1$ pontos,

$$\{ \ (x_i, y_i) \ , \ i = 0, 1, \ \ldots, n \ \}$$

encontrar um **polinómio de grau ≤ n** tal que,

$$y_i = p_n(x_i) \ , \ i = 0, 1, \ \ldots, n$$

Questões:

- **Existe** sempre um polinómio que satisfaz as condições acima?
- Caso exista, é **único**?

Teorema da existência e unicidade:

Seja P_n o conjunto dos polinómios de **grau menor ou igual a** n.

Dados $n+1$ **pontos suporte distintos** (x_i, y_i) , $i = 0, 1, \ \ldots, n$,

existe um e um só polinómio $p_n \in P_n$ tal que,

$$p_n(x_i) = y_i \ , \quad i = 0, 1, \ \ldots, n$$

Demonstração:

Seja

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

A exigência de que p_n seja um **polinómio interpolador** nos $n+1$ pontos (x_i, y_i) traduz-se no **sistema** de equações lineares:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_n x_2^n = y_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \qquad \ldots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

Para que o sistema tenha **solução única** é **necessário e suficiente** que a respectiva matriz dos coeficientes possua um **determinante diferente de zero**.

A **matriz dos coeficientes** é a conhecida **matriz de Vandermonde**, definida por:

$$V\left(x_0, x_1, \ldots, x_n\right) = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \left(x_0\right)^2 & \cdots & \left(x_0\right)^n \\ 1 & x_1 & \left(x_1\right)^2 & \cdots & \left(x_1\right)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \left(x_n\right)^2 & \cdots & \left(x_n\right)^n \end{bmatrix}$$

Comecemos por demonstrar que o **determinante de Vandermonde** tem o valor,

$$\det V\left(x_0, x_1, \ldots, x_n\right) = \prod_{\substack{i,j=0 \\ j>i}}^{n} \left(x_j - x_i\right)$$

Atendendo a que $\boldsymbol{x_i} \neq \boldsymbol{x_j}$ para $\boldsymbol{i \neq j}$ (**pontos distintos**) , este determinante é **não nulo** e portanto o sistema tem **solução única**.

Demonstração do **valor do determinante de Vandermonde**:

por **indução** sobre $\boldsymbol{n}$:

- Para $\boldsymbol{n = 1}$, verifica-se pois,

$$\det\ V(x_0, x_1) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_0$$

- Suponha-se a propriedade válida para $n-1$ e mostre-se que é válida para n

$$V\left(x_0,x_1,\ldots,x_n\right)=\begin{bmatrix} 1 & x_0 & (x_0)^2 & \cdots & (x_0)^n \\ 1 & x_1 & (x_1)^2 & \cdots & (x_1)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & (x_n)^2 & \cdots & (x_n)^n \end{bmatrix}$$

Multiplicando a **primeira coluna** por x_0 e **subtraindo** o resultado à **segunda coluna**, multiplicando a **segunda coluna** por x_0 e **subtraindo** o resultado à **terceira coluna**, ... obtemos,

$$\det V\left(x_0,x_1,\ldots,x_n\right)=$$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1-x_0 & x_1\left(x_1-x_0\right) & \cdots & (x_1)^{n-1}\left(x_1-x_0\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n-x_0 & x_n\left(x_n-x_0\right) & \cdots & (x_n)^{n-1}\left(x_n-x_0\right) \end{bmatrix}$$

desenvolvendo este determinante e factorizando $\Big($ (x_1-x_0) da primeira linha, (x_2-x_0) da segunda linha, ..., (x_n-x_0) da última linha $\Big)$ obtemos,

$$\det V\left(x_0,x_1,\ldots,x_n\right)=\left(x_1-x_0\right)\left(x_2-x_0\right)\cdots\left(x_n-x_0\right)$$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & x_1 & (x_1)^2 & \cdots & (x_1)^{n-1} \\ 1 & x_2 & (x_2)^2 & \cdots & (x_2)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & (x_n)^2 & \cdots & (x_n)^{n-1} \end{bmatrix}$$

assim, temos:

$$\det V\left(x_0, x_1, \ldots, x_n\right) =$$

$$\begin{aligned} &= \left(x_1 - x_0\right)\left(x_2 - x_0\right)\cdots\left(x_n - x_0\right)\det V\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \\ &= \prod_{j=1}^{n}\left(x_j - x_0\right)\det V\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right). \end{aligned}$$

Aplicando agora a **hipótese de indução** ao determinante de Vandermonde de ordem ***n-1*** e multiplicando, obtemos para a ordem ***n*** :

$$\det V\left(x_0, x_1, \ldots, x_n\right) = \prod_{\substack{i,j=0 \\ j>i}}^{n}\left(x_j - x_i\right)$$

Portanto, se é esta a **expressão do determinante** da **matriz do sistema** e, atendendo a que $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$, este determinante é **não nulo** então o sistema tem **solução única**.

Observações:

- Existem **duas desvantagens** que não tornam recomendável computacionalmente seguir esta via para **determinar o polinómio interpolador**:

  1. A matriz de Vandermonde apresenta um **número de condição** muito elevado, tanto maior quanto maior for ***n***, pelo que se trata de um **problema mal condicionado**.

  2. Trata-se de um processo de cálculo **pouco eficiente** – é possível obter o polinómio interpolador com menos operações aritméticas.

- O teorema anterior mostra-nos que o polinómio interpolador **existe e é único** (deduziremos **várias fórmulas** para ele, mas todas representam **o mesmo polinómio interpolador**).

⇨ Polinómios de Lagrange

definição: Os polinómios de grau n dados por,

$$L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}, \quad k = 0, 1, \cdots, n$$

são designados por **polinómios de Lagrange**

associados aos nós $x_0, \ x_1, \ldots, x_n$

teorema: O **polinómio interpolador** p_n de grau menor ou igual a n que interpola os valores nodais $y_0, \ y_1, \ldots, y_n$ nos nós distintos $x_0, \ x_1, \ldots, x_n$ é dado por,

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x)\, y_k$$

demonstração: Pela sua definição, os polinómios L_k satisfazem a relação,

$$L_k(x_j) = \delta_{k\,j} = \begin{cases} 1 \text{ se } k = j \\ 0 \text{ se } k \neq j \end{cases}$$

onde δ_{kj} é o delta de Kronecker

nestas condições,

$$p_n(x_j) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x_j)\, y_k = \sum_{k=0}^{n} \delta_{k\,j}\, y_k = y_j, \quad j = 0, 1, \cdots, n$$

Assim, este polinómio cujo grau é evidente ser menor ou igual a ***n***, interpola os valores dados. Pelo Teorema da existência e unicidade é também o único polinómio interpolador nestes pontos.

exemplo:

Construir o polinómio interpolador de grau ≤ 3 que interpola os seguintes valores:

x_i	0	1	3	4
y_i	1	-1	1	2

Os **polinómios de Lagrange** associados aos nós ($x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$) obtêm-se directamente da **definição**,

$$\boxed{L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}, \quad k = 0, 1, \cdots, n}$$

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x - x_1)\,(x - x_2)\,(x - x_3)}{(x_0 - x_1)\,(x_0 - x_2)\,(x_0 - x_3)} \\
&= -\frac{1}{12}(x-1)(x-3)(x-4) \\
L_1(x) &= \frac{(x - x_0)\,(x - x_2)\,(x - x_3)}{(x_1 - x_0)\,(x_1 - x_2)\,(x_1 - x_3)} \\
&= \frac{1}{6}x(x-3)(x-4) \\
L_2(x) &= \frac{(x - x_0)\,(x - x_1)\,(x - x_3)}{(x_2 - x_0)\,(x_2 - x_1)\,(x_2 - x_3)} \\
&= -\frac{1}{6}x(x-1)(x-4) \\
L_3(x) &= \frac{(x - x_0)\,(x - x_1)\,(x - x_2)}{(x_3 - x_0)\,(x_3 - x_1)\,(x_3 - x_2)} \\
&= \frac{1}{12}x(x-1)(x-3)
\end{aligned}$$

Assim sendo, nas condições do teorema, o **polinómio interpolador** é dado por:

$$\begin{aligned} p_3(x) &= \sum_{k=0}^{3} L_k(x)\, y_k \\ &= -\frac{1}{12}(x-1)(x-3)(x-4) - \frac{1}{6}x(x-3)(x-4) \\ &\quad -\frac{1}{6}x(x-1)(x-4) + \frac{1}{6}x(x-1)(x-3). \end{aligned}$$

Observação:

A fórmula de Lagrange **pode não ser a representação mais conveniente** do polinómio interpolador. Isto acontece, fundamentalmente por duas razões:

1. É possível obter este polinómio com **menos operações aritméticas** que as requeridas por aquela fórmula;

2. Os polinómios de Lagrange **estão associados a um conjunto de nós** e uma mudança de posição ou do número destes altera completamente estes polinómios.

⇨ Fórmula de Newton

definição: A **Forma de Newton** para polinómios de grau n é dada por,

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - c_1) + a_2(x - c_1)(x - c_2) + \cdots$$
$$+ a_n(x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n)$$

onde os parâmetros c_i , $i = 1, 2, ..., n$ são chamados **centros do polinómio**

.

Construção da Fórmula de Newton:

Considerando os **nós** $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$ como **centros do polinómio**, temos:

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$+ a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

Os **coeficientes** $a_0, a_1, ..., a_n$ vão ser determinados de modo a que p_n seja o **polinómio interpolador** nos nós $x_0, x_1, ..., x_n$ dos valores nodais $y_0, y_1, ..., y_n$:

$$p_n(x_0) = y_0 \; ; \; p_n(x_1) = y_1 \; ; \; \cdots \; ; \; p_n(x_n) = y_n$$

ou, se os valores nodais y_i forem os **valores nodais de uma função** f temos,

$$p_n(x_i) = f(x_i), \qquad i = 0, 1, \ldots n$$

Assim, a partir de, $$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

e fazendo sucessivamente $x = x_0$, $x = x_1$, ... , $x = x_n$ obtemos os **coeficientes**:

$$\begin{aligned}
a_0 &= f(x_0) \\
a_1 &= \frac{f(x_1) - a_0}{x_1 - x_0} = \boxed{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}} \\
a_2 &= \frac{f(x_2) - a_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \boxed{\frac{\boxed{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}} - \boxed{\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}}{x_2 - x_0}} \\
&\vdots \\
a_n &= \frac{f(x_n) - a_0 - a_1(x_n - x_0) - \cdots - a_{n-1}(x_n - x_0)\cdots(x_n - x_{n-2})}{(x_n - x_0)\cdots(x_n - x_{n-1})} \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

observação:

Cada **coeficiente** a_k , $k = 0, 1, ..., n$:

- pode ser calculado a partir dos a_i , $i = 0, 1, ..., k-1$, **já determinados**.
- **depende** exclusivamente dos **nós** $x_0, x_1, ..., x_k$ e dos respectivos **valores nodais** $y_0, y_1, ..., y_k$

$$a_k = f\left[x_0, x_1, \cdots, x_k\right]$$

diferença dividida de ordem k ($k \geq 1$) entre os $k+1$ nós $x_0, x_1, ..., x_k$.

⁕ *Diferenças Divididas*

Para designar a **diferença dividida de ordem *k*** (***k ≥ 1***) entre os ***k+1*** nós $x_0, x_1, \ldots, x_k$, são utilizadas indistintamente **duas notações**:

$$D^k f(x_i) \equiv f\left[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}\right]$$

onde,

$$D^k f(x_i) = \frac{D^{k-1} f(x_{i+1}) - D^{k-1} f(x_i)}{x_{i+k} - x_i}$$

ou
$$f\left[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}\right] = \frac{f\left[x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}\right] - f\left[x_i, \cdots, x_{i+k-1}\right]}{x_{i+k} - x_i}$$

teorema: Os **coeficientes** a_k , $k = 0, 1, \ldots, n$ do polinómio p_n de grau $\leq n$, na **forma de Newton** que interpola os valores $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_k)$ nos **nós distintos** $x_0, x_1, \ldots, x_k$ são dados **indutivamente** pela expressão:

$$a_k = f\left[x_0, x_1, \cdots, x_k\right] = \frac{f\left[x_1, \cdots, x_k\right] - f\left[x_0, \cdots, x_{k-1}\right]}{x_k - x_0}$$

Assim, o **Polinómio Interpolador com Diferenças Divididas** tem a forma:

$$p_n(x) \quad =$$

$$f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots +$$
$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

Cálculo das Diferenças Divididas:

As diferenças divididas são calculadas por **construção de uma tabela**,

tal como no seguinte caso para 4 nós:

x	D^0 ou $f[\cdot]$	D^1 ou $f[\cdot,\cdot]$	D^2 ou $f[\cdot,\cdot,\cdot]$	D^3 ou $f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
x_0	$f(x_0)$			
		$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$		
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	
		$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2}{x_3-x_0}$
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
		$f[x_2, x_3] = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$		
x_3	$f(x_3)$			

exemplo: Determinar o **polinómio interpolador**, na **forma de Newton**, que interpola os seguintes pontos,

x_i	0	1	3	4
y_i	1	-1	1	2

Tabela de **diferenças divididas**:

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \qquad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \qquad \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
$x_0=0$	1			
		-2		
$x_1=1$	-1		1	
		1		$-\frac{1}{4}$
$x_2=3$	1		0	
		1		
$x_3=4$	2			

$$\frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2}{x_3-x_0}$$

$$\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} \qquad \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$$

Assim, calculados os **coeficientes** do polinómio interpolador na **forma de Newton**,

$$\begin{aligned} p_3(x) &= f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \\ &\quad f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2), \end{aligned}$$

temos,

$$\begin{aligned} p_3(x) &= 1 - 2(x-0) + 1(x-0)(x-1) - \frac{1}{4}(x-0)(x-1)(x-3) \\ &= 1 - 2x + x(x-1) - \frac{1}{4}x(x-1)(x-3). \end{aligned}$$

observações:

- A **ordem** pela qual os nós são tomados é **arbitrária**.
- Se fosse necessário **acrescentar mais algum nó** aos anteriores, bastaria colocá-lo no fundo da tabela e calcular mais uma linha de valores (as diferenças divididas anteriormente obtidas não seriam afectadas).
- Se os valores nodais forem os valores nodais de uma **função**, é possível estabelecer uma **ligação** importante entre as **diferenças divididas** de ordem ***k*** e a **derivada** da mesma ordem dessa função.

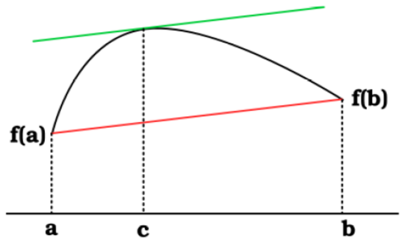
recordemos:

Teorema do Valor Médio (Lagrange)

Para toda função contínua em [a, b] e derivável em (a, b)

existe (pelo menos) um ponto ***c*** ∈ (a, b) onde:

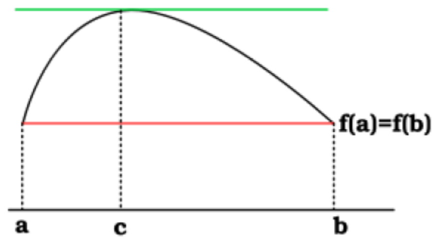
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Caso particular – Teorema de Rolle

Se $f(a) = f(b)$

então $\exists\ c \in (a, b)\ :\ f'(c) = 0$



Caso particular do teorema de Rolle

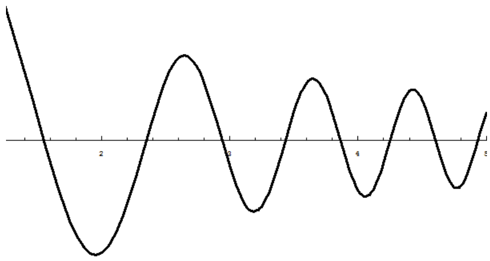
Se $f(a) = f(b) = 0$ então $\exists\ c \in (a, b)\ :\ f'(c) = 0$

Entre **dois zeros da função** existe (pelo menos) **um zero da derivada**.

Corolário do teorema de Rolle

Entre ***n*** **zeros da função** existem

(pelo menos) ***n-1*** **zeros da derivada**.



teorema: Sejam $f \in C^n$ ([a, b]) e $x_0, x_1, \ldots, x_n$ **nós distintos** no intervalo [a, b].

Então existe um $\xi \in$ (a, b) tal que,

$$f\left[x_0, x_1, \cdots, x_n\right] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

demonstração:

Para $n = 1$, o Teorema do Valor Médio garante esse resultado,

$$f\left[x_0, x_1\right] = \frac{f(x_1) - f(x_1)}{x_1 - x_0} = f'(\xi),\ \ \xi \in (a, b)$$

Para analisar o caso geral $n > 1$, consideremos a função,

$$e_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

onde $p_n(x)$ é o polinómio de grau $\leq$ n que **interpola** a função nos $n+1$ nós distintos.

Assim, $e_n(x)$ tem (pelo menos) $n+1$ zeros distintos em (a, b) e, pelo Corolário do Teorema de Rolle,

$$e_n'(x) = f'(x) - p_n'(x)$$ tem (pelo menos) n zeros em (a, b)

aplicando sucessivamente o Corolário do Teorema de Rolle,

$$e_n''(x) = f''(x) - p_n''(x)$$ tem (pelo menos) $n-1$ zeros em (a, b)

...

$$e_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - p_n^{(n)}(x)$$ tem (pelo menos) 1 zero em (a, b)

e seja ξ esse zero.

Por outro lado, derivando ***n*** vezes a expressão do Polinómio Interpolador com Diferenças Divididas,

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \cdots + \\ & \quad f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \end{aligned}$$

obtemos,

$$p_n^{(n)}(x) = n!\, f[x_0,x_1,\cdots,x_n]$$

Portanto,

$$e_n^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - n!\, f[x_0,x_1,\cdots,x_n] = 0$$

ou,

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)\,,\ \ \xi \in (a,b)$$

- Deste modo, se os valores nodais forem os valores nodais de uma função, este teorema estabelece uma **relação importante** entre as **diferenças divididas** de ordem ***n*** e a **derivada** da mesma ordem dessa função.

⇨ Interpolação com Nós Equidistantes

Em muitas aplicações os **nós** $x_0, x_1, \ldots, x_n$ são **equidistantes**.

Sendo h a **distância** entre dois nós sucessivos (**avanço** ou **passo**) temos,

$$h = \frac{x_n - x_0}{n}$$

donde,

$$x_k = x_0 + k\,h, \;\; k = 0, 1, \cdots n$$

⁕ *Diferenças Progressivas (ou Descendentes)*

definição: A **diferença progressiva** de **ordem zero** e **passo** h da função f no nó x_i é dada por,

$$\Delta_h^0 f(x_i) = f\,(x_i)$$

A **diferença progressiva** de **ordem** k , $k = 1, 2, \ldots$ e **passo** h da função f no nó x_i é dada por,

$$\Delta_h^k f(x_i) = \Delta_h^{k-1} f(x_{i+1}) - \Delta_h^{k-1} f(x_i)$$

Tal como as diferenças divididas, as diferenças progressivas organizam-se numa **tabela**:

x_i	$f(x_i)$	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$	$\cdots$
x_0	f_0					
		$\Delta f_0 = f_1 - f_0$				
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0$			
		$\Delta f_1 = f_2 - f_1$		$\Delta^3 f_0 = \cdots$		
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1 = \Delta f_2 - \Delta f_1$		$\Delta^4 f_i = \cdots$	$\cdots$
		$\Delta f_2 = f_3 - f_2$		$\Delta^3 f_1 = \cdots$		
x_3	f_3		$\Delta^2 f_2 = \Delta f_3 - \Delta f_2$		$\vdots$	
		$\Delta f_3 = f_4 - f_3$		$\vdots$		
x_4	f_4		$\vdots$			
		$\vdots$				
$\vdots$	$\vdots$					

Além disso, existe uma relação entre as diferenças divididas e as diferenças progressivas.

teorema:

A **diferença dividida** de ordem ***k*** da função ***f*** nos ***k*** nós equidistantes de passo ***h***

$x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}$ está **relacionada** com a **diferença progressiva** de ordem ***k*** por,

$$f\left[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}\right] = \frac{1}{k!h^k}\Delta^k f_i, \ \forall k \geq 0$$

recordemos,

$$f\left[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}\right] = \frac{f\left[x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}\right] - f\left[x_i, \cdots, x_{i+k-1}\right]}{x_{i+k} - x_i}$$

$$\Delta_h^k f(x_i) = \Delta_h^{k-1} f(x_{i+1}) - \Delta_h^{k-1} f(x_i)$$

e demonstremos:

$$\boxed{f\left[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}\right] = \frac{1}{k!h^k}\Delta^k f_i, \ \ \forall k \geq 0}$$

por indução,

Para ***k = 0***, $f[x_i] = \Delta^0 f_i = f(x_i)$ por definição

e para ***k = 1***, $f\left[x_i, x_{i+1}\right] = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\Delta f_i}{h}$

Suponhamos agora a relação válida para ***k = n*** $\geq$ ***1*** e provemos para ***k = n+1*** :

a partir da relação,

$$f\left[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+n}, x_{i+n+1}\right] = \frac{f\left[x_{i+1}, \cdots, x_{i+n+1}\right] - f\left[x_i, \cdots, x_{i+n}\right]}{x_{i+n+1} - x_i}$$

e aplicando a hipótese de indução,

$$f\left[x_{i+1},\cdots,x_{i+n+1}\right]=\frac{\Delta^n f_{i+1}}{n!h^n}$$

$$f\left[x_i,\cdots,x_{i+n}\right]=\frac{\Delta^n f_i}{n!h^n}$$

obtemos,

$$\begin{aligned} f\left[x_i,x_{i+1},\cdots,x_{i+n},x_{i+n+1}\right] &= \frac{\frac{1}{n!h^n}\left(\Delta^n f_{i+1}-\Delta^n f_i\right)}{(n+1)\,h} \\ &= \frac{\Delta^{n+1} f_i}{(n+1)!h^{n+1}} \end{aligned}$$

Fórmula de Newton com Diferenças Progressivas

teorema: O **polinómio** de grau **≤ *n*** que **interpola** os valores nodais $f_0, f_1, \ldots, f_n$ nos **nós equidistantes** $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de passo h pode escrever-se na forma,

$$\begin{aligned} p_n(x) \;=\;& f_0+\frac{\Delta f_0}{1!h}(x-x_0)+\frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+ \\ & \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\,. \end{aligned}$$

demonstração:

Aplicar o resultado anterior à Fórmula de Newton com Diferenças Divididas,

$$\begin{aligned} p_n(x) \;=\;& f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots+ \\ & f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \end{aligned}$$

⁕ *Diferenças Regressivas (ou Ascendentes)*

definição: A **diferença regressiva** de **ordem zero** e **passo** h da função f no nó x_i é dada por,

$$\nabla_h^0 f(x_i) = f\ (x_i)$$

A **diferença regressiva** de **ordem** k , $k = 1, 2, \ldots$ e **passo** h da função f no nó x_i é dada por,

$$\nabla_h^k f(x_i) = \nabla_h^{k-1} f(x_i) - \nabla_h^{k-1} f(x_{i-1})$$

Analogamente, existe uma relação entre as diferenças divididas e as diferenças regressivas.

teorema:

A **diferença dividida** de ordem k da função f nos k nós equidistantes de passo h $x_{i-k}, x_{i-k+1}, \ldots, x_i$ está **relacionada** com a **diferença regressiva** de ordem k por,

$$f\ [x_i, x_{i-1}, \cdots, x_{i-k}] = \frac{1}{k!h^k} \nabla^k f_i, \ \ \forall k \geq 0$$

demonstração:

Por indução sobre k.

Também a **diferenças regressivas** se organizam numa **tabela**:

$$
\begin{array}{|c|cccccc}
f_0 & & & & & & \\
 & \nabla f_1 & & & & & \\
f_1 & & \nabla^2 f_2 & & & & \\
 & \nabla f_2 & & \nabla^3 f_3 & & & \\
f_2 & & \nabla^2 f_3 & & \nabla^4 f_4 & & \\
 & \nabla f_3 & & \nabla^3 f_4 & & & \nabla^n f_n \\
\ldots & & & & & \ldots & \\
f_{n-2} & & \nabla^2 f_{n-1} & & \nabla^4 f_n & & \\
 & \nabla f_{n-1} & & \nabla^3 f_n & & & \\
f_{n-1} & & \nabla^2 f_n & & & & \\
 & \nabla f_n & & & & & \\
f_n & & & & & &
\end{array}
$$

Fórmula de Newton com Diferenças Regressivas

teorema: O **polinómio** de grau $\leq n$ que **interpola** os valores nodais $f_0, f_1, \ldots, f_n$ nos **nós equidistantes** $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de passo h pode escrever-se na forma,

$$
\begin{aligned}
p_n(x) \;&=\; f_n + \frac{\nabla f_n}{1!h}(x - x_n) + \frac{\nabla^2 f_n}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots + \\
&\quad \frac{\nabla^n f_n}{n!h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_1)\,.
\end{aligned}
$$

demonstração:

Basta considerar a Fórmula de Newton com Diferenças Divididas, mas construída relativamente aos nós por **ordem inversa** $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0$,

$$\begin{aligned} p_n(x) = \; & f[x_n] + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) + \\ & f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}](x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots + \\ & f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0](x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_1) \end{aligned}$$

e aplicar o resultado anterior.

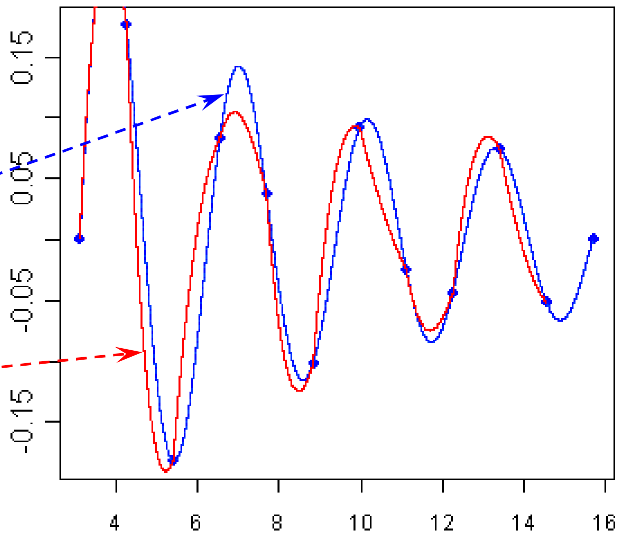
⇨ Erros de Interpolação Polinomial

Que **erro** se comete quando se **interpola uma função** por um **polinómio** de grau $\leq n$ utilizando o valor da função em $n+1$ nós distintos **?**

por exemplo:

$f(x) = \sin(2x) / x$

$p_{11}(x)$



teorema: Sejam $f \in C^{n+1}$ ([a, b]) e p_n o **polinómio** de grau $\leq n$ que **interpola** f nos **nós distintos** $x_0, x_1, \ldots, x_n$, contidos em [a, b] .

Então para **qualquer** $\widehat{x} \in$ [a, b] **existe** um valor $\xi \in$ (a, b) , dependente de $x_0, x_1, \cdots, x_n, \widehat{x}$ e de f tal que

$$e_n(\widehat{x}) \equiv f(\widehat{x}) - p_n(\widehat{x})$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(\widehat{x} - x_0)(\widehat{x} - x_1)\cdots(\widehat{x} - x_n)$$

demonstração:

- Nos **nós** da interpolação, $\widehat{x} = x_i,\ i = 0, 1, \cdots, n$
  o **erro** é igual a **zero** e o resultado é verdadeiro.

- Para analisar os **outros** pontos, $\widehat{x} \neq x_i,\ i = 0, 1, \cdots, n$

  consideremos o produto, $w(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$

  e a função auxiliar, $$F(x) = e_n(x) - \frac{w(x)}{w(\widehat{x})} e_n(\widehat{x})$$
  $$= f(x) - p_n(x) - \frac{w(x)}{w(\widehat{x})}\left[f(\widehat{x}) - p_n(\widehat{x})\right]$$

  F(x) tem pelo menos ***n*+2** zeros em [a, b] que são: $x_0, x_1, \cdots, x_n, \widehat{x}$

  então, aplicando sucessivamente o Corolário do Teorema de Rolle,

F(x) tem pelo menos ***n+2*** zeros em [a, b]

F'(x) tem pelo menos ***n+1*** zeros em [a, b]

F''(x) tem pelo menos ***n*** zeros em [a, b]

...

F$^{(n+1)}$(x) tem pelo menos ***1*** zero em [a, b]. Seja ξ um desses zeros.

Assim, $$F^{(n+1)}(\xi) = 0$$

com,
$$\begin{aligned} F(x) &= e_n(x) - \frac{w(x)}{w(\widehat{x})} e_n(\widehat{x}) \\ &= f(x) - p_n(x) - \frac{w(x)}{w(\widehat{x})} \left[f(\widehat{x}) - p_n(\widehat{x}) \right] \end{aligned}$$

e porque, $$p_n^{(n+1)}(x) = 0$$

$$w^{(n+1)}(x) = (n+1)!$$

temos $$f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)!}{w(\widehat{x})} \left[f(\widehat{x}) - p_n(\widehat{x}) \right] = 0$$

e portanto, $$e_n(\widehat{x}) \equiv f(\widehat{x}) - p_n(\widehat{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w(\widehat{x})$$

Esta expressão calcula o valor exacto do **erro de interpolação** em qualquer ponto $\widehat{x}$

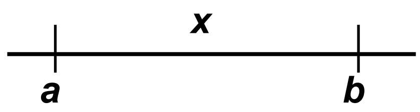
... se o valor de ξ for conhecido.

nota:

- Para $x \in [0, 1]$ a função $x\,(1-x)$ tem o seu valor máximo em $x = 1/2$. Assim, nesse intervalo,

$$x\,(1-x) \leq 1/4$$

- Para $x \in [a, b]$ com $h = b - a$, analisemos a função $(x-a)(b-x)$:



Fazendo $x = a + s\,h$, com $s \in [0, 1]$, ao valor máximo de $s = 1/2$ corresponde $x = a + h/2$ donde, no intervalo $[a, b]$,

$$(x-a)(b-x) \leq h^2/4$$

ou $$|(x-a)(x-b)| \leq h^2/4$$

- Para $n+1$ pontos equidistantes $x_0, x_1, \ldots, x_n$ com passo h, analisemos,

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

e provemos que

$$|\omega_n(x)| \leq \frac{n!}{4}\,h^{n+1} \quad , \quad x \in [x_0, x_n]$$

por **indução** sobre ***n*** .

- Para $n = 1$, como vimos, $|\,(x - x_0)\,(x - x_1)\,| \leq h^2/4$

- Assumindo que, para $\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$

  temos, $$|\omega_n(x)| \leq \frac{n!}{4}\, h^{n+1} \quad , \quad x \in [x_0, x_n]$$

  provemos que para

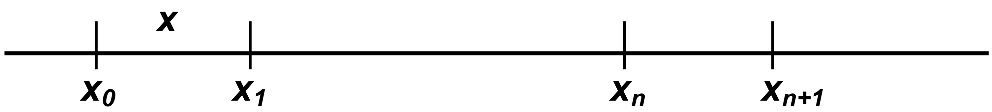
  $$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)(x - x_{n+1})$$

  teremos

  $$|\omega_{n+1}(x)| \leq \frac{(n+1)!}{4}\, h^{n+2} \quad , \quad x \in [x_0, x_{n+1}]$$

  Efectivamente,

$$\begin{aligned}
|\omega_{n+1}(x)| &= |(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)|\ .\ |(x - x_{n+1})| \\
&\leq \frac{n!}{4}\, h^{n+1}\ .\ |(x - x_{n+1})| \\
&\leq \frac{n!}{4}\, h^{n+1}\ .\ (n+1)\ h \\
&= \frac{(n+1)!}{4}\, h^{n+2}
\end{aligned}$$



⁎ *Estimativa do Erro de Interpolação*

Como em,

$$e_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \ \omega(x)$$

o valor de ξ é desconhecido, temos de calcular um **limite superior** para estimativa do valor do erro.

Para o caso particular da função a interpolar, procuramos um **majorante** em $[x_0, x_n]$,

$$\left| f^{(n+1)}(x) \right| \leq M_{n+1}$$

e considerando ***h*** o **espaçamento máximo** entre dois nós consecutivos,

$$|w(x)| \leq \frac{n!}{4} h^{n+1}, \ \ x \in [x_0, x_n]$$

temos,

$$|e_n(x)| \leq |w(x)| \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$$

ou,

$$|e_n(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)} M_{n+1} \, h^{n+1}$$

⁕ *Comportamento do Erro de Interpolação*

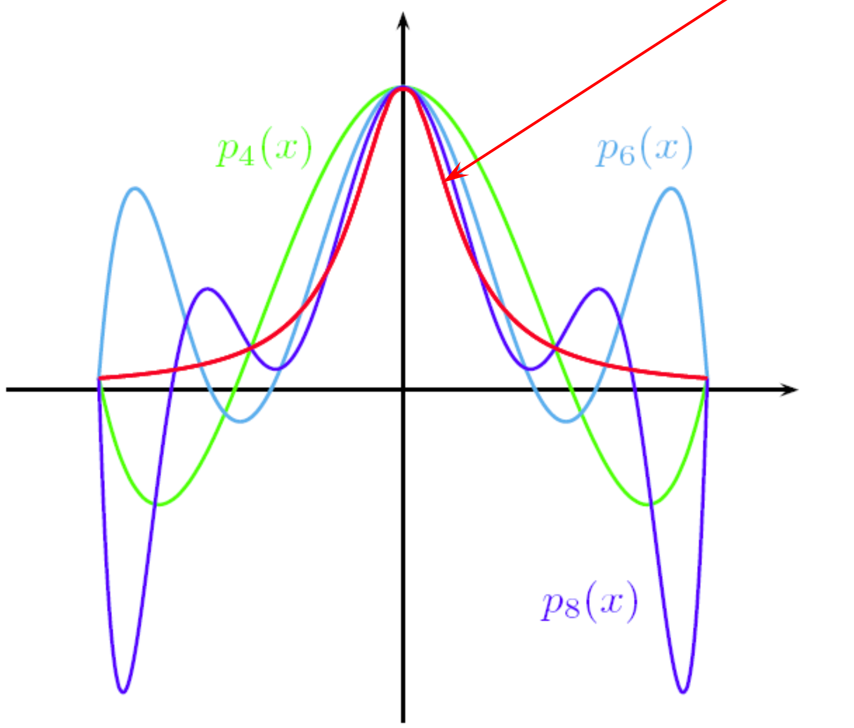
Analisando,
$$e_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\ \omega(x)$$

verificamos que o erro de interpolação depende de:

- o **número de nós** considerado,
- o comportamento da **derivada de ordem** ***n+1*** da função,
- o comportamento do **polinómio** ω de grau ***n+1*** .

O comportamento do **polinómio** ω pode ter efeitos indesejáveis, tal como no conhecido caso do **Efeito de Runge** :

A ***função de Runge*** é definida em [-1, 1] por, $f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$



*(**4** nós equidistantes)*

*(**6** nós equidistantes)*

*(**8** nós equidistantes)*

(polinómios interpoladores)

- Verifica-se que, **considerando nós equidistantes**, os polinómios interpoladores tendem a **oscilar nos extremos** e que oscilam **tanto mais** quanto **maior for o número** de nós considerado!

- Para **nós equidistantes** com $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ verifica-se que **o polinómio** ω **oscila** muito nos **intervalos extremos** $[x_0, x_1]$ e $[x_{n-1}, x_n]$ e menos nos intervalos centrais.

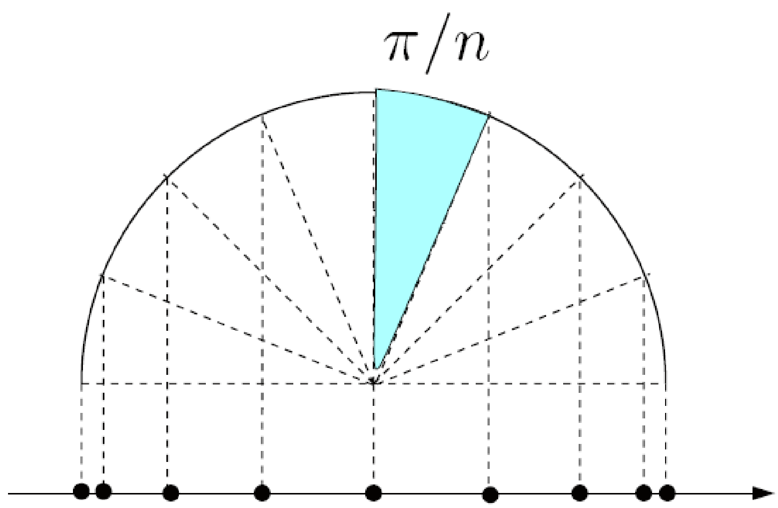
- Prova-se que o valor

$$\max_{x \in [x_0, x_n]} |w(x)|$$

é **mínimo** (e igual a 2^{-n}) quando os nós coincidem com os **nós de Chebyshev**.

- No intervalo $[-1, 1]$ os **nós de Chebyshev** são:

$$x_k = -\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$



- Num intervalo ***[a, b]*** os **nós de Chebyshev** são dados por:

$$x_k = \frac{b-a}{2} t_k + \frac{a+b}{2}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

onde t_k , $k = 0, 1, \ldots, n$ representa os nós de Chebyshev em ***[−1, 1]*** .

- Usando os nós de Chebyshev verifica-se que o **polinómio nodal** exibe **oscilações uniformes** em todo o intervalo considerado.

- **Com esta distribuição espacial dos nós** é possível mostrar que, se ***f*** for uma função contínua e diferenciável em ***[a, b]***, o **polinómio interpolador converge** para ***f*** quando $n \to \infty$ para todo o $x \in [a, b]$.