

* Nota sobre condicionamento de sistemas

Consideremos o sistema,

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -19 \\ 0.54x_1 - x_2 = -9 \end{cases}$$

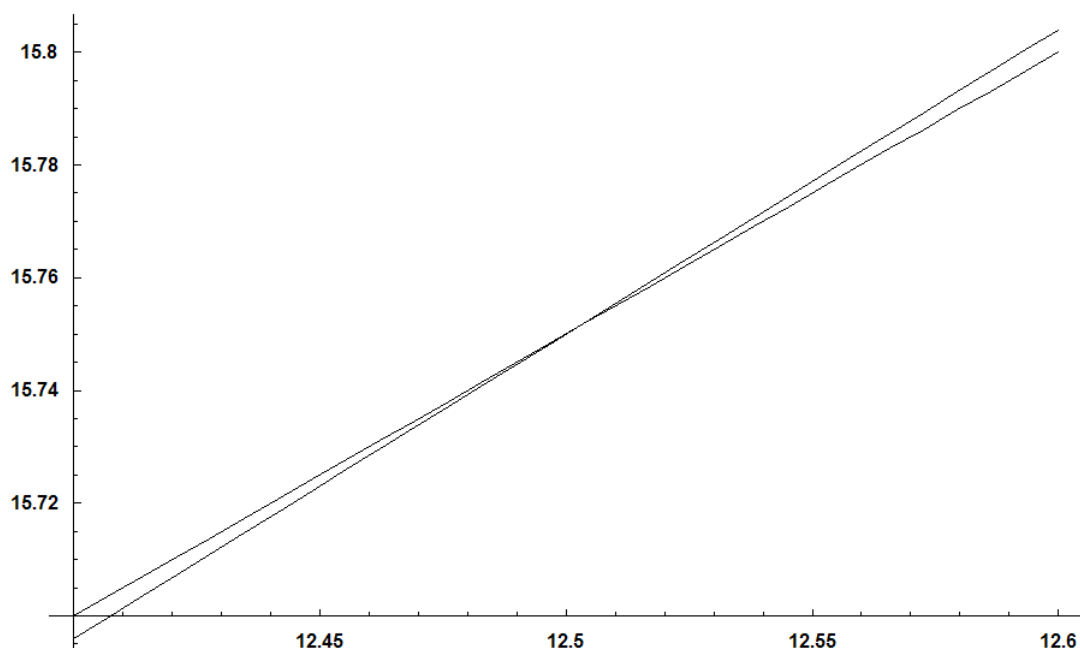
que tem como solução: $\{ x_1 = 12.5000, x_2 = 15.7500 \}$

Se introduzirmos uma **pequena perturbação** na matriz

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -19 \\ 0.56x_1 - x_2 = -9 \end{cases}$$

obtemos uma **solução muito diferente**: $\{ x_1 = 8.3333, x_2 = 13.6667 \}$

Trata-se de um **sistema mal condicionado** e, **neste caso**, é fácil entender porquê:



Em geral, o sistema que temos para resolver não é $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mas sim um sistema ligeiramente diferente ou **perturbado**.

Sejam $\delta_{\mathbf{A}}$ uma **matriz** que representa os **erros iniciais** em $\mathbf{A}$

e $\delta_{\mathbf{b}}$ um **vector** que representa os **erros iniciais** em $\mathbf{b}$.

Pretendemos conhecer $\delta_{\mathbf{x}}$ (**vector perturbação causada na solução**), tal que

$$(\mathbf{A} + \delta_{\mathbf{A}})(\mathbf{x} + \delta_{\mathbf{x}}) = \mathbf{b} + \delta_{\mathbf{b}}$$

Para isso são necessários os conceitos de **norma vectorial** e de **norma matricial**.

* Normas vectoriais

Definição: Uma **norma vectorial** é uma aplicação $\|\cdot\|: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_0^+$ que verifica:

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \|\mathbf{x}\| = 0 \text{ se e só se } \mathbf{x} = 0;$$

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \forall \alpha \in \mathbf{R}, \|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|;$$

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n \quad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|,$$

Por exemplo, são **normas vectoriais** de $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

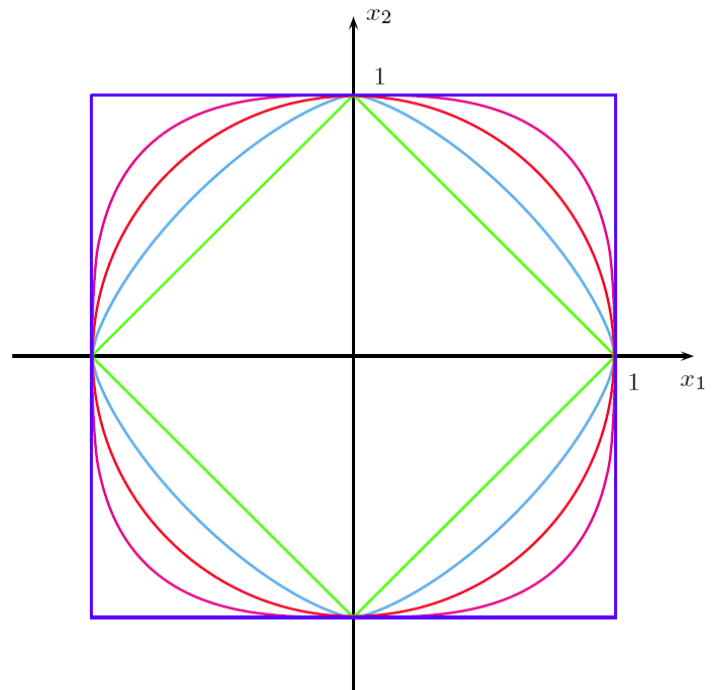
- **norma de máximo** (ou **norma ∞**) $\|\mathbf{x}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$
- **norma absoluta** (ou **norma 1**) $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- **norma euclideana** (ou **norma 2**) $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$

que são todas casos particulares da **norma p** (com $p \geq 1$), $\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_i |x_i|^p \right)^{1/p}$

Exemplo:

para $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

Representação dos conjuntos de vectores com **normas unitárias**, respectivamente, de dentro para fora:



$$\|x\|_1 = 1, \|x\|_{1.4} = 1, \|x\|_2 = 1, \|x\|_3 = 1 \text{ e } \|x\|_{\infty} = 1$$

Definição: Sejam $\mathbf{R}^{n \times n}$ o conjunto das matrizes reais de ordem n e $\mathbf{0}$ a matriz nula de ordem n .

Uma **norma matricial** é uma aplicação $\|\cdot\| : \mathbf{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbf{R}_0^+$ que verifica:

$$\forall \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}, \|\mathbf{A}\| = 0 \text{ se e só se } \mathbf{A} = \mathbf{0};$$

$$\forall \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}, \forall \alpha \in \mathbf{R}, \|\alpha \mathbf{A}\| = |\alpha| \|\mathbf{A}\|;$$

$$\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times n} \quad \|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|,$$

Teorema: Seja $\|\cdot\|$ uma **norma vectorial** em $\mathbf{R}^n$ e $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ uma **matriz**. Então,

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

é uma **norma matricial**,

a que chamamos **norma matricial natural** ou **induzida**.

Teorema: Seja $\|\cdot\|$ uma **norma matricial induzida** pela **norma vectorial** $\|\cdot\|$

Então, para $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{I}$ a matriz identidade de ordem n :

$$1) \|\mathbf{Ax}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|;$$

$$2) \|\mathbf{I}\| = 1;$$

$$3) \|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|.$$

E em particular, para uma norma matricial **induzida por uma norma p**,

Teorema: Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, então:

$$\|\mathbf{A}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right)$$

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right)$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^T \mathbf{A})},$$

onde $\rho(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ denota o **raio espectral** da matriz $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$.

Observações:

- $\|\mathbf{A}\|_{\infty}$ é o **máximo das somas por linhas** dos valores absolutos dos elementos
- $\|\mathbf{A}\|_1$ é o **máximo das somas por colunas** dos valores absolutos dos elementos
- A norma matricial $\|\mathbf{A}\|_2$ costuma designar-se por **norma espectral**

* Valores e Vectores Próprios

Definição: Sendo $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada e $\mathbf{I}$ a matriz identidade, o polinómio definido por,

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$$

é chamado o **polinómio característico** de $\mathbf{A}$.

Observação: Se $\mathbf{A}$ é de dimensão $n \times n$, então $p(\lambda)$ é um polinómio de **grau n** e, consequentemente, tem no máximo **n zeros distintos** que podem ser **reais ou complexos**.

Definição: Se p é o polinómio característico da matriz $\mathbf{A}$, os **zeros** de p (reais ou complexos) são designados **valores próprios** (ou **valores característicos**) da matriz $\mathbf{A}$.

Se λ é um valor próprio de $\mathbf{A}$ e se $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ satisfaz,

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

então $\mathbf{x}$ é designado um **vector próprio** (ou **vector característico**) de $\mathbf{A}$ associado ao valor próprio λ .

* Raio Espectral

Definição: Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. O **conjunto dos valores próprios** de $\mathbf{A}$ é o **espectro** de $\mathbf{A}$ e será designado por $\sigma(\mathbf{A})$, isto é,

$$\sigma(\mathbf{A}) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ é valor próprio de } \mathbf{A} \}$$

Designa-se por **raio espectral** de $\mathbf{A}$, denotado por $\rho(\mathbf{A})$, o valor

$$\rho(\mathbf{A}) = \max \{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(\mathbf{A}) \}$$

nota: se $\lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda = \alpha + \beta i)$, $|\lambda| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

Teorema: Seja $\sigma(\mathbf{A})$ o raio espectral da matriz $\mathbf{A}$ então, para qualquer norma natural ou **induzida**

$$\rho(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\|$$

Demonstração: Se λ é **valor próprio** de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{x}$ um **vector próprio** associado a λ tem-se, $\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$, com $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

Aplicando uma **norma vectorial**, $\|\lambda \mathbf{x}\| = \|\mathbf{A} \mathbf{x}\|$

onde $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$ e $\|\mathbf{A} \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|$

sendo $\|\cdot\|$ qualquer **norma matricial induzida** por $\|\cdot\|$

Portanto $|\lambda| \|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|$

e como $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ então $\|\mathbf{x}\| \neq 0$ e podemos dividir.

Assim, $|\lambda| \leq \|\mathbf{A}\|$ para **todo** o λ valor próprio de $\mathbf{A}$

incluindo o maior deles $\rho(\mathbf{A})$.

⇒ Condicionamento de Sistemas Lineares

Retomemos a relação,

$$(\mathbf{A} + \delta_{\mathbf{A}})(\mathbf{x} + \delta_{\mathbf{x}}) = \mathbf{b} + \delta_{\mathbf{b}}$$

erros iniciais em $\mathbf{A}$

erros iniciais em $\mathbf{b}$

perturbações causadas na solução $\mathbf{x}$

* Perturbações só no segundo membro ($\delta_{\mathbf{A}} = 0$)

Neste caso,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \delta_{\mathbf{x}}) = \mathbf{b} + \delta_{\mathbf{b}}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\delta_{\mathbf{x}} = \mathbf{b} + \delta_{\mathbf{b}} \quad \text{onde} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

portanto

$$\mathbf{A}\delta_{\mathbf{x}} = \delta_{\mathbf{b}}$$

e como se assume que o sistema é **determinado**, $\mathbf{A}$ é **invertível**,

$$\delta_{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1} \delta_{\mathbf{b}}$$

e tomando normas,

$$\|\delta_{\mathbf{x}}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\delta_{\mathbf{b}}\|$$

$$\|\delta_{\mathbf{x}}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\delta_{\mathbf{b}}\|$$

Esta relação fornece um **majorante do erro absoluto** da solução mas, faz muito mais sentido procurar um majorante do **erro relativo**.

Tratando-se de vectores, definimos **erro relativo**,

ou **perturbação relativa** de um vector $\mathbf{x}$, com $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, pela razão: $\frac{\|\delta_{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|}$

Então,

$$\frac{\|\delta_{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \frac{\|\delta_{\mathbf{b}}\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

Por outro lado, aplicando normas a $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{A} \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|$$

$$\|\mathbf{x}\| \geq \frac{\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{A}\|}$$

substituindo obtemos,

$$\frac{\|\delta_{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\| \frac{\|\delta_{\mathbf{b}}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

erros relativos em $\mathbf{x}$ erros relativos em $\mathbf{b}$

número de condição da matriz $\mathbf{A}$

Número de condição da matriz $\mathbf{A}$:

$$\text{cond } \mathbf{A} = |||\mathbf{A}||| \ |||\mathbf{A}^{-1}|||$$

- O **efeito da propagação** dos erros do **segundo membro** é determinado pela **matriz do sistema**.
- Quanto **maior** for o valor de $\text{cond } \mathbf{A}$, **mais sensível** é o sistema a perturbações do segundo membro.
- O valor numérico de $\text{cond } \mathbf{A}$ depende **da norma** utilizada.
- Matrizes com um número de condição **alto** dizem-se **mal condicionadas**.
- Matrizes com um número de condição **baixo** dizem-se **bem condicionadas**.
- Prove que: $\text{cond } \mathbf{A} \geq 1$

*** Perturbações na matriz ($\delta_{\mathbf{b}} = 0$)**

Neste caso, $(\mathbf{A} + \delta_{\mathbf{A}})(\mathbf{x} + \delta_{\mathbf{x}}) = \mathbf{b}$

$$\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{A} \delta_{\mathbf{x}} + \delta_{\mathbf{A}} (\mathbf{x} + \delta_{\mathbf{x}}) = \mathbf{b}$$

onde $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ e assumindo $\mathbf{A}$ invertível,

$$\delta_{\mathbf{x}} = -\mathbf{A}^{-1} \delta_{\mathbf{A}} (\mathbf{x} + \delta_{\mathbf{x}})$$

e aplicando normas,

$$\|\delta_{\mathbf{x}}\| \leq |||\mathbf{A}^{-1}||| \|\delta_{\mathbf{A}}\| \|\mathbf{x} + \delta_{\mathbf{x}}\|$$

donde

$$\frac{\|\delta_{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x} + \delta_{\mathbf{x}}\|} \leq \underbrace{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|}_{\text{cond } \mathbf{A}} \frac{\|\delta_{\mathbf{A}}\|}{\|\mathbf{A}\|}$$

- Novamente constatamos que é o **número de condição da matriz** que determina a maior ou menor influência que uma perturbação da matriz $\mathbf{A}$ pode ter na solução.

{ Calcule o número de condição da matriz do sistema mal condicionado do exemplo da página 36 }

- Claro que, desta vez, o erro relativo nos resultados depende também das perturbações introduzidas nos elementos da matriz.
- Assumindo que $\delta_{\mathbf{x}} \ll \mathbf{x}$, o primeiro membro da desigualdade representa uma boa **aproximação do erro relativo** dos resultados.

- Considerando que, $\|\delta \mathbf{A}\| < \|\mathbf{A}^{-1}\|^{-1}$ é possível mostrar que,

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| \frac{\|\delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \left(\frac{1}{1 - \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\delta \mathbf{A}\|} \right)$$

{ Ver: Computação Numérica, Edite Manuela Fernandes, pp. 68-70 }

* Perturbações na matriz e no segundo membro

Para o caso geral, é possível obter a relação,

{ Ver: *Computação Numérica*, Edite Manuela Fernandes, pp. 70 }

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|A\|}{(1 - \|A^{-1}\| \|\delta A\|)} \left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right)$$

erros relativos em x

erros relativos em b

erros relativos em A

número de condição da matriz A

Verificamos que:

- Os erros relativos da matriz aparecem **somados** aos erros relativos dos segundos membros.
- Tanto os erros relativos da matriz como os dos segundos membros, aparecem sempre **multiplicados** pelo **número de condição da matriz**.
- Por isso os erros relativos dos resultados podem atingir **valores muito superiores** aos erros introduzidos nos dados do problema.
- O número de condição da matriz, $cond\ A \geq 1$, mede a **sensibilidade** do sistema.

⇒ Métodos Iterativos Estacionários

- Os métodos iterativos são **eficientes** (**tempo** de execução e **espaço** de memória), em particular na solução de sistemas de **grandes dimensões** envolvendo **matrizes esparsas** (ou rarefeitas).

Note que, por exemplo o método de eliminação de Gauss não preserva a esparsidade da matriz, durante a resolução.

- Para resolver um sistema, os **métodos iterativos** partem de uma **aproximação inicial**, $\mathbf{x}^{(0)}$ e constroem uma **sucessão de aproximações**,

$$\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}, \dots$$

que seja **convergente para a solução exacta** $\mathbf{x}$ do sistema.

- É necessária uma relação que permita obter cada solução a partir da anterior.

$$\mathbf{x}^{(k)} \rightarrow \mathbf{x}^{(k+1)}$$

Por isso, o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ é convertido num sistema **equivalente** do tipo

$$\mathbf{x} = \mathbf{Mx} + \mathbf{c}$$

onde $\mathbf{M}$ é uma matriz e $\mathbf{c}$ um vector.

- Nesta secção, estudaremos os métodos iterativos do **tipo estacionário**, que têm a forma geral,

$$\boxed{\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{M} \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}}, \quad k = 0, 1, \dots$$

em que $\mathbf{M}$ é chamada **matriz de iteração**.

Definição: Se para qualquer estimativa inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ a sucessão $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ convergir para um limite independente de $\mathbf{x}^{(0)}$ então o **método iterativo** diz-se **convergente**.

Definição: O **método iterativo** formulado por $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{M} \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$ diz-se **consistente** com $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ se este sistema e $\mathbf{x} = \mathbf{M} \mathbf{x} + \mathbf{c}$ tiverem a mesma solução.

Procuremos condições de convergência...

Propriedade: Para qualquer matriz quadrada $\mathbf{A}$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{0} \Leftrightarrow \rho(\mathbf{A}) < 1$$

{ Quando todos os valores próprios têm grandeza menor que um, a **transformação linear** realizada pela matriz sobre um vector é uma **redução**. Caso contrário é uma **ampliação**. }

Uma condição necessária e suficiente de convergência:

Teorema: Seja $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{M} \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$ um método iterativo consistente com $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

A **sucessão** $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ é **convergente**,

para qualquer aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, **se e só se** $\rho(\mathbf{M}) < 1$

Demonstração:

Seja $\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}$ o erro da iteração k

$$\begin{aligned}\text{então } \mathbf{e}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x} \\ &= \mathbf{M} \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c} - (\mathbf{M} \mathbf{x} + \mathbf{c}) \\ &= \mathbf{M} (\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}) = \mathbf{M} \mathbf{e}^{(k)}\end{aligned}$$

donde $\mathbf{e}^{(k+1)} = \mathbf{M}^{k+1} \mathbf{e}^{(0)}$ para todo o $k = 0, 1, 2, \dots$

a) Se $\rho(\mathbf{M}) < 1$ então a sucessão $\{\mathbf{M}^k\}$ tende para zero

independentemente do valor de $\mathbf{e}^{(0)}$ bem como a sucessão $\{\mathbf{e}^{(k)}\}$
e a sucessão $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ tende para $\mathbf{x}$, para qualquer valor de $\mathbf{x}^{(0)}$

b) (por absurdo)

Se $\rho(\mathbf{M}) \geq 1$, a matriz $\mathbf{M}$ teria algum valor próprio $\lambda \geq 1$

Seja $\mathbf{e}^{(0)}$ o vector próprio associado a λ , isto é, $\mathbf{M} \mathbf{e}^{(0)} = \lambda \mathbf{e}^{(0)}$

$$\text{donde, } \mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{M}^k \mathbf{e}^{(0)} = \lambda^k \mathbf{e}^{(0)}$$

Então, para este $\mathbf{e}^{(0)}$, a sucessão $\{\mathbf{e}^{(k)}\}$ nunca poderia tender para **zero**, quer com $\lambda > 1$ ou com $\lambda = 1$.

Portanto, para que a sucessão dos erros tenda para zero e as sucessivas aproximações $\mathbf{x}^{(k)}$ tendam para $\mathbf{x}$, é necessário que $\lambda < 1$.

Uma condição suficiente de convergência:

Teorema: Se $\|M\| < 1$ para alguma **norma matricial natural**,
 então a sucessão $\{x^{(k)}\}$ gerada por $x^{(k+1)} = M x^{(k)} + c$,
converge para a solução única da equação $x = M x + c$,
 para qualquer aproximação inicial $x^{(0)}$ considerada.
 Mais ainda, verifica-se que,

$$(i) \quad \|x - x^{(k)}\| \leq \|M\|^k \|x - x^{(0)}\|;$$

$$(ii) \quad \|x - x^{(k)}\| \leq \frac{\|M\|^k}{1 - \|M\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

Demonstração: $\{TPC...\}$

⇒ Critérios de Paragem dos Métodos Iterativos Estacionários

Considere-se um método iterativo estacionário, $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{M} \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$

consistente com $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$

* Critérios de Paragem baseados no Vector Resíduo

Seja $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}^{(k)}$ o **vector resíduo** na iteração k

- O critério mais simples consiste em continuar o processo iterativo até que,

$$\left\| \mathbf{r}^{(k)} \right\| \leq \delta$$

onde δ é uma tolerância predefinida.

- Limitação do vector resíduo de forma a garantir uma **tolerância** predefinida, δ , no **erro absoluto**.

Seja $\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}$ o vector erro na iteração k ,

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{e}^{(k)} \right\| &= \left\| \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)} \right\| = \left\| \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{x}^{(k)} \right\| = \left\| \mathbf{A}^{-1} \left(\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}^{(k)} \right) \right\| \\ &= \left\| \mathbf{A}^{-1} \mathbf{r}^{(k)} \right\| \leq \left\| \mathbf{A}^{-1} \right\| \left\| \mathbf{r}^{(k)} \right\| \leq \delta \end{aligned}$$

donde,

$$\left\| \mathbf{r}^{(k)} \right\| \leq \frac{\delta}{\left\| \mathbf{A}^{-1} \right\|}$$

- Limitação do vector resíduo de forma a garantir uma **tolerância** predefinida, δ , no **erro relativo**.

$$\frac{\|x - x^{(k)}\|}{\|x\|} = \frac{\|A^{-1}r^{(k)}\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|r^{(k)}\|}{\frac{\|b\|}{\|A\|}} \leq \text{cond}(A) \frac{\|r^{(k)}\|}{\|b\|} \leq \delta$$

donde,

$$\|r^{(k)}\| \leq \frac{\delta \|b\|}{\text{cond}(A)}$$

*** Critérios de Paragem baseados na diferença entre duas aproximações sucessivas**

- Continuar o processo iterativo até que,

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \leq \delta$$

onde δ é uma tolerância predefinida.

- Continuar o processo iterativo até que,

$$\frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|}{\|x^{(k)}\|} \leq \delta$$

onde δ é uma tolerância predefinida.

- Limitação da diferença entre duas aproximações sucessivas, para garantir uma tolerância predefinida, δ , no **erro**.

(admitindo que $\|M\| < 1$, sendo M a matriz de iteração).

Temos que,

$$\begin{aligned}\|x - x^{(k)}\| &= \|M(x - x^{(k-1)})\| \\ &\leq \|M\| \left(\|x - x^{(k)}\| + \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \right)\end{aligned}$$

Se $\|M\| < 1$

$$\|x - x^{(k)}\| \leq \frac{\|M\|}{1 - \|M\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \leq \delta$$

donde,

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \leq \frac{1 - \|M\|}{\|M\|} \delta$$

⇒ Método de Jacobi

Considere-se o sistema linear $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Assumindo que $a_{ii} \neq 0$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, o **Método de Jacobi** consiste no **isolamento do vector $\mathbf{x}$** no lado esquerdo mediante a **separação pela diagonal**,

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n) \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n) \\ \vdots \\ x_n = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}) \end{cases}$$

E assim se obtém uma fórmula do tipo $\mathbf{x} = \mathbf{M} \mathbf{x} + \mathbf{c}$, com

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & \dots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} & \dots & -a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & -a_{n3}/a_{nn} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}$$

Dada uma **aproximação inicial** $\mathbf{x}^{(0)}$, calculam-se $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, ..., $\mathbf{x}^{(k)}$, ...

pela **relação recorrente** $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{M} \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)}) \end{cases}$$

ou seja,

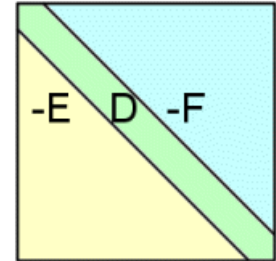
$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j^{(k)}) / a_{ii}$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad k = 0, 1, \dots$$

* Dedução do Método de Jacobi na forma matricial

Considere-se a decomposição,

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{E} - \mathbf{F}$$



onde, $\mathbf{D} = \{ a_{ij}, i = j \}$

$$\mathbf{E} = \{ -a_{ij}, i > j \}$$

$$\mathbf{F} = \{ -a_{ij}, i < j \}$$

Então, de $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$(\mathbf{D} - \mathbf{E} - \mathbf{F}) \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{D} \mathbf{x} = (\mathbf{E} + \mathbf{F}) \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

obtemos $\mathbf{x} = \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{E} + \mathbf{F}) \mathbf{x} + \mathbf{D}^{-1} \mathbf{b}$

que conduz ao processo iterativo,

$$\boxed{\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{E} + \mathbf{F}) \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{D}^{-1} \mathbf{b}}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \underbrace{\mathbf{D}^{-1} (\mathbf{E} + \mathbf{F})}_{\mathbf{M}} \mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{\mathbf{D}^{-1} \mathbf{b}}_{\mathbf{c}}$$

Observação: Esta decomposição assume que $\mathbf{D}$ seja uma matriz **invertível**, o que implica que os elementos diagonais de $\mathbf{A}$ sejam todos diferentes de zero.

Portanto, $\mathbf{M} = \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{E} + \mathbf{F})$

e como $\mathbf{E} + \mathbf{F} = \{ -a_{ij}, i \neq j \}$
 $\mathbf{D}^{-1} = \{ 1/a_{ii}, i = j \}$

então
$$\begin{cases} m_{ii} = 0, \\ m_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, i \neq j \end{cases}$$

* *Convergência do Método de Jacobi*

Definição: Uma matriz quadrada $\mathbf{A}$ diz-se
de diagonal estritamente dominante por linhas se,

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Teorema: Se $\mathbf{A}$ for uma matriz **de diagonal estritamente dominante por linhas**,
então o **Método de Jacobi** gera uma sucessão **convergente**
para a **solução única** de $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$, para qualquer escolha de $\mathbf{x}^{(0)}$.

Demonstração:

Como vimos, a matriz **M** é definida por,

$$\begin{cases} m_{ii} = 0, \\ m_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, i \neq j \end{cases}$$

De acordo com o **teorema** da pág. 51, basta provar que

existe uma **norma matricial natural** para a qual $\|\mathbf{M}\| < 1$

Tomando a **norma do máximo** (máximo das somas por linhas),

$$\|\mathbf{M}\|_{\infty} = \max_i \sum_{j=1}^n |m_{ij}| = \max_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} = \max_i \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|}{|a_{ii}|}$$

onde, **por hipótese**,

A é uma matriz **de diagonal estritamente dominante por linhas**, isto é,

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

e portanto

$$\|\mathbf{M}\|_{\infty} = \max_i \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$$

■

⇒ Método de Gauss-Seidel

Recordemos o Método de Jacobi,

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)}) \end{cases}$$

O **Método de Gauss-Seidel** é semelhante. Contudo, em cada iteração **(k+1)**, são utilizados **todos os valores $x^{(k+1)}$** que **já foram calculados**.

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\ \text{---} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\ \text{---} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{34}x_4^{(k)} - \dots - a_{3n}x_n^{(k)}) \\ \text{---} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)}) \\ \text{---} \end{cases}$$

ou seja,

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) / a_{ii}$$

$i = 1, 2, \dots, n \quad k = 0, 1, \dots$

onde, se $j < i$ são usados valores x_j já calculados na **presente iteração**
 se $j > i$ são usados valores x_j calculados na **iteração anterior**

* *Dedução do Método de Gauss-Seidel na forma matricial*

Partindo da mesma decomposição, $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{E} - \mathbf{F}$

e substituindo em $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ obtemos $(\mathbf{D} - \mathbf{E} - \mathbf{F}) \mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$(\mathbf{D} - \mathbf{E}) \mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{F} \mathbf{x}$$

que conduz ao processo iterativo,

$$(\mathbf{D} - \mathbf{E}) \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{b} + \mathbf{F} \mathbf{x}^{(k)}$$

$$\mathbf{D} \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{b} + \mathbf{E} \mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{F} \mathbf{x}^{(k)}$$

Na prática é mais utilizada uma alternativa a esta formulação.

Partindo de,

$$(D - E - F) x = b$$

$$(D - E) x = F x + b$$

obtemos

$$x = (D - E)^{-1} F x + (D - E)^{-1} b$$

que conduz ao processo iterativo,

$$x^{(k+1)} = (D - E)^{-1} F x^{(k)} + (D - E)^{-1} b$$

e assim,

$$x^{(k+1)} = \underbrace{(D - E)^{-1} F}_{M} x^{(k)} + \underbrace{(D - E)^{-1} b}_{c}$$

o que permite também analisar a:

* **Convergência do Método de Gauss-Seidel**

Teorema: Se **A** for uma matriz **de diagonal estritamente dominante por linhas**, então o **Método de Gauss-Seidel** gera uma sucessão **convergente** para a **solução única** de **A x = b**, para qualquer escolha de **x⁽⁰⁾**.

exercício (13):

Um processo iterativo para resolver sistemas de equações lineares do tipo $Ax = b$ é definido da seguinte forma:

primeiro, somar Ix a ambos os membros da equação $Ax = b$, onde I representa a matriz identidade, obtendo-se $(I + A)x = b + Ix$;

em seguida, efectuar iterações a partir de $x^{(0)}$ com $x^{(k+1)} = (I + A)x^{(k)} - b$, $k \geq 0$.

Verifique se o processo iterativo definido permite gerar uma sucessão de vectores convergente para a solução do sistema

$$\begin{cases} -1.1x_1 + 0.1x_2 = 1 \\ 0.3x_1 - 0.3x_2 = 0 \end{cases}$$

abordagem:

$$x^{(k+1)} = (I + A)x^{(k)} - b,$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \underbrace{\mathbf{M}}_{\mathbf{M}} \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$$

portanto é preciso estudar a **matriz de iteração** $\mathbf{M} = \mathbf{I} + \mathbf{A}$ com,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

uma solução (condição necessária e suficiente de convergência):

Construir o **polinómio característico** $|\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}|$, resolver a equação $|\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}| = 0$ e obter os **valores próprios**:

$$\{0.73589, -0.13589\}$$

para confirmar que $\rho(\mathbf{M}) < 1$.

outra solução (condição suficiente de convergência):

Procurar alguma **norma natural** de $\mathbf{M}$ que seja < 1 .

E efectivamente:

$$||| \mathbf{M} |||_1 = 0.8$$

exercício (14):

O sistema linear $Ax = b$, com a matriz A dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R},$$

pode ser resolvido, sob certas condições, pelo método iterativo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{bmatrix} x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x^{(k)} + b, k \geq 0.$$

Para que valores de a é o método convergente? Justifique convenientemente a sua resposta.

uma abordagem:

Para estudar o processo iterativo, precisamos duma formulação do tipo $\mathbf{x} = \mathbf{M} \mathbf{x} + \mathbf{c}$.

Neste caso,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} x^{(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} x^{(k)} + b,$$

$$\underbrace{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}}_{\mathbf{I}} \mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}}_{\mathbf{M}} \mathbf{x} + \underbrace{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}}_{\mathbf{c}}$$

ou seja,

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} = \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

Construindo o **polinómio característico** $|\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}|$, obtemos os valores próprios:

$$\{0, a^2\}$$

Assim, para que o método seja convergente, é **necessário e suficiente** que $|a| < 1$.

exercício (7):

Considere o sistema linear $Ax = b$ com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Supondo que o segundo membro é perturbado por $\delta_b = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2]^T$, onde $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2| \leq 10^{-4}$, estime o efeito dessa perturbação na solução, isto é, estime $\|\delta_x\|$.

uma abordagem:

Recordemos que (pp. 43-44) quando **apenas** existem perturbações no **segundo membro**, os **erros absolutos** estão relacionados por:

$$\|\delta_x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta_b\|$$

onde a norma matricial é a **induzida** pela norma vectorial utilizada.

Atendendo a que $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2| \leq 10^{-4}$ é razoável escolher a **norma do máximo**, pois:

$$\|\delta_b\|_\infty = \max \{ |\varepsilon_1|, |\varepsilon_2| \} \leq 10^{-4}$$

Resta calcular a **matriz inversa** e a correspondente **norma do máximo** (máximo das somas por linhas dos valores absolutos dos elementos),

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad \text{com} \quad \|A^{-1}\|_\infty = 3/5$$

Portanto,

$$\|\delta_x\|_\infty \leq 3/5 \cdot 10^{-4}$$

exercício (9):

Considere a resolução de um sistema linear $Ax = b$ (com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não singular) por um método iterativo consistente $x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + c$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Mostre que, $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, se $\|M\| < 1$ para alguma norma matricial natural, então:

(a)

$$\|x - x^{(k)}\| \leq \|M\|^k \|x - x^{(0)}\| ;$$

(b)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x - x^{(k)}\| = 0 ;$$

(c)

$$\|x - x^{(k)}\| \leq \frac{\|M\|}{1 - \|M\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| .$$

uma abordagem:

Partindo de,

$$x = Mx + c$$

e de,

$$x^{(k)} = Mx^{(k-1)} + c$$

e subtraindo, $x - x^{(k)} = M(x - x^{(k-1)})$

aplicando uma norma vectorial e a respectiva norma matricial induzida,

$$\|x - x^{(k)}\| \leq \|M\| \|x - x^{(k-1)}\| \quad (1)$$

$$(a) \quad \left\| x - x^{(k)} \right\| \leq \|M\|^k \left\| x - x^{(0)} \right\|$$

Uma solução possível, consiste em **demonstrar** este resultado por **indução** sobre **k**.

Para **k = 1**: é imediato a partir da fórmula **(1)**:

$$\left\| x - x^{(1)} \right\| \leq \|M\| \left\| x - x^{(0)} \right\|$$

assumindo que: $\left\| x - x^{(k)} \right\| \leq \|M\|^k \left\| x - x^{(0)} \right\|$

prevemos que: $\left\| x - x^{(k+1)} \right\| \leq \|M\|^{k+1} \left\| x - x^{(0)} \right\|$

Demonstração: também da fórmula **(1)**:

$$\left\| x - x^{(k+1)} \right\| \leq \|M\| \left\| x - x^{(k)} \right\|$$

que, por **Hipótese de Indução**,

$$\begin{aligned} &\leq \|M\| \|M\|^k \left\| x - x^{(0)} \right\| \\ &= \|M\|^{k+1} \left\| x - x^{(0)} \right\| \end{aligned}$$

e pelo **Princípio da Indução**, está demonstrado o resultado pretendido, para qualquer **k ≥ 1**.

$$(b) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|x - x^{(k)}\| = 0$$

Partindo do resultado anterior: $\|x - x^{(k)}\| \leq \|M\|^k \|x - x^{(0)}\|$

Atendendo a que $\|M\| < 1$

$$\text{então} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|M\|^k = 0$$

e como $\|x - x^{(0)}\|$ não depende de k ,

$$\text{então também,} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|M\|^k \|x - x^{(0)}\| = 0$$

Assim, e porque toda a **norma** é ≥ 0 , a sucessão:

$$\{ \|x - x^{(k)}\| \}$$

é uma **sucessão enquadrada** por 0 e uma sucessão de limite 0 e portanto:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x - x^{(k)}\| = 0$$

$$(c) \quad \left\| x - x^{(k)} \right\| \leq \frac{\|M\|}{1 - \|M\|} \left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\|$$

Considerando,

$$(x - x^{(k-1)}) = (x - x^{(k)}) + (x^{(k)} - x^{(k-1)})$$

e aplicando uma norma vectorial, pela **desigualdade triangular** temos,

$$\|x - x^{(k-1)}\| \leq \|x - x^{(k)}\| + \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$$

Substituindo esta relação na fórmula **(1)**

$$\begin{aligned} \|x - x^{(k)}\| &\leq \|M\| \|x - x^{(k-1)}\| \\ &\leq \|M\| (\|x - x^{(k)}\| + \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|) \\ &= \|M\| \|x - x^{(k)}\| + \|M\| \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \end{aligned}$$

$$\|x - x^{(k)}\| - \|M\| \|x - x^{(k)}\| \leq \|M\| \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$$

$$(1 - \|M\|) \|x - x^{(k)}\| \leq \|M\| \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$$

e como $\|M\| < 1$ temos finalmente,

$$\|x - x^{(k)}\| \leq \frac{\|M\|}{1 - \|M\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$$