

* Espaços Isomorfos

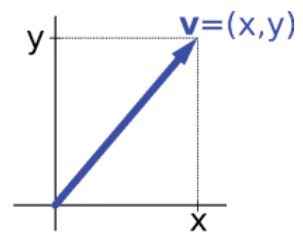
- Sejam E e E' dois espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$.

Dizemos que E e E' são **isomorfos** se **existir um isomorfismo** $\varphi : E \longrightarrow E'$ e escrevemos,

$$E \simeq E'$$

- Por exemplo,

o espaço dos vectores livres no plano é **isomorfo** a $\mathbb{R}^2$, porque podemos estabelecer um **isomorfismo** que, à extremidade de cada vector, faz corresponder as respectivas coordenadas $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.



- Propriedade:** Sejam E e E' dois espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$,
se $\varphi : E \longrightarrow E'$ é um **isomorfismo**
então $\varphi^{-1} : E' \longrightarrow E$ também é um **isomorfismo**.

- Proposição:** Sejam E , E' e E'' **três espaços vectoriais** sobre $\mathbb{K}$,

(a) $E \simeq E$

(b) se $E \simeq E'$ então $E' \simeq E$

(c) se $E \simeq E'$ e $E' \simeq E''$ então $E \simeq E''$

ou seja, o **isomorfismo** é uma **relação de equivalência**.

Demonstração: (a) $E \simeq E$

A **aplicação identidade** $id_E : E \longrightarrow E$

que a todo o $u \in E$ faz corresponder $id_E(u) = u$

é uma aplicação linear, injectiva e sobrejectiva,

logo um **isomorfismo**.

(b) se $E \simeq E'$ então $E' \simeq E$

Se existe um isomorfismo $\varphi : E \longrightarrow E'$

então, pela propriedade anterior, a **aplicação inversa**

$\varphi^{-1} : E' \longrightarrow E$ **também é um isomorfismo**.

(c) se $E \simeq E'$ e $E' \simeq E''$ então $E \simeq E''$

Se existe um isomorfismo $\varphi : E \longrightarrow E'$

e um isomorfismo $\psi : E' \longrightarrow E''$

então, a **aplicação composta** $(\psi \circ \varphi) : E \longrightarrow E''$

é uma aplicação linear, injectiva e sobrejectiva,

logo um **isomorfismo**.

- **Proposição:** Sendo E e E' **espaços vectoriais de dimensão finita** sobre $\mathbb{K}$, então,

$$E \simeq E' \iff \dim E = \dim E'$$

- Este resultado tem consequências práticas particularmente importantes, pois mostra que todos os espaços vectoriais **com a mesma dimensão finita** são **isomorfos**.

- **Proposição:** Seja E um **espaço vectorial** sobre $\mathbb{K}$ tal que $\dim E = n$,
então, $E \simeq \mathbb{K}^n$

- Por exemplo os **espaços vectoriais** $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^6$ **são isomorfos**,
pois têm **dimensão finita** e,

$$\dim M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) = 6 = \dim \mathbb{R}^6$$

Podemos confirmar este resultado estabelecendo uma aplicação,

$\phi : M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^6$ e provar que se trata de um **isomorfismo**.

Por exemplo a aplicação,

$$\phi \left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \right) = (a, b, c, d, e, f)$$

Para provar que é **injectiva**, calculemos o **núcleo** da aplicação,

$$\begin{aligned} \text{Nuc } \phi &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \right. \\ &\quad \left. : \phi \left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \right) = (0, 0, 0, 0, 0, 0) \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \right. \\ &\quad \left. : (a, b, c, d, e, f) = (0, 0, 0, 0, 0, 0) \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Assim, como o **núcleo** de ϕ é apenas o **vector nulo** de $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, podemos concluir que é um **monomorfismo** e, tendo os dois espaços **a mesma dimensão**, podemos também concluir que é um **epimorfismo**.

Falta apenas **provar** que ϕ é mesmo **uma aplicação linear** ...

- Por exemplo os **espaços vectoriais** $P_n[X]$ e $\mathbb{R}^{n+1}$ **são isomorfos**, pois têm **dimensão finita** e,

$$\dim P_n[X] = n + 1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$$

Efectivamente a aplicação,

$$\begin{aligned} \varphi : P_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 &\mapsto (a_n, \dots, a_1, a_0) \end{aligned}$$

é um **isomorfismo** de $P_n[X]$ em $\mathbb{R}^{n+1}$.

- Mostre que os **espaços vectoriais** $P_3[X]$ e $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ **são isomorfos**, estabelecendo uma aplicação entre eles e provando que é um **isomorfismo**.

* Matriz de uma Aplicação Linear

- Nesta secção, todos os espaços vectoriais considerados têm **dimensão finita**.
- Sejam E e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ tais que $\dim E = n$ e $\dim E' = p$, sejam $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ uma **base ordenada** de E
 $\mathcal{B}_2 = (e'_1, e'_2, \dots, e'_p)$ uma **base ordenada** de E'
 e seja $\varphi : E \longrightarrow E'$ uma **aplicação linear**.

A **matriz da aplicação linear** φ **em relação às bases** $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ é uma matriz do tipo $p \times n$, representada por $M(\varphi; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ e definida por,

$$M(\varphi; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{bmatrix}$$

onde **cada coluna** $i = 1, 2, \dots, n$ é formada pelas **coordenadas** de $\varphi(e_i)$ na base $\mathcal{B}_2$,

$$\varphi(e_i) = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{pi})_{\mathcal{B}_2}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + \cdots + a_{p1}e'_p \\ \varphi(e_2) = a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + \cdots + a_{p2}e'_p \\ \vdots \\ \varphi(e_n) = a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + \cdots + a_{pn}e'_p \end{cases}$$

- Por exemplo para a **aplicação linear** $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por,

$$\varphi(x, y) = (2x, x - y, 3y), \quad \text{para todo o } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

consideremos as **bases canónicas**,

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = ((1, 0), (0, 1))$$

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$$

e calculemos a respectiva **matriz** $M(\varphi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3})$.

Determinando as **coordenadas das imagens** dos vectores da base $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ na base $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}$,

$$\begin{aligned} \varphi(1, 0) &= (2, 1, 0) \\ &= 2(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1) \\ &= \underline{(2, 1, 0)}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(0, 1) &= (0, -1, 3) \\ &= 0(1, 0, 0) + (-1)(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1) \\ &= \underline{(0, -1, 3)}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}} \end{aligned}$$

e portanto,

$$M(\varphi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Para a mesma **aplicação linear** $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por,

$$\varphi(x, y) = (2x, x - y, 3y), \quad \text{para todo o } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

consideremos agora as **bases**,

$$\mathcal{B} = ((1, 1), (-1, 2)) \quad \text{de } \mathbb{R}^2$$

$$\mathcal{B}' = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)) \quad \text{de } \mathbb{R}^3$$

e calculemos a respectiva **matriz** $M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Determinando as **coordenadas das imagens** dos vectores de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{B}'$,

$$\begin{aligned} \varphi(1, 1) &= (2, 0, 3) \\ &= \dots \\ &= 3(1, 1, 1) + (-3)(1, 1, 0) + 2(1, 0, 0) \\ &= (3, -3, 2)_{\mathcal{B}'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(-1, 2) &= (-2, -3, 6) \\ &= \dots \\ &= 6(1, 1, 1) + (-9)(1, 1, 0) + 1(1, 0, 0) \\ &= (6, -9, 1)_{\mathcal{B}'} \end{aligned}$$

e portanto,

$$M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -9 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Por exemplo para a **aplicação linear** $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por,

$$\phi(a, b, c) = (2a + b, -c), \quad \text{para todo o } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

em relação às **bases**,

$$\mathcal{B} = ((1, 1, 2), (0, 2, 6), (0, 0, -4)) \quad \text{de } \mathbb{R}^3$$

$$\mathcal{B}' = ((1, 0), (0, 2)) \quad \text{de } \mathbb{R}^2$$

calculemos a respectiva $M(\phi; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$, **matriz da aplicação linear** ϕ **em relação às bases** $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$

Determinando as **coordenadas das imagens** por ϕ , dos vectores de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{B}'$,

$$\begin{aligned} \phi(1, 1, 2) &= (3, -2) \\ &= 3(1, 0) + (-1)(0, 2) \\ &= (3, -1)_{\mathcal{B}'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(0, 2, 6) &= (2, -6) \\ &= 2(1, 0) + (-3)(0, 2) \\ &= (2, -3)_{\mathcal{B}'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(0, 0, -4) &= (0, -4) \\ &= 0(1, 0) + 2(0, 2) \\ &= (0, 2)_{\mathcal{B}'} \end{aligned}$$

e portanto,

$$M(\phi; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

- Por exemplo para a **aplicação linear** $\psi : P_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por,

$$\psi(a x^2 + b x + c) = (2b, b - 3a, a)$$

para todo o $(a x^2 + b x + c) \in P_2[x]$.

em relação às **bases**,

$$\mathcal{B}_{P_2[x]} = (1, x, x^2) \quad \text{base canónica de } P_2[x]$$

$$\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)) \quad \text{de } \mathbb{R}^3$$

calculemos a respectiva $M(\psi; \mathcal{B}_{P_2[x]}, \mathcal{B})$, **matriz da aplicação linear ψ em relação às bases $\mathcal{B}_{P_2[x]}$ e $\mathcal{B}$**

Determinando as **coordenadas das imagens** por ψ , dos polinómios de $\mathcal{B}_{P_2[x]}$ na base $\mathcal{B}$,

$$\begin{aligned} \psi(1) &= (0, 0, 0) \\ &= 0(1, 0, 1) + 0(1, 1, 0) + 0(0, 0, 1) \\ &= (0, 0, 0)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= (2, 1, 0) \\ &= 1(1, 0, 1) + 1(1, 1, 0) + (-1)(0, 0, 1) \\ &= (1, 1, -1)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(x^2) &= (0, -3, 1) \\ &= 3(1, 0, 1) + (-3)(1, 1, 0) + (-3)(0, 0, 1) \\ &= (3, -3, -3)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

e portanto,

$$M(\psi; \mathcal{B}_{P_2[x]}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

- Dada a **aplicação linear** $\theta : P_2[X] \rightarrow P_1[X]$ definida por,

$$\theta(ax^2 + bx + c) = (a - b)x + 2c$$

para todo o $(ax^2 + bx + c) \in P_2[X]$.

e as **bases**,

$$\mathcal{B} = (3, 2 + x, x^2 - 1) \quad \text{de } P_2[X]$$

$$\mathcal{B}' = (x - 2, x) \quad \text{de } P_1[X]$$

calcule a respectiva $M(\theta; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$, **matriz da aplicação linear θ em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$** .

- Sendo dadas uma **aplicação linear** $\varphi : E \rightarrow E'$ e **duas bases** (uma de cada espaço vectorial) sabemos como construir **uma única matriz**, que **caracteriza essa aplicação**.
- Deste modo, **a aplicação linear fica completamente definida** se for conhecida apenas a **matriz** e respectivas **bases**.

- **Proposição:** Sejam E e E' **espaços vectoriais** sobre $\mathbb{K}$ e sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ **bases ordenadas** de E e de E' respectivamente.

e seja $\varphi : E \longrightarrow E'$ uma **aplicação linear** tal que,

$$A = M(\varphi; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$$

Se as **coordenadas de um qualquer vector** $u \in E$, relativamente à base $\mathcal{B}_1$ formarem a **matriz coluna** X ,

então a **matriz coluna produto** $A X$ é formada pelas **coordenadas de** $\varphi(u) \in E'$ relativamente à base $\mathcal{B}_2$.

- Retomemos o exemplo da página 54.

Mas desta vez a **aplicação linear** $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é **definida pela matriz**,

$$A = M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

em relação às bases,

$$\mathcal{B} = ((1, 1, 2), (0, 2, 6), (0, 0, -4)) \quad \text{de } \mathbb{R}^3$$

$$\mathcal{B}' = ((1, 0), (0, 2)) \quad \text{de } \mathbb{R}^2$$

Pretendemos determinar $\varphi(u)$, a **imagem do vector** $u = (1, -3, -6)$.

Começemos por calcular as **coordenadas do vector na base** $\mathcal{B}$.

$$(1, -3, -6) = a (1, 1, 2) + b (0, 2, 6) + c (0, 0, -4)$$

$$\text{ou seja, } \begin{cases} a = 1 \\ a + 2b = -3 \\ 2a + 6b - 4c = -6 \end{cases} \quad (\dots) \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -1 \end{cases}$$

e assim,

$$\begin{aligned} (1, -3, -6) &= 1(1, 1, 2) + (-2)(0, 2, 6) + (-1)(0, 0, -4) \\ &= (1, -2, -1)_{\mathcal{B}} \\ &= X^T \end{aligned}$$

Pela proposição anterior, para determinar as coordenadas de $\varphi(u)$ na base $\mathcal{B}'$, basta **calcular o produto** AX ,

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Portanto, $\varphi(1, -3, -6) = (-1, 3)_{\mathcal{B}'}$

Por fim, podemos calcular as coordenadas de $\varphi(u)$ na **base canónica** de $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \varphi(1, -3, -6) &= (-1)(1, 0) + 3(0, 2) \\ &= (-1, 6)_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}} \end{aligned}$$

- Retomemos o exemplo da página 53,

com a **aplicação linear** $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é **definida pela matriz**,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -9 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

em relação às bases,

$$\mathcal{B} = ((1, 1), (-1, 2)) \quad \text{de } \mathbb{R}^2$$

$$\mathcal{B}' = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)) \quad \text{de } \mathbb{R}^3$$

Determinemos $\varphi(1, 0)$ e também a **expressão geral** de $\varphi(x, y)$,
para todo o $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Calculando as **coordenadas do vector** $(1, 0)$ **na base** $\mathcal{B}$.

$$(1, 0) = a (1, 1) + b (-1, 2)$$

$$\text{ou seja, } \begin{cases} a - b = 1 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \quad (\dots) \quad \begin{cases} a = 2/3 \\ b = -1/3 \end{cases}$$

$$\text{e assim, } (1, 0) = (2/3, -1/3)_{\mathcal{B}} = X^T$$

o que nos permite determinar as coordenadas de $\varphi(1, 0)$ na base $\mathcal{B}'$,

calculando o produto AX ,

$$A \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -9 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e portanto, } \varphi(1, 0) &= (0, 1, 1)_{\mathcal{B}'} \\
 &= 0(1, 1, 1) + 1(1, 1, 0) + 1(1, 0, 0) \\
 &= (2, 1, 0)_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}}
 \end{aligned}$$

Para encontrar a **expressão geral** de $\varphi(x, y)$, **para todo** o $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ o método é análogo. Começamos por,

calcular as **coordenadas do vector arbitrário** (x, y) **na base** $\mathcal{B}$.

$$(x, y) = a(1, 1) + b(-1, 2)$$

$$\text{ou seja, } \begin{cases} a - b = x \\ a + 2b = y \end{cases} \quad (\dots) \quad \begin{cases} a = (y + 2x) / 3 \\ b = (y - x) / 3 \end{cases}$$

$$\text{e assim, } (x, y) = ((y + 2x) / 3, (y - x) / 3)_{\mathcal{B}} = X^T$$

Para determinar as coordenadas de $\varphi(x, y)$ na base $\mathcal{B}'$,

basta calcular o produto AX ,

$$A \begin{bmatrix} \frac{y+2x}{3} \\ -\frac{y-x}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -9 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{y+2x}{3} \\ -\frac{y-x}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3y \\ x - 4y \\ x + y \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\varphi(x, y) = (3y, x - 4y, x + y)_{\mathcal{B}'}$$

que na **base canónica** de $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
 &= (3y)(1, 1, 1) + (x - 4y)(1, 1, 0) + (x + y)(1, 0, 0) \\
 &= (2x, x - y, 3y)_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}}
 \end{aligned}$$

Está assim encontrada a **expressão geral**,

$$\varphi(x, y) = (2x, x - y, 3y) \quad \text{para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Como alternativa, partindo das **coordenadas de** (x, y) **na base** $\mathcal{B}$,

$$(x, y) = ((y + 2x) / 3, (y - x) / 3)_{\mathcal{B}}$$

e conhecendo a **base** $\mathcal{B} = ((1, 1), (-1, 2))$, podemos escrever,

$$(x, y) = ((y + 2x) / 3) (1, 1) + ((y - x) / 3) (-1, 2)$$

e, como φ é uma **aplicação linear**,

$$\varphi(x, y) = ((y + 2x) / 3) \varphi(1, 1) + ((y - x) / 3) \varphi(-1, 2)$$

Para calcular $\varphi(1, 1)$ e $\varphi(-1, 2)$,

recorremos à própria definição da **matriz** $M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.



$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -9 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \varphi(1, 1) &= 3(1, 1, 1) + (-3)(1, 1, 0) + 2(1, 0, 0) \\ &= (2, 0, 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(-1, 2) &= 6(1, 1, 1) + (-9)(1, 1, 0) + 1(1, 0, 0) \\ &= (-2, -3, 6) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= ((y + 2x) / 3) (2, 0, 3) + ((y - x) / 3) (-2, -3, 6) \\ &= (2x, x - y, 3y) \end{aligned}$$

* Isomorfismo entre $\mathcal{L}(E, E')$ e $M_{p \times n}(\mathbb{K})$

- Sejam E e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ tais que $\dim E = n$ e $\dim E' = p$.

$\mathcal{L}(E, E')$ o conjunto das **aplicações lineares** de E em E'

$M_{p \times n}(\mathbb{K})$ o conjunto das **matrizes** do tipo $p \times n$ com elementos de $\mathbb{K}$

- Sabemos que,

$\mathcal{L}(E, E')$ munido das operações usuais de adição de aplicações e multiplicação por um escalar, é um **espaço vectorial** sobre $\mathbb{K}$

$M_{p \times n}(\mathbb{K})$ munido das operações usuais de adição de matrizes e multiplicação por um escalar, é um **espaço vectorial** sobre $\mathbb{K}$

- Já vimos que, a partir da expressão geral de uma aplicação linear podemos construir a respectiva matriz, bem como obter a aplicação linear a partir da matriz.

- O resultado seguinte garante-nos que, $\mathcal{L}(E, E') \simeq M_{p \times n}(\mathbb{K})$

- Proposição:** Sejam E e E' **espaços vectoriais** sobre $\mathbb{K}$

tais que $\dim E = n$ e $\dim E' = p$

sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ **bases ordenadas** de E e de E' respectivamente

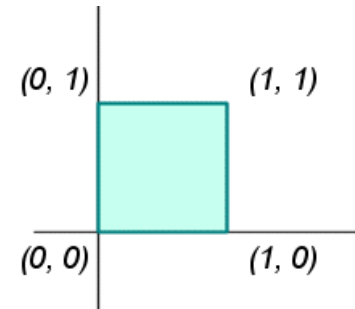
e seja $\theta : \mathcal{L}(E, E') \longrightarrow M_{p \times n}(\mathbb{K})$

$$\varphi \mapsto \theta(\varphi) = M(\varphi; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$$

Prova-se que θ é um **isomorfismo**.

* Exemplos de aplicações lineares em $\mathbb{R}^2$

- Começemos por considerar o **quadrado unitário**, delimitado por,
 $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1) \in \mathbb{R}^2$



- Consideremos também uma **aplicação linear** $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por uma matriz $A = M(\varphi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- Calculando as **imagens** por φ dos quatro pontos que delimitam o quadrado unitário,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + b \\ c + d \end{bmatrix}$$

obtemos um quadrilátero, delimitado por,

$$\varphi(0, 0) = (0, 0)$$

$$\varphi(1, 0) = (a, c)$$

$$\varphi(0, 1) = (b, d)$$

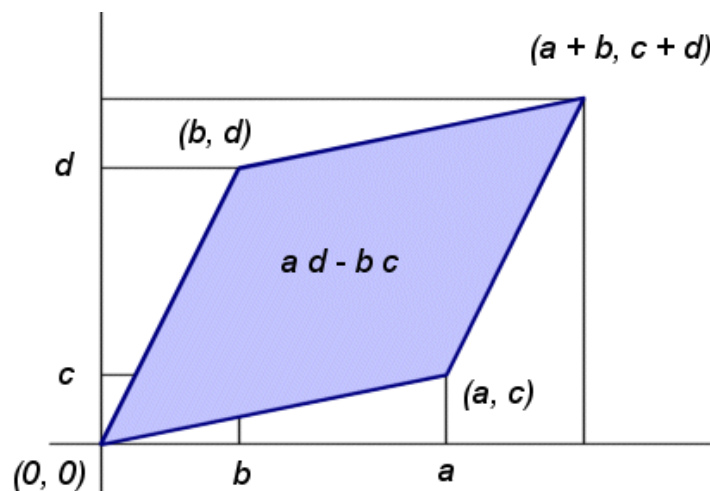
$$\varphi(1, 1) = (a + b, c + d)$$

- Tratando-se de uma **aplicação linear**, obviamente que $\varphi(0, 0) = (0, 0)$.

- As duas imagens, $\varphi(1, 0) = (a, c)$
 $\varphi(0, 1) = (b, d)$ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

são as coordenadas das **imagens dos elementos da base canónica** de $\mathbb{R}^2$, portanto as **duas colunas** da matriz A .

- O cálculo da imagem $\varphi(1, 1) = (a + b, c + d)$ equivale à **soma**, $(a, c) + (b, d) = (a + b, c + d)$
- A **imagem por** φ do **quadrado unitário** é portanto um **paralelogramo**,



- Calculando o **determinante** da matriz A que caracteriza a **aplicação linear**,

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

não é difícil verificar que $|A| = a d - b c$ é a **área do paralelogramo**.

- Analisemos alguns casos particulares de transformações lineares em $\mathbb{R}^2$, com diversas aplicações práticas.
- A **rotação por um ângulo** θ , no sentido directo é definida pela matriz,

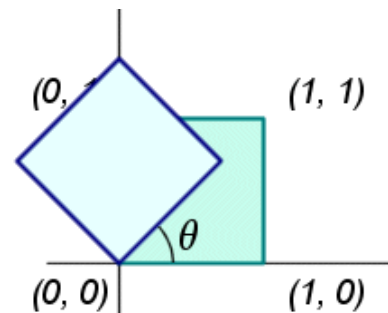
$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Por exemplo, para $\theta = \pi / 4$,

$$\varphi(1, 0) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$$

$$\varphi(0, 1) = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$$

$$\varphi(1, 1) = (0, \sqrt{2})$$



Naturalmente que a **área** do quadrado não se altera pois,

$$|A| = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

- Para alterar a área do quadrado, utilizamos a matriz de **ampliação / redução** por um **factor** k ,

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

sendo a **área** resultante dada por $|A| = k^2$.

- A matriz de **compressão** por um factor k é definida por,

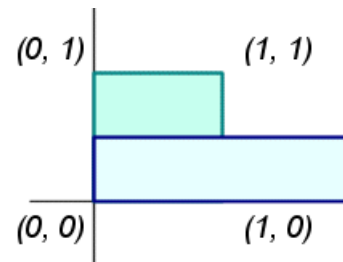
$$A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix}$$

Por exemplo para $k = 2$,

$$\varphi(1, 0) = (2, 0)$$

$$\varphi(0, 1) = (0, 1/2)$$

$$\varphi(1, 1) = (2, 1/2)$$



o quadrado unitário é comprimido numa das direcções, mantendo a área.

- A matriz de **cisalhamento** por um factor k é definida por,

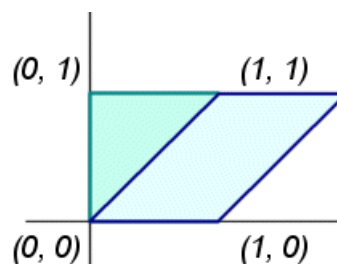
$$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Verifique que, $\varphi(1, 0) = (1, 0)$

$$\varphi(0, 1) = (k, 1)$$

$$\varphi(1, 1) = (k+1, 1)$$

Por exemplo para $k = 1$,



- e muitas mais ...