- Mostremos que o conjunto $\{ 1, x, x^2, x^3 \}$ é uma ***base*** do espaço vectorial $P_3[x]$ dos ***polinómios de coeficientes reais e de grau até*** 3.

$$P_3[x] = \{ p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 , \ a_i \in \mathbb{R} \}$$

Representamos por $0_{P_3[x]}$ o ***polinómio nulo***, o ***vector nulo*** deste espaço,

$$0_{P_3[x]} = 0 + 0\,x + 0\,x^2 + 0\,x^3$$

(i) Mostremos que os vectores $1, x, x^2, x^3$ são ***linearmente independentes***.

Procuremos escalares $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que,

$$a\,1 + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3 = 0_{P_3[x]}$$

sendo $0_{P_3[x]}$ o polinómio ***identicamente nulo***,

é evidente que esta igualdade só pode verificar-se

para ***todo o valor*** de $x \in \mathbb{R}$, se $a = b = c = d = 0$.

Os vectores $1, x, x^2, x^3$ são portanto ***linearmente independentes***.

(ii) Mostremos que os vectores $1, x, x^2, x^3$ são ***geradores de*** $P_3[x]$.

Como qualquer vector (polinómio) deste espaço tem a forma,

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

obviamente ***existem os escalares*** $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$

que permitem escrever $p(x)$ como ***combinação linear*** de $1, x, x^2, x^3$.

Portanto o conjunto $\{ 1, x, x^2, x^3 \}$ é uma ***base*** do espaço vectorial $P_3[x]$.

- ***Proposição***: Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e $v_1, v_2, \ldots, v_k \in E$ um conjunto de vectores tal que, para ***algum*** $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$,

  v_i é uma ***combinação linear dos restantes***.

  Então, ***são iguais os subespaços***,

  $$\langle v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, \underset{\uparrow}{v_i}, v_{i+1}, \ldots, v_k \rangle = \langle v_1, v_2, \ldots, v_{i-1} \underset{\uparrow}{,} v_{i+1}, \ldots, v_k \rangle$$

- Este resultado é útil para a ***construção de uma base*** de um espaço vectorial finitamente gerado.

- Por exemplo, se soubermos que, $\mathbb{R}^2 = \langle (1, 1), (1, 0), (0, 1) \rangle$

  (verifique ...)

  como ***um dos vectores é a soma dos restantes***,

  $$(1, 1) = (1, 0) + (0, 1)$$

  pela ***proposição anterior***, ficamos também a saber que,

  $$\mathbb{R}^2 = \langle (1, 0), (0, 1) \rangle$$

  ou seja, os vectores $(1, 0)$ e $(0, 1)$ ***geram*** $\mathbb{R}^2$.

  (verifique também ...)

  Por outro lado, como os vectores $(1, 0)$ e $(0, 1)$ são também ***linearmente independentes***, ficamos ainda a saber que,

  o conjunto $\{ (1, 0), (0, 1) \}$ ***é uma base*** de $\mathbb{R}^2$.

- ***Proposição***: Todo o espaço vectorial ***finitamente gerado tem base***.

Demonstração: Seja E um espaço vectorial finitamente gerado.

No caso particular de $E = \{ 0_E \}$ a base é o ***conjunto vazio***.

Analisemos o caso geral:

Se $E \neq \{ 0_E \}$ é um espaço vectorial ***finitamente gerado***,

então existe um ***conjunto finito*** $u_1, u_2, \ldots, u_n \in E$

de vectores, tais que,

$$E = \langle u_1, u_2, \ldots, u_n \rangle$$

e como $E \neq \{ 0_E \}$, algum desses vectores deverá ser diferente do vector nulo.

Se os vectores $u_1, u_2, \ldots, u_n$ forem ***linearmente independentes***, então formam uma ***base*** de E.

Caso contrário são ***linearmente dependentes*** e, pela proposição da página 26, pelo menos ***um deles é combinação linear dos restantes***.

Seja u_i esse vector. Então, pela propriedade da página 43, os ***restantes vectores geram o mesmo espaço***, ou seja,

$$E = \langle u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n \rangle$$

Ora se os vectores $u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n$ forem ***linearmente independentes***, então formam uma ***base*** de E.

Caso contrário repete-se o procedimento anterior.

Então, como o ***número de geradores é finito*** (e pelo menos um deles não é nulo) este processo acabará por encontrar um ***subconjunto*** de $\{ u_1, u_2, \ldots, u_n \}$ formado por vectores que são ***linearmente independentes*** e que ***geram*** E, ou seja, uma ***base*** de E.

- ***Portanto***: Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Qualquer conjunto finito de geradores ***tem como subconjunto uma base*** de E.

- O exemplo seguinte mostra ***como construir uma base*** de um espaço vectorial finitamente gerado, a partir de um ***conjunto finito de geradores***.

- Por exemplo, sabendo que,

$$\mathbb{R}^3 = \langle\, (1,\ 0,\ 1),\ (0,\ 1,\ -1),\ (1,\ 1,\ 1),\ (-1,\ 2,\ 3)\,\rangle$$

(verifique ...)

pretendemos descobrir uma ***base contida no conjunto***,

$$S = \{\, (1,\ 0,\ 1),\ (0,\ 1,\ -1),\ (1,\ 1,\ 1),\ (-1,\ 2,\ 3)\,\}$$

Comecemos por verificar se os vectores são ***linearmente independentes***.

Sejam então $\alpha,\ \beta, \gamma,\ \delta \in \mathbb{R}$ tais que,

$$\alpha\ (1,\ 0,\ 1) + \beta\ (0,\ 1,\ -1) + \gamma\ (1,\ 1,\ 1) + \delta\ (-1,\ 2,\ 3) = (0,\ 0,\ 0)$$

e desta igualdade obtemos o ***sistema***,

$$\begin{cases} \alpha + \gamma - \delta = 0 \\ \beta + \gamma + 2\,\delta = 0 \\ \alpha - \beta + \gamma + 3\,\delta = 0 \end{cases}$$

que tem por ***matriz ampliada***,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

e que escalonando,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3' := L_3 - L_1]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3' := L_3 + L_2]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1' := L_1 - L_3 \\ L_2' := L_2 - L_3}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

donde obtemos,
$$\begin{cases} \alpha = 7\,\delta \\ \beta = 4\,\delta \\ \gamma = -\,6\,\delta \end{cases}$$

Então este sistema admite ***soluções não nulas***,

como por exemplo,
$$\begin{cases} \alpha = 7 \\ \beta = 4 \\ \gamma = -\,6 \\ \delta = 1 \end{cases}$$

e portanto os vectores são ***linearmente dependentes***.

Logo, ***um deles*** pode escrever-se como ***combinação linear dos restantes***.

A partir da ***solução não nula*** considerada:

$$7\,(1,\ 0,\ 1) + 4\,(0,\ 1,\ -1) - 6\,(1,\ 1,\ 1) + (-1,\ 2,\ 3) = (0,\ 0,\ 0)$$

podemos escrever um deles como combinação linear dos restantes,

como por exemplo,

$$(-1,\ 2,\ 3) = 6\,(1,\ 1,\ 1) - 7\,(1,\ 0,\ 1) - 4\,(0,\ 1,\ -1)$$

E pela proposição na página 43,

se $\mathbb{R}^3 = \langle\, (1,\ 0,\ 1),\ (0,\ 1,\ -1),\ (1,\ 1,\ 1),\ (-1,\ 2,\ 3)\,\rangle$

então $\mathbb{R}^3 = \langle\, (1,\ 0,\ 1),\ (0,\ 1,\ -1),\ (1,\ 1,\ 1)\,\rangle$

Vejamos então se estes três vectores são ***linearmente independentes***.

Sejam $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$ tais que,

$$\alpha\,(1,\ 0,\ 1) + \beta\,(0,\ 1,\ -1) + \gamma\,(1,\ 1,\ 1) = (0,\ 0,\ 0)$$

e desta igualdade obtemos o ***sistema***,

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

que tem como ***solução única***, $\alpha = \beta = \gamma = 0$

Portanto os vectores são ***linearmente independentes*** e,

$$\mathcal{B} = \{\, (1,\ 0,\ 1),\ (0,\ 1,\ -1),\ (1,\ 1,\ 1)\,\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$.

- Um espaço vectorial pode ter ***várias bases***. Por exemplo em $\mathbb{R}^2$,

  O conjunto de vectores $\{\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)\ \}$ é ***uma base***

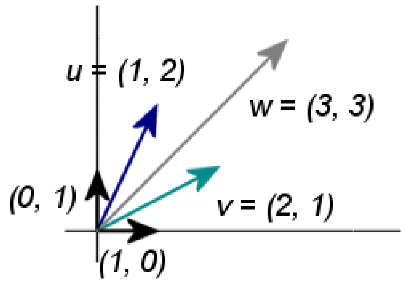
  porque são linearmente independentes e geram o espaço,

  pois todo o vector $(x,\ y)$ pode ser escrito como,

$$(x,\ y) = ((2\,y - x)\,/\,3)\ (1,\ 2) + ((2\,x - y)\,/\,3)\ (2,\ 1)$$

  Mas também os vectores $e_1 = (1,\ 0)$

  $e_2 = (0,\ 1)$



  formam ***uma base***,

  pois são linearmente independentes

  e todo o vector $(x,\ y)$ pode obviamente ser escrito como,

$$(x,\ y) = x\ (1,\ 0) + y\ (0,\ 1)$$

  Esta é chamada a ***base canónica*** de $\mathbb{R}^2$.

- Para cada base, a cada vector $(x,\ y)$ corresponde uma ***combinação linear única***, ou ***representação*** nessa base.

  Por exemplo o vector $(3,\ 3)$,

  na base $\{\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)\ \}$ escreve-se $(3,\ 3) = \mathbf{1}\ (1,\ 2) + \mathbf{1}\ (2,\ 1)$

  na base $\{\ (1,\ 0),\ (0,\ 1)\ \}$ escreve-se $(3,\ 3) = \mathbf{3}\ (1,\ 0) + \mathbf{3}\ (0,\ 1)$

- Aos escalares dessas combinações lineares chamam-se ***coordenadas do vector*** nessa base.

- Para todo o $n \in \mathbb{N}$, a ***base canónica*** ou ***base padrão*** do espaço vectorial $\mathbb{R}^n$ é formada pelos n vectores,

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0, 0)$$
$$e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, 0)$$
$$\ldots$$
$$e_{n-1} = (0, 0, 0, \ldots, 1, 0)$$
$$e_n = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1)$$

  É simples verificar que são ***linearmente independentes*** e que ***geram o espaço*** vectorial $\mathbb{R}^n$.

  A ***base canónica*** de $\mathbb{R}^n$ é uma ***base ordenada*** e escreve-se,

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$$

- O termo ***base ordenada*** significa que a ***ordem das coordenadas*** é importante.

  Por exemplo em $\mathbb{R}^2$, o vector $(2, 3)$ tem as coordenadas 2 e 3 na base canónica, enquanto que na base $((0, 1), (1, 0))$ seria o vector $(3, 2)$.

- Outras bases podem ser consideradas para o espaço vectorial $\mathbb{R}^n$,

  Por exemplo verifique que para,

$$v_1 = (1, 1, 1, \ldots, 1, 1)$$
$$v_2 = (0, 1, 1, \ldots, 1, 1)$$
$$\ldots$$
$$v_{n-1} = (0, 0, 0, \ldots, 1, 1)$$
$$v_n = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1)$$

  $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ é também uma ***base*** de $\mathbb{R}^n$.

- ***Proposição***: Todas as bases de um espaço vectorial têm ***o mesmo número de elementos***.

- Ao ***número de vectores de qualquer base*** de um espaço vectorial E chama-se ***dimensão de*** E e representa-se por ***dim*** E.

- Naturalmente que ***dim*** $\mathbb{R}^2 = 2$, ***dim*** $\mathbb{R}^3 = 3$, ... , ***dim*** $\mathbb{R}^n = n$.

- Por exemplo em $\mathbb{R}^2$, consideremos uma recta que passa pela origem $y = m\,x$ ou seja, o ***subespaço vectorial*** definido por,

$$\begin{aligned} F &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = m\,x \} \\ &= \{ (x, m\,x) \in \mathbb{R}^2 \} \end{aligned}$$

Qual a ***dimensão*** de F ?

Visto que $(x, m\,x) = x\,(1, m)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

então o vector $(1, m)$ ***gera*** F, ou seja, $F = \langle (1, m) \rangle$.

Por outro lado como $(1, m) \neq (0, 0)$, então é ***linearmente independente***.

Portanto $\mathcal{B} = ((1, m))$ é uma base de F e então ***dim*** $F = 1$.

- Para o espaço vectorial $P_n[x]$ dos polinómios de grau até n,

a ***base canónica*** é formada por $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$.

Mostre que se trata de uma base e portanto ***dim*** $P_n[x] = n + 1$.

- Consideremos por exemplo o ***subespaço*** de $\mathbb{R}^3$ definido por,

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \}$$

Qual será a ***dimensão*** de A ?

Como todo o vector $v \in A$ tem a forma,

$$v = (0, y, z)$$

então podemos escrever,

$$v = y\,(0, 1, 0) + z\,(0, 0, 1)$$

ou seja, todo o vector de A se escreve como ***combinação linear*** de $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

Também é simples verificar que são ***linearmente independentes***.

Formam então uma ***base*** de A e portanto ***dim*** $A = 2$,

o que seria de esperar, visto A ser um ***plano*** no espaço $\mathbb{R}^3$.

- No espaço vectorial $P_n[x]$ dos polinómios de grau até n, com $n \geq 1$, consideremos o conjunto dos polinómios com ***termo independente nulo***, ou seja,

$$G = \{ p(x) \in P_n[x] : p(0) = 0 \}$$

Mostremos que $G \leq P_n[x]$, ou seja, que ***é subespaço*** e determinemos a sua ***dimensão***.

G é subespaço de $P_n[x]$ pois,

(i) o ***polinómio nulo*** $0_{P_n[x]} = 0 + 0\,x + \ldots + 0\,x^n \in G$

(ii) $\forall\ p(x), q(x) \in G \Rightarrow (p+q)(x) \in G$

pois se $p(0) = 0$ e $q(0) = 0$

então $(p+q)(0) = p(0) + q(0) = 0 + 0 = 0$

(iii) $\forall\ \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\ p(x) \in G \Rightarrow (\alpha\ p)\ (x) \in G$

pois se $p(0) = 0$

então $(\alpha\ p)(0) = \alpha\ p(0) = \alpha\ 0 = 0$

E assim mostrámos que $G \leq P_n[x]$.

Para encontrar ***uma base*** de G,

basta verificar que todo o $p(x) \in G$ tem a forma,

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n\ , \text{ com } a_0 = 0 \text{ e } a_i \in \mathbb{R} \\ &= a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \end{aligned}$$

ou seja, uma ***combinação linear*** dos vectores $x, x^2,\ldots, x^n$.

Portanto o conjunto de vectores $\{ x, x^2,\ldots, x^n \}$ ***gera*** G.

Por outro lado, o conjunto de vectores $\{ x, x^2,\ldots, x^n \}$, sendo um ***subconjunto da base canónica*** de $P_n[x]$, é também um conjunto de ***vectores linearmente independentes***.

E assim mostrámos que $(x, x^2,\ldots, x^n)$ ***é uma base*** de G

e portanto ***dim*** $G = n$.

- No espaço vectorial $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ a ***base canónica*** é formada por,

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Verifique que $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ é efectivamente uma base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e portanto que ***dim*** $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$.

- No espaço vectorial $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ a ***base canónica*** é formada por,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e portanto ***dim*** $M_{3\times 2}(\mathbb{R}) = 6$.

- Generalizando, no espaço vectorial $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ a ***base canónica*** é formada pelo conjunto ordenado de matrizes,

$$(B_{ij} ,\ \ i = 1, 2, .., m ,\ \ j = 1, 2, .., n)$$

onde B_{ij} é a matriz do tipo $m\times n$ cujo único elemento não nulo é $b_{ij} = 1$.

Como o conjunto tem $m\times n$ elementos, ***dim*** $M_{m\times n}(\mathbb{R}) = m\times n$.

- ***Proposição***: Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ tal que ***dim*** $E = n$.

  Então:

  (i) Quaisquer n vectores de E linearmente independentes formam uma base de E

  (ii) Qualquer conjunto de geradores de E com n elementos forma uma base de E

  (iii) Qualquer conjunto de vectores de E com mais de n elementos é linearmente dependente.

- Assim, num espaço vectorial de ***dimensão*** n,

  n é o número ***máximo*** de vectores ***linearmente independentes***

  n é o número ***mínimo*** de ***geradores do espaço***.

  Portanto, ***para determinar se*** um dado conjunto de n vectores ***é uma base***, basta ***verificar apenas <u>uma</u>*** das duas condições:

  se são linearmente independentes

  <u>ou</u> se geram o espaço

- Por exemplo, mostremos que o conjunto,

$$((1,\ 0,\ 1),\ (1,\ 1,\ 0),\ \ (0,\ 1,\ 1))$$

  é uma base do espaço vectorial $\mathbb{R}^3$,

  Como se trata de um conjunto de 3 vectores e ***dim*** $\mathbb{R}^3 = 3$, basta verificar se são ***linearmente independentes***.

Consideremos então os escalares $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que,

$$\alpha\,(1,\ 0,\ 1) + \beta\,(1,\ 1,\ 0) + \gamma\,(0,\ 1,\ 1) = (0,\ 0,\ 0)$$

igualdade que conduz à resolução do sistema, $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases}$

que tem por solução única, $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$

Então os três vectores são ***linearmente independentes*** e portanto ***formam uma base*** de $\mathbb{R}^3$.

- No espaço vectorial $\mathbb{R}^3$, considere o subconjunto,

$$S = \{\ (x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x - y + 3\,z = 0\ \}$$

a) Verifique que $S \leq \mathbb{R}^3$

b) Determine um ***conjunto de geradores*** de S e verifique se esse conjunto é formado por vectores ***linearmente independentes***

c) Calcule a ***dimensão*** de S

a) S é um ***subespaço*** de $\mathbb{R}^3$ pois,

(i) $(0,\ 0,\ 0) \in S$

(ii) a soma de dois vectores de S pertence a S

(iii) o produto de um escalar por um vector de S pertence a S

b) Para determinar um ***conjunto de geradores*** de S

notemos que,

$$\begin{aligned} S &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x - y + 3z = 0 \} \\ &= \{ (y - 3z, y, z) \,,\; y, z \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ y\,(1, 1, 0) + z\,(-3, 0, 1) \,,\; y, z \in \mathbb{R} \} \\ &= \langle (1, 1, 0), (-3, 0, 1) \rangle \end{aligned}$$

ou seja, os vectores $(1, 1, 0)$ e $(-3, 0, 1)$ ***geram*** S.

Verifiquemos se são ***linearmente independentes***.

Para os escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que,

$$\alpha\,(1, 1, 0) + \beta\,(-3, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

donde obtemos o sistema, $\begin{cases} \alpha - 3\beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$

cuja solução única é $\alpha = \beta = 0$

e assim mostrámos que os dois vectores são ***linearmente independentes***.

c) Portanto, se $(\,(1, 1, 0), (-3, 0, 1)\,)$ ***é uma base*** de S,

podemos concluir que ***dim*** $S = 2$.

- ***Problema***: Determine a ***dimensão do subespaço*** W de $\mathbb{R}^4$ ***gerado por***,

$$\{\ (-1,\ 2,\ 5,\ 0),\ (3,\ 0,\ 1,\ -2),\ \ (-5,\ 4,\ 9,\ 2)\ \}$$

ou seja, calcule ***dim*** W tal que,

$$W = \langle\ (-1,\ 2,\ 5,\ 0),\ (3,\ 0,\ 1,\ -2),\ \ (-5,\ 4,\ 9,\ 2)\ \rangle$$

Comecemos por chamar,

$$v_1 = (-1,\ 2,\ 5,\ 0)$$

$$v_2 = (3,\ 0,\ 1,\ -2)$$

$$v_3 = (-5,\ 4,\ 9,\ 2)$$

Para saber a ***dimensão*** do subespaço, precisamos identificar ***uma base***.

Como sabemos que os vectores v_1, v_2 e v_3 ***geram*** W, resta verificar se são ***linearmente independentes***.

Mas analisando as componentes, notamos que,

$$v_3 = 2\ v_1 - v_2$$

ou seja, v_3 é uma ***combinação linear dos restantes***.

Então, pela propriedade na página 43, os ***restantes vectores*** ainda ***geram o mesmo subespaço*** W.

Resta verificar se v_1 e v_2 são ***linearmente independentes***.

Construindo a combinação linear nula,

$$a\ v_1 + b\ v_2 = 0$$

ou

$$a\ (-1,\ 2,\ 5,\ 0) + b\ (3,\ 0,\ 1,\ -2) = (0,\ 0,\ 0,\ 0)$$

obtemos o sistema,
$$\begin{cases} -a + 3b = 0 \\ 2a = 0 \\ 5a + b = 0 \\ -2b = 0 \end{cases}$$

que só tem a ***solução nula*** $a = b = 0$.

Então v_1 e v_2 ***geram*** W e são ***linearmente independentes*** e portanto ***formam uma base*** de W.

Consequentemente a resposta é ***dim*** $W = 2$.

E se não tivéssemos observado que,

$$v_3 = 2\,v_1 - v_2 \qquad \textbf{?}$$

Esta relação deveria surgir do processo habitual para verificar se os vectores v_1, v_2 e v_3 são ***linearmente independentes***.

Construindo a combinação linear nula,

$$a\,v_1 + b\,v_2 + c\,v_3 = 0$$

ou

$$a\,(-1,\ 2,\ 5,\ 0) + b\,(3,\ 0,\ 1,\ -2) + c\,(-5,\ 4,\ 9,\ 2) = (0,\ 0,\ 0,\ 0)$$

e resolvendo o sistema resultante, ***deduza a relação***,

$$v_3 = 2\,v_1 - v_2$$

- ***Proposição***: Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão n e seja $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ uma ***base*** de E.

  Então, qualquer vector $x \in E$ se ***escreve de forma única*** como combinação linear dos vectores da base $\mathcal{B}$,

  ou seja, existem ***escalares únicos*** $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que,

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$$

Demonstração: Se $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ é uma ***base***, então ***gera o espaço*** e qualquer vector $x \in E$ se escreve como uma combinação linear dos seus elementos,

ou seja, existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que,

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$$

Para provar que esta ***combinação linear é <u>única</u>***,

suponhamos que existiam também, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$

tais que,

$$x = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n$$

Então nesse caso teríamos duas combinações,

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$$

$$x = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n$$

mas subtraindo,

obtemos,

$$(\alpha_1 - \beta_1)\, e_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\, e_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)\, e_n = 0_E$$

Ora sendo os $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vectores da ***base***, isso significa que são ***linearmente independentes*** e portanto esta igualdade,

só pode ocorrer se,

$$(\alpha_1 - \beta_1) = (\alpha_2 - \beta_2) = \ldots = (\alpha_n - \beta_n) = 0$$

ou,

$$\alpha_i = \beta_i \quad \text{para todo o } i = 1, 2, \ldots, n$$

As ***duas*** combinações lineares que considerámos são portanto ***iguais***.

E assim podemos concluir que ***existe uma única forma***

de escrever x como ***combinação linear dos vectores da base***.

- Portanto, num espaço vectorial E finitamente gerado de dimensão n, com uma ***base*** $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, ***para qualquer vector*** $x \in E$ existem n escalares ***univocamente determinados*** $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tais que,

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n$$

Ao n-uplo $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ chamamos,

coordenadas ou ***componentes*** de x ***na base*** ou ***relativamente à base***

e escrevemos,

$$x = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)_{\mathcal{B}}$$

- De um modo geral, quando indicamos o vector $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ assumimos que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são ***as coordenadas na base canónica*** de $\mathbb{R}^n$ ou seja que,

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}}$$

Por exemplo, o vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ indica que,

$$(x, y) = x\,(1, 0) + y\,(0, 1)$$

- Sabendo que $\mathcal{B} = (\,(1, 2), (3, -1)\,)$ é uma ***base*** de $\mathbb{R}^2$, determinemos a ***expressão geral das coordenadas*** de qualquer vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ***na base*** $\mathcal{B}$.

Procuremos então os valores únicos dos escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que,

$$\alpha\,(1, 2) + \beta\,(3, -1) = (x, y)$$

ou seja tais que, $\begin{cases} \alpha + 3\beta = x \\ 2\alpha - \beta = y \end{cases}$

Construindo a matriz ampliada e escalonando,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 2 & -1 & y \end{array}\right] \xrightarrow[L_2' := L_2 - 2L_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 0 & -7 & y - 2x \end{array}\right]$$

donde, $\begin{cases} \beta = (2x - y)/7 \\ \alpha = (x + 3y)/7 \end{cases}$

E assim obtivemos, para ***expressão geral das coordenadas***

de qualquer vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ***na base*** $\mathcal{B} = (\,(1, 2), (3, -1)\,)$,

$$(x, y) = \left(\frac{x + 3y}{7}, \frac{2x - y}{7} \right)_{\mathcal{B}}$$

Note que, a partir dos valores das ***coordenadas*** x e y de qualquer vector ***na base canónica***, esta expressão permite obter os valores das ***coordenadas*** desse vector ***na nova base*** $\mathcal{B}$.

- No espaço vectorial $\mathbb{R}^4$ consideremos a ***base***,

$$\mathcal{B} = (\,(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\,)$$

Determine as ***coordenadas*** de $x = (-1, 3, 2, 0)$ relativamente à base $\mathcal{B}$.

Procuremos então os escalares a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ tais que,

$$(-1, 3, 2, 0) = a\,(1, 1, 0, 0) + b\,(0, 1, 1, 0) + c\,(1, 0, 0, 0) + d\,(0, 0, 0, 1)$$

ou seja, $\begin{cases} a + c = -1 \\ a + b = 3 \\ b = 2 \\ d = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} c = -2 \\ a = 1 \\ b = 2 \\ d = 0 \end{cases}$

e portanto,

$$(-1, 3, 2, 0) = (1, 2, -2, 0)_{\mathcal{B}}$$

⁕ *Intersecção de Subespaços*

- Sejam E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, e F e G ***subespaços vectoriais*** de E.

  Chama-se ***intersecção dos subespaços*** F e G e representa-se por $F \cap G$, ao ***subconjunto*** de E definido por,

$$\boxed{F \cap G = \{ u \in E \; : \; u \in F \;\wedge\; u \in G \}}$$

- ***Proposição***: Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam F e G subespaços vectoriais de E.

  Então a ***intersecção*** $F \cap G$ ***é um subespaço vectorial*** de E.

Demonstração: *(i)* Se F e G são subespaços vectoriais de E,

então $0_E \in F$ e $0_E \in G$.

Portanto $0_E \in F \cap G$

(ii) Sejam u e $v \in F \cap G$

Por definição de ***intersecção***,

$$u \in F \cap G \;\Rightarrow\; u \in F \text{ e } u \in G$$

$$v \in F \cap G \;\Rightarrow\; v \in F \text{ e } v \in G$$

mas como F e G são ***subespaços*** vectoriais de E,

então $u + v \in F$ e $u + v \in G$

pelo que $u + v \in F \cap G$

(iii) Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $u \in F \cap G$

Por definição de ***intersecção***,

$$u \in F \cap G \quad \Rightarrow \quad u \in F \text{ e } u \in G$$

mas como F e G são ***subespaços*** vectoriais de E,

então $\alpha u \in F$ e $\alpha u \in G$

pelo que $\alpha u \in F \cap G$

- Por exemplo no espaço vectorial $\mathbb{R}^3$, sendo dados os ***subespaços*** vectoriais,

$$F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y + 3z = 0 \}$$

$$G = \langle (1, 0, 1), (-1, 1, 2) \rangle$$

calculemos a sua ***intersecção*** $F \cap G$.

Em primeiro lugar, é necessário ***identificar*** G,

o subespaço cujos vectores são da forma,

$$(x, y, z) = \alpha\ (1, 0, 1) + \beta\ (-1, 1, 2)$$

ou seja, os ***valores*** de x, y e z para os quais é ***possível o sistema***,

$$\begin{cases} \alpha - \beta = x \\ \beta = y \\ \alpha + 2\beta = z \end{cases}$$

Construindo a matriz ampliada e escalonando,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 2 & z \end{array}\right] \xrightarrow[L_3' := L_3 - L_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 3 & z-x \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3' := L_3 - 3L_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z-x-3y \end{array}\right]$$

concluímos que o sistema só é ***possível*** para $z - x - 3y = 0$.

Está assim ***identificado o subespaço*** G,

$$G = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - x - 3y = 0 \}$$

Podemos agora calcular a ***intersecção***,

$$F \cap G = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 3z = 0 \wedge z - x - 3y = 0 \}$$

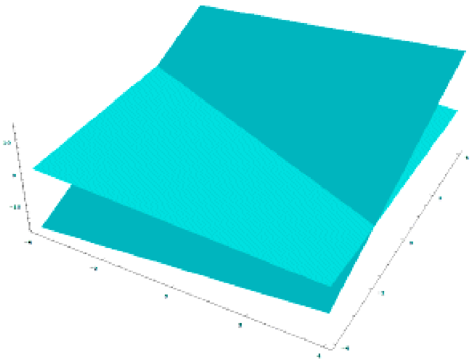
o que conduz à resolução do sistema,

$$\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ z - x - 3y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -5/2\, y \\ z = 1/2\, y \end{cases}$$

e finalmente temos,

$$\begin{aligned} F \cap G &= \left\{ \left(-\frac{5}{2}y, y, \frac{1}{2}y \right) : y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ y \left(-\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2} \right) : y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left(-\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2} \right) \right\rangle \end{aligned}$$

Note que, em $\mathbb{R}^3$ os subespaços F e G representam dois planos, pelo que a sua ***intersecção*** $F \cap G$ representa uma recta.



- ***Exercício***: No espaço vectorial $\mathbb{R}^3$, dados os subespaços vectoriais,

$$U = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = y + 2z \}$$
$$V = \langle (1, 0, -1), (2, 0, -4), (0, 3, 1) \rangle$$

determine uma ***base*** de $U \cap V$.

✱ Reunião de Subespaços

- Sejam E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, e F e G ***subespaços vectoriais*** de E.

  Chama-se ***reunião dos subespaços*** F e G e representa-se por $F \cup G$,

  ao ***subconjunto*** de E definido por,

$$\boxed{F \cup G = \{ u \in E \ : \ u \in F \ \vee \ u \in G \}}$$

- Em geral, ***a reunião*** de dois subespaços vectoriais ***não é um subespaço*** vectorial.

- Como por exemplo, dados os ***dois subespaços*** vectoriais de $\mathbb{R}^2$,

$$H = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = 0 \} = \{ (0, y) \ : \ y \in \mathbb{R} \}$$

$$F = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 0 \} = \{ (x, 0) \ : \ x \in \mathbb{R} \}$$

  obviamente a sua reunião,

$$H \cup F = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = 0 \ \vee \ y = 0 \}$$

  não é um subespaço vectorial, pois ***não é fechado para a adição*** de vectores.

  Basta verificar, por exemplo que,

$$(0, 1) \in H \cup F$$

$$(1, 0) \in H \cup F$$

$$(0, 1) + (1, 0) = (1, 1) \notin H \cup F$$

- É ***condição necessária e suficiente*** para que a reunião de dois subespaços vectoriais seja um subespaço vectorial, que ***um esteja contido no outro***.

- ***Proposição***: Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$

  e sejam F e G subespaços vectoriais de E.

  Então $F \cup G$ ***é um subespaço vectorial*** de E

  se e só se $F \subseteq G$ ***ou*** $G \subseteq F$.

Demonstração: $(\Leftarrow)$

Se $F \subseteq G$

então $F \cup G = G$ que é um subespaço vectorial de E.

Se $G \subseteq F$

então $F \cup G = F$ que é um subespaço vectorial de E.

$(\Rightarrow)$

Suponhamos ***por absurdo*** que,

$F \cup G$ é um subespaço vectorial mas $F \not\subseteq G$ e $G \not\subseteq F$.

Quer isto dizer que: $\exists\ f \in F : f \notin G$

$\exists\ g \in G : g \notin F$

Ora se $F \cup G$ fosse um subespaço vectorial

então seria fechado para a adição, ou seja,

$f, g \in F \cup G$ então $f + g = s \in F \cup G$

isto é, $s \in F$ ou $s \in G$

Mas nesse caso,

se $s \in F$ então $g = s - f \in F$

se $s \in G$ então $f = s - g \in G$

Sendo as duas situações impossíveis, concluímos que,

$F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.

- ***Proposição***: Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ de ***dimensão*** n

  e seja F um ***subespaço*** vectorial de E.

  Então F tem ***dimensão finita*** e ***dim*** $F \leq n$

  e além disso, se ***dim*** $F = n$ então $F = E$.

- Consideremos por exemplo o subespaço vectorial F de $\mathbb{R}^3$,

  $$F = \langle (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1) \rangle$$

  Como são três vectores linearmente independentes, então ***dim*** $F = 3$

  e podemos portanto concluir que $F = \mathbb{R}^3$.

- Por convenção, o ***subespaço trivial tem dimensão nula***, ***dim*** $\{0_E\} = 0$

  e todo o subespaço vectorial F ***não trivial*** tem dimensão ***dim*** $F \geq 1$.

  Portanto,

  $$\textbf{dim}\, F = 0 \iff F = \{0_E\}$$

⁕ Soma de Subespaços

- Sejam E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, e F e G ***subespaços vectoriais*** de E.

  Chama-se ***soma dos subespaços*** F e G e representa-se por $F + G$,

  ao ***subconjunto*** de E definido por,

  $$\boxed{F + G = \{ u + v \ : \ u \in F \ \wedge \ v \in G \}}$$

- ***Proposição***: Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam F e G dois subespaços vectoriais de E.

  Então a ***soma*** $F + G$ ***é um subespaço vectorial*** de E.

Demonstração: *(i)* Se F e G são subespaços vectoriais de E,

então $0_E \in F$ e $0_E \in G$.

Portanto $0_E = 0_E + 0_E \in F + G$

(ii) Sejam u e $v \in F + G$

Por definição de ***soma de subespaços***,

$$u = u_1 + u_2 \text{ com } u_1 \in F \text{ e } u_2 \in G$$

$$v = v_1 + v_2 \text{ com } v_1 \in F \text{ e } v_2 \in G$$

então,

$$\begin{aligned} u + v &= (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) \\ &= \underbrace{(u_1 + v_1)}_{\in F} + \underbrace{(u_2 + v_2)}_{\in G} \end{aligned}$$

e portanto $u + v \in F + G$

(iii) Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $u \in F + G$

Por definição de ***soma de subespaços***,

$$u = u_1 + u_2 \text{ com } u_1 \in F \text{ e } u_2 \in G$$

então,

$$\begin{aligned} \alpha\, u &= \alpha\,(u_1 + u_2) \\ &= \underbrace{\alpha\, u_1}_{\in F} + \underbrace{\alpha\, u_2}_{\in G} \end{aligned}$$

e portanto $\alpha\, u \in F + G$

- Para o exemplo anterior, dos ***dois subespaços*** vectoriais de $\mathbb{R}^2$,

$$H = \{ (0, y) \; : \; y \in \mathbb{R} \}$$

$$F = \{ (x, 0) \; : \; x \in \mathbb{R} \}$$

O ***subespaço soma*** $H + F$ é dado por,

$$\begin{aligned} H + F &= \{ (0, y) + (x, 0) : \; x, y \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ (x, y) \; : \; x, y \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \} = \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Note que os subespaços H e F representam os eixos coordenados em $\mathbb{R}^2$.

Enquanto que a sua ***reunião*** não é um subespaço vectorial, a sua ***soma*** é o próprio $\mathbb{R}^2$.

Por outro lado a sua ***intersecção*** é a origem, ou seja, o subespaço trivial $\{0_E\}$.

- Ou por exemplo, dados os ***dois subespaços*** vectoriais de $\mathbb{R}^3$,

$$F = \{ (0, 0, z) \; : \; z \in \mathbb{R} \}$$

$$G = \{ (0, y, 0) \; : \; y \in \mathbb{R} \}$$

O ***subespaço soma*** $F + G$ é dado por,

$$\begin{aligned} F + G &= \{ (0, 0, z) + (0, y, 0) : \; y, z \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ (0, y, z) \; : \; y, z \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x = 0 \} \end{aligned}$$

Neste caso, os subespaços representam dois eixos coordenados de $\mathbb{R}^3$ e a sua ***soma*** representa um plano.

- ***Proposição***: Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam F e G dois subespaços vectoriais de E.

  Então $\boxed{F + G = \langle F \cup G \rangle}$.

Demonstração: Para provar a ***igualdade***, $F + G = \langle F \cup G \rangle$

precisamos provar que: *(i)* $\langle F \cup G \rangle \subseteq F + G$

(ii) $F + G \subseteq \langle F \cup G \rangle$

(i) Para qualquer $u \in \langle F \cup G \rangle$ provemos que $u \in F + G$

Ora se $u \in \langle F \cup G \rangle$ então escreve-se como uma ***combinação linear de vectores*** de $F \cup G$,

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

onde cada v_i, $v_i \in F$ ou $v_i \in G$

Pela ***comutatividade da adição*** de vectores, podemos sempre ordenar a combinação linear de modo a,

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \alpha_n v_n$$

onde $\left| \begin{array}{l} v_1, v_2, \ldots, v_k \in F \\ v_{k+1}, \ldots, v_n \in G \end{array} \right.$

e como F e G são ***subespaços*** vectoriais,

$$u = \underbrace{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k}_{\in F} + \underbrace{\alpha_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \alpha_n v_n}_{\in G}$$

e portanto,

$$u \in F + G$$

(ii) Para qualquer $u \in F + G$ provemos que $u \in \langle F \cup G \rangle$

Ora se $u \in F + G$

então $u = u_1 + u_2$ com $u_1 \in F$ e $u_2 \in G$

e portanto u é uma ***combinação linear de vectores*** de $F \cup G$

ou seja, $u \in \langle F \cup G \rangle$

- Para o exemplo anterior, dos ***dois subespaços*** vectoriais de $\mathbb{R}^2$,

$$H = \{ (0, y) : y \in \mathbb{R} \}$$

$$F = \{ (x, 0) : x \in \mathbb{R} \}$$

tal como já calculámos,

$$H \cup F = \{ (0, y) : y \in \mathbb{R} \} \cup \{ (x, 0) : x \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \lor y = 0 \}$$

e

$$H + F = \{ (x, y) : x, y \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}^2$$

E efectivamente, $H + F = \langle H \cup F \rangle$

pois ***todo o vector*** (x, y) de $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito como uma ***combinação linear*** envolvendo vectores da forma $(x, 0)$ e da forma $(0, y)$.

Em termos geométricos, ***os dois eixos coordenados geram*** $\mathbb{R}^2$.

- ***Proposição***: Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam F e G ***dois subespaços*** vectoriais de E tais que,

$$F = \langle u_1, u_2, \ldots, u_n \rangle$$

$$G = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$$

então,

$$\boxed{F + G = \langle u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle}$$

Demonstração: *(i)* Para qualquer $x \in F + G$

provemos que $x \in \langle u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$

Ora se $x \in F + G$

então $x = x_1 + x_2$ com $x_1 \in F$ e $x_2 \in G$

mas se $x_1 \in F = \langle u_1, u_2, \ldots, u_n \rangle$

então $x_1 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$

e se $x_2 \in G = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$

então $x_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_k v_k$

e portanto,

$$x = x_1 + x_2 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$$
$$+ \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_k v_k$$

ou seja,

$$x \in \langle u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$$

(ii) Para qualquer $x \in \langle u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$

provemos que $x \in F + G$

Ora se $x \in \langle u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$

então,

$$x = \underbrace{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n}_{\in \langle u_1, u_2, \ldots, u_n \rangle = F} + \underbrace{\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_k v_k}_{\in \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle = G}$$

e portanto,

$$x \in F + G$$

- Para o exemplo anterior em $\mathbb{R}^2$, em termos das respectivas ***bases canónicas*** temos,

$$H = \langle (0, 1) \rangle$$

$$F = \langle (1, 0) \rangle$$

ou seja,

$$H \cup F = \langle (1, 0) \rangle \cup \langle (0, 1) \rangle$$

e portanto,

$$\begin{aligned} H + F &= \langle H \cup F \rangle \\ &= \langle (1, 0), (0, 1) \rangle = \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

- No espaço vectorial $\mathbb{R}^3$, retomando o exemplo dos subespaços vectoriais,

$$F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y + 3z = 0 \}$$

$$G = \langle (1, 0, 1), (-1, 1, 2) \rangle$$

Determinemos um ***conjunto de geradores de*** $F + G$.

Como já temos um conjunto de geradores para G, basta encontrar um conjunto de geradores para F e juntar.

$$\begin{aligned} F &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = -y - 3z \} \\ &= \{ (-y - 3z, y, z) \ : \ y, z \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ y(-1, 1, 0) + z(-3, 0, 1) \ : \ y, z \in \mathbb{R} \} \\ &= \langle (-1, 1, 0), (-3, 0, 1) \rangle \end{aligned}$$

Assim temos,

$$F = \langle (-1, 1, 0), (-3, 0, 1) \rangle$$

$$G = \langle (1, 0, 1), (-1, 1, 2) \rangle$$

e portanto,

$$F + G = \langle (-1, 1, 0), (-3, 0, 1), (1, 0, 1), (-1, 1, 2) \rangle$$

Resta saber ***quantos*** destes vectores ***são linearmente independentes***, ou seja, ***qual a dimensão deste espaço***...

- No espaço vectorial $\mathbb{R}^4$, considere os subespaços vectoriais,

$$S = \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x - y = 0 \ \wedge \ x = y + w \}$$

$$T = \langle (1, 0, 0, 3), (2, 0, 0, 1) \rangle$$

Determine $S + T$ e indique uma sua ***base***.

⁕ O Teorema das Dimensões

- ***Proposição***: Sejam F e G dois subespaços vectoriais de um espaço ***finitamente gerado***.

  Então,

$$\boxed{\textbf{dim}\,(F + G) = \textbf{dim}\,F + \textbf{dim}\,G - \textbf{dim}\,(F \cap G)}$$

Argumentação:

Se ***algum*** dos subespaços for o ***subespaço trivial***, por exemplo $F = \{0_E\}$

então, $F \cap G = \{0_E\}$ e $F + G = G$

Como $\textbf{dim}\,\{0_E\} = 0,$ o resultado é óbvio pois teremos,

$$\textbf{dim}\,(G) = 0 + \textbf{dim}\,G - 0$$

Analisemos o caso geral, em que nenhum dos subespaço é o trivial.

Por hipótese F e G têm ***dimensão finita*** e portanto o subespaço vectorial $F \cap G$ também tem ***dimensão finita***.

Consideremos uma ***base*** de $F \cap G$,

$$\mathcal{B}_{F \cap G} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$$

Como os $e_1, e_2, \ldots, e_n \in F \cap G \subseteq F$ são linearmente independentes,

para obter uma ***base*** ordenada de F, teremos de juntar ***mais vectores de*** F,

por forma a obter,

$$F = \langle e_1, e_2, \ldots, e_n, f_1, f_2, \ldots, f_p \rangle$$

e de modo análogo para G,

$$G = \langle e_1, e_2, \ldots, e_n, g_1, g_2, \ldots, g_q \rangle$$

e então, para o ***subespaço soma***,

$$F + G = \langle e_1, e_2, \ldots, e_n, f_1, f_2, \ldots, f_p, g_1, g_2, \ldots, g_q \rangle$$

Prova-se que este conjunto de geradores ***é linearmente independente*** e que portanto formam uma ***base*** de $F + G$.

Deste modo, $\textbf{dim}\ (F \cap G) = n$

$\textbf{dim}\ (F) = n + p$

$\textbf{dim}\ (G) = n + q$

$\textbf{dim}\ (F + G) = n + p + q$

Ou seja, o ***teorema das dimensões*** garante-nos que,

$$\textbf{dim}\ (F + G) = \textbf{dim}\ F + \textbf{dim}\ G - \textbf{dim}\ (F \cap G)$$

- Para o exemplo anterior, dos ***dois subespaços*** vectoriais de $\mathbb{R}^2$,

$$H = \{ (0, y) : y \in \mathbb{R} \} = \langle (0, 1) \rangle$$

$$F = \{ (x, 0) : x \in \mathbb{R} \} = \langle (1, 0) \rangle$$

obviamente que,

$$\begin{aligned} \textbf{dim}\ (H + F) &= \textbf{dim}\ H + \textbf{dim}\ F - \textbf{dim}\ (H \cap F) \\ &= 1 + 1 - 0 \\ &= 2 = \textbf{dim}\ \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

- No espaço vectorial $\mathbb{R}^3$, voltemos ao exemplo dos subespaços vectoriais,

$$F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y + 3z = 0 \}$$

$$G = \langle (1, 0, 1), (-1, 1, 2) \rangle$$

Nas *páginas 64 e 65*, calculámos a sua ***intersecção***,

$$\begin{aligned} F \cap G &= \{ y\,(-5/2, 1, 1/2) \ : \ y \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ \tfrac{1}{2}\, y \,.\ 2\,(-5/2, 1, 1/2) \ : \ y \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ y'\,(-5, 2, 1) \ : \ y' \in \mathbb{R} \} \\ &= \langle (-5, 2, 1) \rangle \end{aligned}$$

Como $(-5, 2, 1) \neq (0, 0, 0)$,

podemos concluir que ***dim*** $(F \cap G) = 1$

e que conhecemos uma ***base ordenada***, $\mathcal{B}_{F \cap G} = ((-5, 2, 1))$.

Na *página 76* encontrámos um conjunto de ***geradores*** para F,

$$\begin{aligned} F &= \{ (-y - 3z, y, z) \ : \ y, z \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ y\,(-1, 1, 0) + z\,(-3, 0, 1) \ : \ y, z \in \mathbb{R} \} \\ &= \langle (-1, 1, 0), (-3, 0, 1) \rangle \end{aligned}$$

Depois de verificar que estes dois vectores são ***linearmente independentes***,

podemos concluir que ***dim*** $F = 2$

e que conhecemos ***uma base ordenada*** de F,

$$\mathcal{B}_F = ((-1, 1, 0), (-3, 0, 1)).$$

Contudo, a partir de $\mathcal{B}_{F\cap G} = (\,(-5,\ 2,\ 1)\,)$

é possível obter ***outras bases*** de F.

Basta juntar a $(-5,\ 2,\ 1)$, um vector de F que lhe seja ***independente***.

Por exemplo $(1,\ 2,\ -1) \in F$ não é da forma $\alpha(-5,\ 2,\ 1)$.

Deste modo obtivemos ***outra base ordenada*** de F,

$$\mathcal{B}_F = (\,(1,\ 2,\ -1),\ (-5,\ 2,\ 1)\,).$$

Por outro lado, para o espaço vectorial G,

$$G = \langle\,(1,\ 0,\ 1),\ (-1,\ 1,\ 2)\,\rangle$$

como G está definido por ***dois geradores*** (e porque ***a dimensão é o número mínimo de geradores***) então ***dim*** $G \leq 2$.

Também neste caso, a partir de $\mathcal{B}_{F\cap G} = (\,(-5,\ 2,\ 1)\,)$ é possível obter ***bases*** de G.

Basta juntar a $(-5,\ 2,\ 1)$, um vector de G que lhe seja ***independente***.

Por exemplo $(1,\ 0,\ 1) \in G$, ***um dos geradores dados***, não é combinação linear de $(-5,\ 2,\ 1)$, por não ser da forma $\alpha(-5,\ 2,\ 1)$.

Sendo $(1,\ 0,\ 1)$ e $(-5,\ 2,\ 1)$, dois vectores de G linearmente independentes, (e porque ***a dimensão é o número máximo de vectores linearmente independentes***) então ***dim*** $G \geq 2$.

Portanto ***dim*** $G = 2$.

Temos assim as ***bases ordenadas***,

$$\mathcal{B}_F = (\,(1,\ 2,\ -1),\ (-5,\ 2,\ 1)\,)$$

$$\mathcal{B}_G = (\,(1,\ 0,\ 1),\ (-5,\ 2,\ 1)\,).$$

donde podemos obter uma ***base ordenada*** para $F + G$,

$$\mathcal{B}_{F+G} = (\,(1,\ 2,\ -1),\ (-5,\ 2,\ 1),\ (1,\ 0,\ 1)\,)$$

e naturalmente que,

$$\begin{aligned} \mathbf{dim}\,(F+G) &= \mathbf{dim}\,F + \mathbf{dim}\,G - \mathbf{dim}\,(F \cap G) \\ &= 2 + 2 - 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

⁕ Soma Directa

- Sejam E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, e F e G ***subespaços vectoriais*** de E.

  Diz-se que F e G ***estão em soma directa*** ou que ***a soma*** $F + G$ ***é directa*** se, para todo o $u \in F + G$, existem ***um e um só*** $x \in F$

  e ***um e um só*** $y \in G$

  tais que, $u = x + y$

  Nesse caso escreve-se $F \oplus G$ em vez de $F + G$.

- Por exemplo, para os dois subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^3$,

$$F = \{ (0, 0, z) : z \in \mathbb{R} \}$$
$$G = \{ (0, y, 0) : y \in \mathbb{R} \}$$

cujo ***subespaço soma*** $F + G$ é dado por,

$$\begin{aligned} F + G &= \{ (0, 0, z) + (0, y, 0) : y, z \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ (0, y, z) : y, z \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \} \end{aligned}$$

vemos que, ***qualquer*** vector do ***espaço soma***,

$$u = (a, b, c) \in F + G$$

tem a forma $\quad u = (0, b, c)$

pelo que só pode ser escrito ***de um único modo*** como a soma de um elemento de F com um elemento de G,

$$u = (0, b, 0) + (0, 0, c)$$

Então F ***está em soma directa*** com G.

- Consideremos agora os dois subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^3$,

$$F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \}$$
$$G = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x \}$$

Calculemos o ***subespaço soma*** $F + G$ e vejamos ***se esta soma é directa***.

Observação: Note que,

$$F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \} = \{ (0, y, z) : y, z \in \mathbb{R} \}$$

e que,

$$G = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x \} = \{ (y, y, z) : y, z \in \mathbb{R} \}$$

ou seja, no cálculo dos vectores geradores do ***subespaço soma***, é necessário ***distinguir componentes com o mesmo nome***, mas de vectores de subespaços diferentes.

Por essa razão explicitamos,

$$\begin{aligned} F + G &= \{ (0, y, z) + (y', y', z') : y, z, y', z' \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ (y', y + y', z + z') : y, z, y', z' \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ (a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{R} \} \\ &= \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

e portanto, o ***subespaço soma*** é todo o espaço vectorial $\mathbb{R}^3$.

Nesse caso é óbvio que podemos obter, por exemplo,

$$(1, 1, 1) = \underbrace{(0, 0, 1)}_{\in F} + \underbrace{(1, 1, 0)}_{\in G}$$

mas ***também***,

$$(1, 1, 1) = \underbrace{(0, 0, -1)}_{\in F} + \underbrace{(1, 1, 2)}_{\in G}$$

pelo que podemos concluir que F ***não está em soma directa*** com G.

Observação: Como, $F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \}$

e $G = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x \}$

o ***subespaço intersecção*** $F \cap G$ é dado por,

$$
\begin{aligned}
F \cap G &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0 \} \\
&= \{ (0, 0, z) : z \in \mathbb{R} \} \\
&= \langle (0, 0, 1) \rangle
\end{aligned}
$$

e porque $(0, 0, 1) \neq (0, 0, 0)$ então $\boldsymbol{dim}\,(F \cap G) = 1$.

Assim, pelo Teorema das Dimensões,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{dim}\,(F + G) &= \boldsymbol{dim}\,F + \boldsymbol{dim}\,G - \boldsymbol{dim}\,(F \cap G) \\
&= 2 + 2 - 1 = 3 = \boldsymbol{dim}\,\mathbb{R}^3
\end{aligned}
$$

podemos concluir que $F + G = \mathbb{R}^3$.

- ***Proposição***: Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam F e G dois subespaços vectoriais de E.

  São ***equivalentes*** as três condições:

  (i) A soma $F + G$ é directa

  (ii) O vector nulo escreve-se de modo único como a soma de um vector de F com um vector de G

  (iii) $F \cap G = \{ 0_E \}$

Demonstração: Basta mostrar que, *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* $\Rightarrow$ *(iii)* $\Rightarrow$ *(i)*

(i) $\Rightarrow$ *(ii)*

É imediato, pela definição de soma directa.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)*

Provemos que $\{ 0_E \} \subseteq F \cap G$ e que $F \cap G \subseteq \{ 0_E \}$

$\{ 0_E \} \subseteq F \cap G$ porque o vector nulo pertence a todos os subespaços.

Mostremos que, se $u \in F \cap G$ então $u = 0_E$

Ora se $u \in F \cap G$ então $u \in F$ e $u \in G$

e se G é um subespaço vectorial, então existe $-u \in G$

tal que, $u + (-u) = 0_E$

mas como, $0_E + 0_E = 0_E$

e, ***por hipótese***, o vector nulo se escreve ***de modo único*** como a soma de um vector de F com um vector de G

então, $u = 0_E$

Portanto $F \cap G \subseteq \{ 0_E \}$

e consequentemente $F \cap G = \{ 0_E \}$

(iii) $\Rightarrow$ *(i)*

Provemos que, se $F \cap G = \{ 0_E \}$

então a soma $F + G$ é ***directa***.

Suponhamos que existia um $u \in F + G$

capaz de ser ***calculado de dois modos***,

$u = u_1 + u_2$ com $u_1 \in F$ e $u_2 \in G$

$u = u'_1 + u'_2$ com $u'_1 \in F$ e $u'_2 \in G$

e nesse caso,

$$u_1 + u_2 = u'_1 + u'_2$$

ou
$$\underbrace{u_1 - u'_1}_{\in F} = \underbrace{u'_2 - u_2}_{\in G}$$

ou seja, $u_1 - u'_1 \in F \cap G$

e $u'_2 - u_2 \in F \cap G$

mas como, por hipótese, $F \cap G = \{ 0_E \}$

então, $u_1 - u'_1 = 0_E$

e $u'_2 - u_2 = 0_E$

e portanto, $u_1 = u'_1$ e $u_2 = u'_2$

e o vector u só pode ser calculado de um modo, ou seja, ***a soma é directa***.

- Por exemplo, para os dois subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^4$,

$$F = \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0 \wedge z + w = 0 \}$$

$$G = \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 0 \wedge w = 0 \}$$

Como a ***intersecção***,

$$F \cap G = \{ (0, 0, 0, 0) \}$$

então F ***está em soma directa com*** G.

- No espaço vectorial $P_3[x]$ dos polinómios de coeficientes reais e de grau até 3, consideremos os subespaços vectoriais,

$$F = \{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in P_3[x] \ : \ a_0 + a_1 = 0 \ \wedge \ a_3 = 0 \ \}$$

$$G = \{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in P_3[x] \ : \ a_0 + a_1 + a_2 = 0 \ \}$$

calculando a ***intersecção***,

$$\begin{aligned} F \cap G &= \{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in P_3[x] \ : \\ &\qquad a_0 + a_1 = 0 \ \wedge \ a_3 = 0 \ \wedge \ a_0 + a_1 + a_2 = 0 \ \} \\ &= \{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in P_3[x] \ : \\ &\qquad a_0 + a_1 = 0 \ \wedge \ a_3 = 0 \ \wedge \ a_2 = 0 \ \} \\ &= \{ -a_1 + a_1x \ : \ a_1 \in \mathbb{R} \ \} \end{aligned}$$

como $F \cap G \neq \{ 0_E \}$ então ***a soma*** $F + G$ ***não é directa***.

- No espaço vectorial $\mathbb{R}^3$, considere os vectores :

$$a = (1,\ 2,\ -1)$$
$$b = (1,\ -2,\ -1)$$
$$c = (1,\ 2,\ 3)$$
$$d = (2,\ 2,\ 2)$$

Seja F o subespaço gerado pelos vectores a e b e seja G o subespaço gerado pelos vectores c e d. ***Determine uma base*** para:

(a) $F \cap G$

(b) $F + G$

<u>Esquema</u> da resolução:

Dados, $F = \langle\, (1,\ 2,\ -1),\ \ (1,\ -2,\ -1)\,\rangle$

$G = \langle\, (1,\ 2,\ 3),\ \ (2,\ 2,\ 2)\,\rangle$

A partir uma ***combinação linear*** dos vectores geradores de F, construir o ***sistema*** e, da ***discussão do sistema***, ***mostrar que***,

$$F = \{\ (x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3\ :\ z = -x\ \}$$

e o mesmo para G,

$$G = \{\ (x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3\ :\ z = 2y - x\ \}$$

(a) $F \cap G$

Calcular a ***intersecção***,

$$\begin{aligned} F \cap G\ &= \{\ (x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3\ :\ z = -x\ \wedge\ z = 2y - x\ \} \\ &= \{\ (x,\ 0,\ -x)\ :\ x \in \mathbb{R}\ \} \\ &= \{\ x\,(1,\ 0,\ -1)\ :\ x \in \mathbb{R}\ \} \\ &= \langle\, (1,\ 0,\ -1)\,\rangle \end{aligned}$$

então a intersecção é ***gerada*** por um só vector, que sendo $(1,\ 0,\ -1) \neq 0_E$, é portanto ***linearmente independente***,

logo, forma uma ***<u>base</u>***,

$$\mathcal{B}_{F \cap G} = \{\ (1,\ 0,\ -1)\ \}$$

(b) $F + G$

Uma resolução:

A partir de, $$F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -x \}$$
$$= \{ (x, y, -x) : x, y \in \mathbb{R} \}$$
$$G = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2y - x \}$$
$$= \{ (2y - z, y, z) : y, z \in \mathbb{R} \}$$

calcular a ***soma***,

$$F + G = \{ u + v : u \in F , v \in G \}$$

onde,

$$u \in F \Rightarrow u = (x, y, -x) \quad \text{com} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

e, não esquecendo de ***distinguir componentes de subespaços diferentes***,

$$v \in G \Rightarrow v = (2y' - z', y', z') \quad \text{com} \quad y', z' \in \mathbb{R}$$

somando,

$$u + v = (x + 2y' - z', y + y', -x + z')$$
$$= x (1, 0, -1) + y (0, 1, 0) + y' (2, 1, 0) + z' (-1, 0, 1)$$

Analisemos o conjunto de vectores,

$$\{ (1, 0, -1), (0, 1, 0), (2, 1, 0), (-1, 0, 1) \}$$

serão ***linearmente independentes***?

Notamos que, $(-1, 0, 1) = -(1, 0, -1)$

eliminemos um destes e analisemos o conjunto dos ***restantes***,

$$\{ (1, 0, -1), (0, 1, 0), (2, 1, 0) \}$$

Construindo a combinação linear nula e resolvendo os sistema resultante, concluímos que são ***linearmente independentes***.

Portanto,

$$\mathcal{B}_{F+G} = \{ (1, 0, -1), (0, 1, 0), (2, 1, 0) \}$$

(b) $F + G$

Outra resolução:

A partir de, $F = \langle (1, 2, -1), (1, -2, -1) \rangle$

e de $G = \langle (1, 2, 3), (2, 2, 2) \rangle$

Começamos por ***verificar*** que, para o subespaço F, o conjunto de vectores,

$$\{ (1, 2, -1), (1, -2, -1) \}$$

é ***linearmente independente***. Daqui concluímos que ***dim*** $F = 2$.

Sabendo que,

$$F \cap G = \langle (1, 0, -1) \rangle$$

Para ***construir uma base de*** F, basta juntar a $(1, 0, -1)$ um vector de F que ***não seja combinação linear*** (neste caso, que não seja múltiplo) dele.

Como por exemplo o ***vector gerador*** $(1, 2, -1)$.

Então temos o conjunto $\{ (1, 2, -1), (1, 0, -1) \}$ de vectores de F, que são ***linearmente independentes***.

Como ***dim*** $F = 2$, estes ***dois vectores*** linearmente independentes ***formam uma base***,

$$\mathcal{B}_F = \{\ (1,\ 2,\ -1),\ \ (1,\ 0,\ -1)\ \}$$

Para, $\quad G = \langle\ (1,\ 2,\ 3),\ \ (2,\ 2,\ 2)\ \rangle$

se é um subespaço vectorial ***gerado por dois vectores***, então ***dim*** $G \leq 2$.

E mais uma vez partindo do vector gerador da ***intersecção***,

$$F \cap G = \langle\ (1,\ 0,\ -1)\ \rangle$$

vamos juntar a $(1,\ 0,\ -1)$ um vector de G que ***não seja combinação linear*** dele, como por exemplo o vector gerador $(1,\ 2,\ 3)$.

Ora se temos ***dois vectores linearmente independentes***, então ***dim*** $G \geq 2$.

E combinando as duas desigualdades, ***dim*** $G = 2$.

Portanto os ***dois vectores*** formam uma ***base*** de G,

$$\mathcal{B}_G = \{\ (1,\ 2,\ 3),\ \ (1,\ 0,\ -1)\ \}$$

E como já tínhamos,

$$\mathcal{B}_F = \{\ (1,\ 2,\ -1),\ \ (1,\ 0,\ -1)\ \}$$

podemos então concluir que,

$$\mathcal{B}_{F+G} = \{\ (1,\ 2,\ -1),\ (1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 0,\ -1)\ \}$$

- ***Proposição***: Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam F e G dois subespaços vectoriais de E ***de dimensão finita***.

  Seja ainda $S = F + G$.

  São ***equivalentes*** as três condições:

  (i) $S = F \oplus G$

  (ii) $\mathbf{dim}\,(F + G) = \mathbf{dim}\,F + \mathbf{dim}\,G$

  (iii) Se $\mathcal{B}_F = (f_1, f_2, \ldots, f_p)$ é uma base ordenada de F

  e $\mathcal{B}_G = (g_1, g_2, \ldots, g_q)$ é uma base ordenada de G

  então $\mathcal{B} = (f_1, f_2, \ldots, f_p, g_1, g_2, \ldots, g_q)$

  é uma base ordenada de $F + G = S$.

Demonstração: Neste caso, é mais simples provar que,

(i) $\Leftrightarrow$ *(ii)* $\wedge$ *(ii)* $\Leftrightarrow$ *(iii)*

(i) $\Rightarrow$ *(ii)*

Se $S = F \oplus G$, pela proposição anterior, $F \cap G = \{ 0_E \}$

e então, $\mathbf{dim}\,(F \cap G) = 0$

logo, pelo teorema das dimensões,

$\mathbf{dim}\,(F + G) = \mathbf{dim}\,F + \mathbf{dim}\,G - 0$

(ii) $\Rightarrow$ *(i)*

Inversamente, se $\mathbf{dim}\,(F + G) = \mathbf{dim}\,F + \mathbf{dim}\,G$

então, pelo teorema das dimensões, $\mathbf{dim}\,(F \cap G) = 0$

ou seja, $F \cap G = \{ 0_E \}$ e a soma é directa.

(ii) $\Leftrightarrow$ *(iii)*

Na demonstração do teorema das dimensões,

basta considerar o ***caso particular*** em que,

$$\mathbf{dim}\,(F \cap G) = 0 \Leftrightarrow F \cap G = \{ 0_E \} \Leftrightarrow \mathcal{B}_{F\cap G} = \emptyset$$

.

- No espaço vectorial $\mathbb{R}^4$ consideremos,

$$F = \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = y + 2z - w = 0 \}$$

$$G = \langle (1, 1, 1, 1),\ (0, 1, 0, -1) \rangle$$

(a) Verifique que F é um ***subespaço vectorial***.

(b) Mostre que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$

(b) ***Esquema de uma resolução***:

Basta mostrar que $F + G = \mathbb{R}^4$ e que $F \cap G = \{ (0, 0, 0, 0) \}$.

Comecemos por determinar ***vectores geradores*** de F,

$$\begin{aligned} F &= \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = -y - z \ \wedge \\ &\qquad\qquad w = y + 2z \} \\ &= \{ (-y - z,\ y,\ z,\ y + 2z) : y, z \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ y(-1, 1, 0, 1) + z(-1, 0, 1, 2) : y, z \in \mathbb{R} \} \\ &= \langle (-1, 1, 0, 1), (-1, 0, 1, 2) \rangle \end{aligned}$$

Depois de ***provar*** que estes vectores são ***linearmente independentes***,

podemos concluir que ***dim*** $F = 2$ e que temos,

$$\mathcal{B}_F = (\ (-1,\ 1,\ 0,\ 1),\ (-1,\ 0,\ 1,\ 2)\ )$$

Do mesmo modo, ***provar*** também que ***dim*** $G = 2$ e que,

$$\mathcal{B}_G = (\ (1,\ 1,\ 1,\ 1),\ \ (0,\ 1,\ 0,\ -1)\ )$$

Calculemos agora $F \cap G$, ***a partir das bases*** de F e de G.

Ora se um vector $u \in F \cap G$, então $u \in F$ e $u \in G$,

ou seja,

$$u \in F \ \Rightarrow\ u = a\,(-1,\ 1,\ 0,\ 1) + b\,(-1,\ 0,\ 1,\ 2)$$

$$u \in G \ \Rightarrow\ u = c\,(1,\ 1,\ 1,\ 1) + d\,(0,\ 1,\ 0,\ -1)$$

mas nesse caso, podemos ***subtrair***,

$$a\,(-1,\ 1,\ 0,\ 1) + b\,(-1,\ 0,\ 1,\ 2)$$

$$-\,c\,(1,\ 1,\ 1,\ 1)\ -\ d\,(0,\ 1,\ 0,\ -1) = (0,\ 0,\ 0,\ 0)$$

o que conduz à ***resolução*** do ***sistema homogéneo***,

$$\begin{cases} -a - b - c = 0 \\ a - c - d = 0 \\ b - c = 0 \\ a + 2b - c + d = 0 \end{cases}$$

sistema cuja ***solução única*** é a trivial $a = b = c = d = 0$.

Podemos então concluir que a ***intersecção***,

$$F \cap G = \{ (0, 0, 0, 0) \}$$

e portanto que F está em ***soma directa*** com G.

Por outro lado, pelo ***teorema das dimensões***,

$$\begin{aligned} \textbf{dim}\,(F + G) &= \textbf{dim}\,F + \textbf{dim}\,G - \textbf{dim}\,(F \cap G) \\ &= 2 + 2 - 0 = 4 = \dim \mathbb{R}^4 \end{aligned}$$

e como $F + G \leq \mathbb{R}^4$ podemos concluir que $F + G = \mathbb{R}^4$.

É assim mostrámos que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$

- No espaço vectorial $\mathbb{R}^3$ considere os subconjuntos,

$$F = \{ (x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R} \}$$

$$G = \{ (0, y, z) : y, z \in \mathbb{R} \}$$

(a) Mostre que F e G são subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^3$.

(b) Investigue se $F \oplus G = \mathbb{R}^3$

⁕ *Subespaço Complementar*

- Sejam E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e seja F um subespaço vectorial de E.

  F^*, um subespaço vectorial de E tal que,

  $$\boxed{E = F \oplus F^*}$$

  chama-se ***subespaço complementar*** de F.

- ***Proposição***: Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita n.

  Todo o subespaço vectorial de E

  tem ***pelo menos um subespaço complementar***.

Demonstração: Seja F um subespaço vectorial de E.

No caso particular de ser o subespaço trivial

$F = \{ 0_E \}$ então $F^* = E$

e no caso de $F = E$ então $F^* = \{ 0_E \}$

Analisemos então o ***caso geral***,

e seja $(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ uma **base** de F.

Como $F \neq E$ existem vectores de E que não estão em F.

Podemos então ***completar esta base***,

por forma a obter uma base de E.

Seja $(f_1, f_2, \dots, f_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ essa ***base*** de E.

Façamos, $F^* = \langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$

então, $\textbf{\textit{dim}}\ F + \textbf{\textit{dim}}\ F^* = n = \textbf{\textit{dim}}\ E$

e, pela proposição anterior, $E = F \oplus F^*$

Portanto F^* é ***um subespaço complementar*** de F.

- Voltemos a considerar o subespaço vectorial de $\mathbb{R}^4$,

$$F = \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = y + 2z - w = 0 \}$$

Já sabemos que ***dim*** $F = 2$ e temos uma base de F,

$$\mathcal{B}_F = ((-1, 1, 0, 1), (-1, 0, 1, 2))$$

Como $F \subseteq \mathbb{R}^4$ e ***dim*** $\mathbb{R}^4 = 4$, para obter ***espaços complementares*** de F,

basta ***juntar*** a $\mathcal{B}_F$ ***dois vectores que não pertençam a*** F, de modo a

formar uma base de $\mathbb{R}^4$.

Um exemplo:

Os ***dois vectores*** de $\mathbb{R}^4$, $(1, 0, 0, 0)$ e $(0, 1, 0, 0)$ ***não pertencem*** a F,

pois não verificam $x + y + z = 0$.

Como ***dim*** $\mathbb{R}^4 = 4$, resta verificar que os ***quatros vectores*** do conjunto

resultante são ***linearmente independentes***.

Efectivamente, construindo a combinação linear nula,

$$a\,(1, 0, 0, 0) + b\,(0, 1, 0, 0) + c\,(-1, 1, 0, 1) + d\,(-1, 0, 1, 2) = (0, 0, 0, 0)$$

e resolvendo o sistema resultante, é simples concluir que,

$$a = b = c = d = 0 .$$

Temos assim uma ***base*** de $\mathbb{R}^4$,

$$\mathcal{B} = (\,(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (-1, 1, 0, 1), (-1, 0, 1, 2)\,)$$

e, ***pela proposição anterior***, também ***um subespaço complementar*** de F,

$$F_1^* = \langle\, (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\,\rangle$$

ou seja, $\mathbb{R}^4 = F \oplus F_1^*$.

Como os vectores de F_1^* são da forma,

$$(x, y, z, w) = \alpha\,(1, 0, 0, 0) + \beta\,(0, 1, 0, 0)$$

podemos identificar, $F_1^* = \{\, (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \;:\; z = w = 0 \,\}$

Outro exemplo:

De modo análogo, mostre que juntando os dois vectores, $(1, 0, 0, 0)$ e $(0, 0, 1, 0)$ é possível obter ***outro subespaço complementar*** de F,

$$\begin{aligned} F_2^* &= \langle\, (1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\,\rangle \\ &= \{\, (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \;:\; y = w = 0 \,\} \end{aligned}$$