Capítulo 4 – Espaços Vectoriais sobre um Corpo

⁕ Definições

- Uma ***estrutura algébrica*** é um conjunto, no qual estão definidas uma ou mais ***operações*** internas que satisfazem um conjunto de ***propriedades***.

  Essas propriedades caracterizam a estrutura algébrica particular.

- Consideremos a ***estrutura algébrica*** $\mathbb{K}$, onde estão definidas duas operações internas: a ***adição*** e a ***multiplicação***.

  Isto é, se $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

  então $\alpha + \beta \in \mathbb{K}$ e $\alpha \,.\, \beta \in \mathbb{K}$.

- ***Se*** a operação ***adição*** $(+)$ em $\mathbb{K}$ verificar as ***propriedades*** (P_1) a (P_4)

  (P_1) ***comutatividade***: $\alpha + \beta = \beta + \alpha \ , \ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

  (P_2) ***associatividade***: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \ ,$

  $\forall\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$

  (P_3) ***existência de elemento neutro***: $\exists\, 0_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K} \ , \ \forall\, \alpha \in \mathbb{K}$

  $0_{\mathbb{K}} + \alpha = \alpha$

  (P_4) ***existência de elemento simétrico***: $\forall\, \alpha \in \mathbb{K} \ , \ \exists\, -\alpha \in \mathbb{K} \ ,$

  $\alpha + (-\alpha) = 0_{\mathbb{K}}$

  então a ***estrutura algébrica*** $(\mathbb{K}, +)$ é um ***grupo abeliano***.

- ***Se*** a operação ***multiplicação*** *(.)* em $\mathbb{K}$ verificar as ***propriedades*** (P_5) a (P_8)

(P_5) ***comutatividade***: $\alpha . \beta = \beta . \alpha \ , \ \forall\, \alpha , \beta \in \mathbb{K}$

(P_6) ***associatividade***: $(\alpha . \beta) . \gamma = \alpha . (\beta . \gamma) \ , \ \forall\, \alpha , \beta , \gamma \in \mathbb{K}$

(P_7) ***existência de elemento neutro***: $\exists\ 1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K} \ , \ \forall\, \alpha \in \mathbb{K}$
$1_{\mathbb{K}} . \alpha = \alpha$

(P_8) ***existência de elemento inverso***: $\forall\, \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\} , \exists\ \alpha^{-1} \in \mathbb{K},$
$\alpha . \alpha^{-1} = 1_{\mathbb{K}}$

então a ***estrutura algébrica*** $(\mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}, .)$ é um ***grupo abeliano***.

- ***Se*** ao conjunto $\mathbb{K}$, munido das duas operações ***adição*** $(+)$ e ***multiplicação*** *(.)*, verificar todas as ***propriedades*** (P_1) a (P_8) e também,

(P_9) ***distributividade da adição em relação à multiplicação***:

$$\alpha . (\beta + \gamma) = \alpha . \beta + \alpha . \gamma \ , \ \forall\, \alpha , \beta , \gamma \in \mathbb{K}$$

então dizemos que a ***estrutura algébrica*** $(\mathbb{K}, +, .)$ é um ***corpo***.

Ao ***elemento neutro da adição*** $0_{\mathbb{K}}$ chamamos ***zero*** de $\mathbb{K}$,

ao ***elemento neutro da multiplicação*** $1_{\mathbb{K}}$ chamamos ***identidade*** de $\mathbb{K}$,

- Por exemplo, para a adição e multiplicação usuais,

  $(\mathbb{R}, +, .)$, $(\mathbb{Q}, +, .)$ e $(\mathbb{C}, +, .)$ são corpos.

- Seja $\mathbb{K}$ um corpo e seja E um conjunto não vazio onde estão definidas ***duas operações***:

  - Uma ***operação interna*** $\oplus$, chamada ***adição*** em E,

    que a todo o par $u, v \in E$ faz corresponder $u \oplus v \in E$

  - Uma ***operação externa*** $\otimes$, chamada ***multiplicação por um escalar*** em E,

    que a todo o $\alpha \in \mathbb{K}$ e todo o $u \in E$ faz corresponder $\alpha \otimes u \in E$

Dizemos que a estrutura algébrica $(E, \oplus, \otimes)$ é um ***espaço vectorial sobre o corpo*** $\mathbb{K}$ se são satisfeitas as seguintes propriedades,

para quaisquer $u, v, w \in E$ e quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

(A_1) ***comutatividade de*** $\oplus$:

$$u \oplus v = v \oplus u$$

(A_2) ***associatividade de*** $\oplus$:

$$(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$$

(A_3) ***existência de elemento neutro de*** $\oplus$:

$$\exists\, 0_E \in E, \ u \oplus 0_E = u$$

(A_4) ***existência de elemento simétrico em*** $\oplus$:

$$\exists\, -u \in E, \ u + (-u) = 0_E$$

e também,

(M_1) ***distributividade de $\otimes$ em relação a $+$*** :

$$(\alpha + \beta) \otimes u = (\alpha \otimes u) \oplus (\beta \otimes u)$$

(M_2) ***distributividade de $\oplus$ em relação a $\otimes$***:

$$\alpha \otimes (u \oplus v) = (\alpha \otimes u) \oplus (\alpha \otimes v)$$

(M_3) ***associatividade mista***:

$$\alpha \otimes (\beta \otimes u) = (\alpha . \beta) \otimes u$$

(M_4) ***existência de elemento neutro de $\otimes$***:

$$1_{\mathbb{K}} \otimes u = u$$

- Aos elementos de E chamam-se ***vectores*** e aos elementos de $\mathbb{K}$ chamam-se ***escalares***.

  O elemento neutro para a adição de E toma o nome de ***vector nulo*** e representa-se por 0_E.

  Quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ diz-se que E é um ***espaço vectorial real***

  e quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ diz-se que E é um ***espaço vectorial complexo***

- Habitualmente representamos:

  os ***escalares***: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

  os ***vectores***: $u, v, w, \ldots$

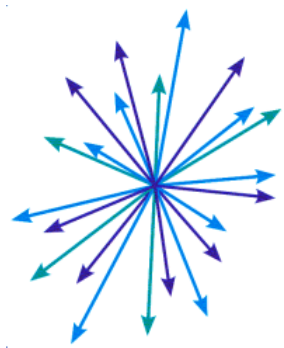
  a ***soma de vectores***: $\oplus$

  o ***produto de um escalar por um vector***: $\otimes$

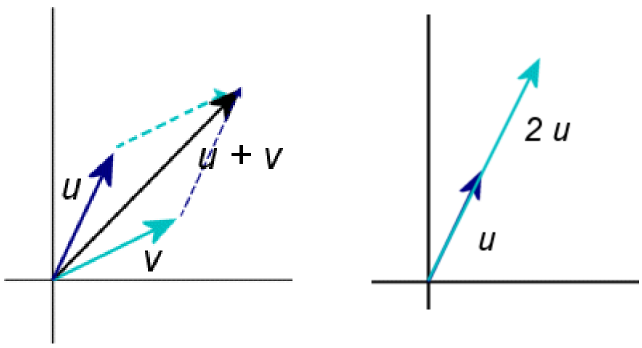
  mas caso não exista possibilidade de confusão, podemos usar $+$ e $.$

⇨ Alguns exemplos de espaços vectoriais reais $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$

- O exemplo mais óbvio de um espaço vectorial real é o ***conjunto dos vectores livres*** no plano.

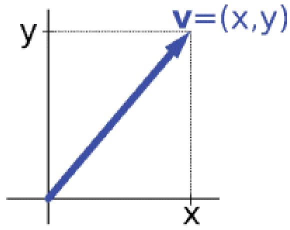


As operações ***soma de vectores*** e ***multiplicação de um escalar por um vector*** têm as representações geométricas conhecidas:



Identifique o ***vector nulo*** e o ***vector simétrico*** e verifique graficamente algumas das ***propriedades***...

Um vector livre é univocamente identificado pelas coordenadas (x, y) da sua extremidade, pelo que existe uma ***identificação*** entre o ***conjunto dos vectores livres*** no plano e o ***conjunto*** $\mathbb{R}^2$, munido das operações habituais.



- O ***conjunto*** $\mathbb{R}^2$, munido das operações habituais, é um ***espaço vectorial real***.

  Para todo o par de elementos $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e todo o $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos,

  $$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

  $$\alpha \otimes (x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$$

  O ***vector nulo*** é $(0, 0)$ e o ***vector simétrico*** de qualquer $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é o elemento $(-x_1, -x_2)$.

- Generalizando, também o ***conjunto*** $\mathbb{R}^n$ para $n \geq 1$ é um ***espaço vectorial real***, com as operações definidas para,

  todo o par de elementos $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

  e todo o $\alpha \in \mathbb{R}$,

  $$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \oplus (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

  $$\alpha \otimes (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

  O ***vector nulo*** é $(0, 0, \ldots, 0)$ e o ***vector simétrico*** de

  qualquer $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é o elemento $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$.

- O ***conjunto*** $P[x]$ dos ***polinómios com coeficientes reais*** é um ***espaço vectorial real***.

$P[x]$ = { $p(x)$: $p(x)$ é um polinómio com coeficientes reais }

= { $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$,

para algum $n \in \mathbb{N}_0$ e $a_i \in \mathbb{R}$.

As operações são: a habitual ***soma de polinómios*** e o ***produto de um polinómio por um escalar***.

Note que, mesmo que os polinómios tenham graus diferentes,
por exemplo $p(x)$ de grau n e $q(x)$ de grau m, com $n \leq m$,

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \\ q(x) &= b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0 \end{aligned}$$

onde $a_n \neq 0$ e $a_m \neq 0$ e $\forall\ a_i, b_i \in \mathbb{R}$,

podemos considerar,

$$(p+q)(x) = (0+b_m)x^m + \cdots + (0+b_{n+1})x^{n+1} + \cdots$$

$$+ (a_n+b_n)x^n + \cdots + a_0 x + b_0$$

e todo o $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\alpha p(x) = \alpha a_n x^n + \cdots + \alpha a_1 x + \alpha a_0$$

Naturalmente o ***vector nulo*** é o polinómio nulo.

- O ***conjunto*** $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ das matrizes de tipo $m\times n$ com elementos reais é um ***espaço vectorial real***, com as operações ***adição de matrizes*** e ***produto de um escalar por uma matriz***.

  O ***vector nulo*** é a matriz nula e o ***vector simétrico*** de uma matriz $A = [\, a_{ij} \,]$ é a matriz $-A = [-a_{ij}\,]$.

- O ***conjunto das funções reais de variável real*** é um ***espaço vectorial real*** para a ***adição de funções*** e ***multiplicação duma função por um escalar*** onde, para todo $x \in \mathbb{R}$,

  $$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

  $$(\alpha f)(x) = \alpha\ f(x)$$

  O ***vector nulo*** é a função $f(x) = 0$ e o ***vector simétrico*** de uma função $f(x)$ é a função $-f(x)$.

⇨ Algumas propriedades dos espaços vectoriais

Seja E um ***espaço vectorial*** sobre $\mathbb{K}$.

Então, para quaisquer ***vectores*** $x, y \in E$ e quaisquer ***escalares*** $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

- $\boxed{0_{\mathbb{K}}\, x = 0_E}$

  Ou seja, o ***produto*** do ***elemento neutro do corpo*** por ***qualquer vector*** é o ***elemento neutro do espaço vectorial***.

Demonstração: Sendo $0_{\mathbb{K}}$ o elemento neutro de $\mathbb{K}$, então,

$$0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}$$

multiplicando por um $x \in E$ qualquer,

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{K}}\, x &= (\, 0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}\,)\, x \\ &= 0_{\mathbb{K}}\, x + 0_{\mathbb{K}}\, x \end{aligned}$$

Ora o elemento $0_{\mathbb{K}}\, x$ tem o seu simétrico $-0_{\mathbb{K}}\, x$.

Somando $-0_{\mathbb{K}}\, x$ à equação anterior,

$$\underbrace{0_{\mathbb{K}}\, x + (-0_{\mathbb{K}}\, x)} = 0_{\mathbb{K}}\, x + \underbrace{0_{\mathbb{K}}\, x + (-0_{\mathbb{K}}\, x)}$$

e pelos axiomas (A_3) do ***elemento neutro*** e (A_4) do ***elemento simétrico*** do espaço vectorial.

$$0_E = 0_{\mathbb{K}}\, x + 0_E$$

e portanto,

$$0_E = 0_{\mathbb{K}}\, x$$

- $\boxed{\alpha\, 0_E = 0_E}$

Ou seja, o ***produto*** de ***qualquer escalar*** pelo ***elemento neutro do espaço vectorial*** é o ***elemento neutro do espaço vectorial***.

Demonstração: Sendo 0_E o elemento neutro de E, então,

$$0_E = 0_E + 0_E$$

multiplicando por um $\alpha \in \mathbb{K}$ qualquer,

$$\alpha\, 0_E = \alpha\, (\, 0_E + 0_E\,)$$

$$\alpha\, 0_E = \alpha\,(0_E + 0_E)$$
$$= \alpha\, 0_E + \alpha\, 0_E$$

Somando a ambos os membros desta equação o simétrico de $\alpha\, 0_E$, isto é, $-\alpha\, 0_E$,

$$\underbrace{\alpha\, 0_E - \alpha\, 0_E}_{} = \alpha\, 0_E + \underbrace{(\alpha\, 0_E - \alpha\, 0_E)}_{}$$

$$0_E = \alpha\, 0_E + 0_E$$
$$0_E = \alpha\, 0_E$$

- $\boxed{(-\alpha)\, x = -(\alpha\, x)}$

Ou seja, o ***produto*** do ***simétrico de qualquer escalar*** por ***qualquer vector*** é o ***simétrico do produto*** do vector pelo escalar.

Demonstração: Para provar que $(-\alpha)\, x$ é o **simétrico** de $\alpha\, x$,

teremos de provar que,

$$(-\alpha)\, x + (\alpha\, x) = 0_E$$

e efectivamente,

$$(-\alpha)\, x + (\alpha\, x) = (-\alpha)\, x + \alpha\, x$$
$$= (-\alpha + \alpha)\, x$$
$$= 0_{\mathbb{K}}\, x$$
$$= 0_E$$

De modo análogo, não é difícil provar também as ***propriedades***,

- $\boxed{\alpha\,(-x) = -(\alpha\, x)}$

- $\boxed{(\alpha - \beta)\, x = \alpha\, x - \beta\, x}$

- $\boxed{\alpha\,(x - y) = \alpha\, x - \alpha\, y}$

⁕ *Subespaços Vectoriais*

- Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e seja F um subconjunto ***não vazio*** de E. Diz-se que F é um ***subespaço vectorial*** de E e representa-se por $F \leq E$, se for um espaço vectorial para as operações induzidas em F pelas operações de E.

- Naturalmente o próprio E é um subespaço de E, bem como o conjunto $\{\, 0_E \,\}$. São os chamados ***subespaços triviais*** de E.

- ***Propriedade***:

> Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e seja $F \subseteq E$.
>
> Então F é um ***subespaço vectorial*** de E ***se e só se***,
>
> *(i)* $F \neq \emptyset$
>
> *(ii)* $\forall\, x, y \in F,\ \ x + y \in F$
>
> *(iii)* $\forall\ \alpha \in \mathbb{K},\ \forall\, x \in F,\ \ \alpha\, x \in F$

- Por exemplo no ***espaço vectorial*** $\mathbb{R}^2$, qualquer ***recta que passa na origem*** é um ***subespaço***.

  Para qualquer $m \in \mathbb{N}$, podemos definir a recta de declive m que passa na origem, como o conjunto,

$$\begin{aligned} F &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = m\,x \} \\ &= \{ (x, m\,x) : \; x \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

  Assim, $F \subseteq \mathbb{R}^2$ e pela propriedade anterior,

  F é um ***subespaço vectorial*** de $\mathbb{R}^2$, pois.

  (i) $(0, 0) \in F$, porque $(0, 0) = (0, m\,0)$

  portanto $F \neq \emptyset$

  (ii) Para quaisquer $(x_1, m\,x_1)$, $(x_2, m\,x_2) \in F$,

  temos,

$$\begin{aligned} (x_1, m\,x_1) + (x_2, m\,x_2) &= (x_1 + x_2 \,,\; m\,x_1 + m\,x_2) \\ &= (x_1 + x_2 \,,\; m\,(x_1 + x_2)) \\ &\in F \end{aligned}$$

  (iii) Para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(x, m\,x) \in F$,

  temos,

$$\begin{aligned} \alpha\,(x, m\,x) &= (\alpha\,x, \alpha\,(m\,x)) \\ &= (\alpha\,x, m\,(\alpha\,x)) \\ &\in F \end{aligned}$$

- Por exemplo, no ***espaço vectorial*** $P[x]$ dos polinómios com coeficientes reais, o conjunto $P_n[x]$ dos ***polinómios de grau até*** n é um ***subespaço*** .

$$P_n[x] = \{ p(x) \in P[x] \ : \ grau(p(x)) \leq n \}$$
$$= \{ p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 , \ a_i \in \mathbb{R} , i \in \{1, \ldots, n\} \}$$

$P_n[x]$ é um ***subespaço vectorial*** de $P[x]$ porque $P_n[x] \subseteq P[x]$

e além disso,

(i) não é vazio

(ii) a soma de dois polinómios de grau até n é um polinómio de grau até n

(iii) o produto de um real por um polinómio de grau até n é um polinómio de grau até n

- ***Proposição***:

Sejam E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$

e F um ***subespaço*** de E.

Então:

(a) $0_E \in F$

(b) $x \in F \Rightarrow -x \in F$

(c) $x, y \in F \Rightarrow x - y \in F$

Demonstração: Se F é um ***subespaço*** então,

(i) $F \neq \emptyset$, ou seja, ***existe*** algum $x \in F$

(ii) $\forall\, \alpha \in \mathbb{K},\ \forall\, x \in F \Rightarrow \alpha\, x \in F$

(iii) $\forall\, x, y \in F \Rightarrow x + y \in F$

(a) Como $\mathbb{K}$ é um ***corpo***, então $0_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$

portanto:

$$0_{\mathbb{K}}\ x = 0_E \in F$$

(b) Como $\mathbb{K}$ é um ***corpo***, então $-1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$

portanto:

$$(-1_{\mathbb{K}})\ x = -x \in F$$

(c) Por *(b)*, se $y \in F$ então $-y \in F$

portanto:

$$x + (-y) = x - y \in F$$

- Verificámos assim que ***o elemento neutro*** 0_E do espaço vectorial ***pertence a todo o subespaço***.

  Por isso, a ***condição necessária e suficiente*** (página 11) para que $F \subseteq E$ seja um ***subespaço vectorial***, pode ser escrita na forma:

$\longrightarrow$ (i) $0_E \in F$

(ii) $\forall\, \alpha \in \mathbb{K},\ \forall\, x \in F,\ \alpha\, x \in F$

(iii) $\forall\, x, y \in F,\ x + y \in F$

- Outra forma possível de ***condição necessária e suficiente*** para que $F \subseteq E$ seja um ***subespaço vectorial***, consiste em combinar *(ii)* e *(iii)*.

- ***Propriedade***:

  Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e seja $F \subseteq E$.

  Então F é um ***subespaço vectorial*** de E ***se e só se***,

  (1) $0_E \in F$

  (2) $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}\ ,\ \forall\ x, y \in F,$

  $\alpha\, x + \beta\, y \in F$

Ou seja,

(1) O ***elemento neutro*** 0_E do espaço vectorial pertence a F.

(2) Qualquer ***combinação linear de dois vectores*** de F, pertence a F.

⁕ Combinação Linear de Vectores

- Seja E um ***espaço vectorial*** sobre $\mathbb{K}$. Diz-se que um vector $v \in E$ é uma ***combinação linear*** dos vectores $u_1, u_2, \ldots, u_k \in E$ se existem ***escalares*** $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ tais que,

$$\boxed{v = \alpha_1\, u_1 + \alpha_2\, u_2 + \ldots + \alpha_k\, u_k}$$

- Consideremos por exemplo o espaço vectorial $\mathbb{R}^3$ sobre o corpo $\mathbb{R}$.

Verifiquemos se o vector $v = (2, -1, 3)$ é, ou não,

combinação linear dos três vectores: $v_1 = (1, 0, 0)$

$$v_2 = (1, 0, 1)$$

$$v_3 = (1, 2, 1)$$

Ou seja, verifiquemos se ***existem***, ou não, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tais que,

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$$

ou,

$$\begin{aligned}(2, -1, 3) &= \alpha_1 (1, 0, 0) + \alpha_2 (1, 0, 1) + \alpha_3 (1, 2, 1)\\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\,,\ 2\alpha_3\,,\ \alpha_2 + \alpha_3)\end{aligned}$$

Portanto, o problema consiste na ***resolução do sistema***,

$$\left\{\begin{array}{rcc} 2 & = & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ -1 & = & 2\alpha_3 \\ 3 & = & \alpha_2 + \alpha_3 \end{array}\right.$$

e a combinação linear existirá se e só se o ***sistema for possível***.

Resolvendo então o sistema,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3' := \frac{1}{2}L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{1} \end{array}\right]$$

verificamos que $r(A) = 3$ e portanto o sistema é ***possível de determinado***.

Calculando então a ***solução única***,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2' := L_2 - L_3 \\ L_1' := L_1 - L_2}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

obtemos,
$$\begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = \frac{7}{2} \\ \alpha_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Portanto, a ***combinação linear*** pretendida tem a forma,

$$v = -v_1 + \frac{7}{2} v_2 - \frac{1}{2} v_3$$

- No espaço vectorial $P[x]$ dos ***polinómios com coeficientes reais***,

consideremos os vectores, $v_1 = 2\,x^3 + x - 3$

$v_2 = x^2 + 2$

Verifiquemos se o vector $v = 6\,x^3 - x^2 + 3\,x - 11$

é, ou não, ***combinação linear*** de v_1 e v_2 .

Vejamos então se ***existem*** $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tais que,

$$v = \alpha_1\, v_1 + \alpha_2\, v_2$$

$$\begin{aligned} 6\,x^3 - x^2 + 3\,x - 11 &= \alpha_1 (2\,x^3 + x - 3) + \alpha_2 (x^2 + 2) \\ &= 2\,\alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x - 3\,\alpha_1 + 2\,\alpha_2 \end{aligned}$$

e desta vez é mais simples, pois

basta igualar coeficientes de termos do mesmo grau,

$$\begin{cases} 2\,\alpha_1 = 6 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_1 = 3 \\ -3\,\alpha_1 + 2\,\alpha_2 = -11 \end{cases}$$

donde obtemos os valores dos ***coeficientes*** pretendidos,

$$\begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = -1 \end{cases}$$

e portanto,

$$v = 3\,v_1 - v_2$$

- Vejamos agora se o vector $v = (-1,\ 3,\ -1)$ de $\mathbb{R}^3$

  é ***combinação linear*** dos três vectores: $v_1 = (1,\ 0,\ 1)$

  $v_2 = (1,\ 1,\ 1)$

  $v_3 = (0,\ -1,\ 0)$

Ou seja, se ***existem*** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tais que,

$$v = \alpha_1\, v_1 + \alpha_2\, v_2 + \alpha_3\, v_3$$

isto é,

$$\begin{aligned}(-1,\ 3,\ -1) &= \alpha_1\,(1,\ 0,\ 1) + \alpha_2\,(1,\ 1,\ 1) + \alpha_3\,(0,\ -1,\ 0) \\ &= (\,\alpha_1 + \alpha_2\ ,\ \alpha_2 - \alpha_3\,,\ \alpha_1 + \alpha_2\,)\end{aligned}$$

Então, para que os coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ existam,

deverá ser ***possível*** o sistema,
$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = -1 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = -1 \end{cases}$$

Construindo a matriz ampliada e resolvendo,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3' := L_3 - L_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Neste caso verificamos que $r(A) = 2 < 3$, ou seja, que o sistema é ***possível e indeterminado***.

O facto do sistema ser ***possível***, assegura que ***existe combinação linear***, mas o facto de ser ***indeterminado*** mostra que a combinação linear ***não é única***.

A ***solução do sistema***,
$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = -1 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_1 = -4 + \alpha_3 \\ \alpha_2 = 3 + \alpha_3 \end{cases}$$

dá-nos a ***forma*** a que devem obedecer todas ***as possíveis combinações lineares***,

Assim, por exemplo ***arbitrando*** $\alpha_3 = 0$, teremos $\alpha_1 = -4$ e $\alpha_2 = 3$,

e a combinação linear,

$$(-1, 3, -1) = -4\,(1, 0, 1) + 3\,(1, 1, 1) + 0\,(0, -1, 0)$$

Ou, para $\alpha_3 = 1$, teremos $\alpha_1 = -5$ e $\alpha_2 = 4$ e a combinação linear,

$$(-1, 3, -1) = -5\,(1, 0, 1) + 4\,(1, 1, 1) + 1\,(0, -1, 0)$$

Ou ...

- ***Exercício***: No espaço vectorial $\mathbb{R}^3$, verifique se o vector $v = (-2, 2, 5)$ é ***combinação linear*** dos vectores: $v_1 = (1, 1, 1)$

  $v_2 = (1, 1, 0)$

  $v_3 = (1, 0, 1)$

- ***Exercício***: No espaço vectorial $M_{m \times n}(\mathbb{R})$, verifique se o vector $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

  é ***combinação linear*** dos vectores:

  $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

⁕ *Independência e Dependência Linear*

- Comecemos por notar que, em qualquer espaço vectorial E, o ***vector nulo*** 0_E é sempre ***combinação linear de quaisquer vectores*** $u_1, u_2, \ldots, u_k \in E$.

  Basta fazer,

  $$0_E = 0_{\mathbb{K}}\, u_1 + 0_{\mathbb{K}}\, u_2 + \ldots + 0_{\mathbb{K}}\, u_k$$

  ou seja, ***existe sempre uma combinação linear nula***.

- Esta combinação linear nula chama-se ***combinação linear nula trivial***.

- Mas será esta ***a única*** combinação linear nula?

- Por exemplo no espaço vectorial $\mathbb{R}^3$, se : $v_1 = (1,\ 1,\ 1)$

$$v_2 = (-2,\ -2,\ -2)$$

além da combinação nula ***trivial***,

$$(0,\ 0,\ 0) \ = \ 0\ v_1 + 0\ v_2$$

temos também a ***não trivial***,

$$(0,\ 0,\ 0) \ = \ 2\ v_1 + \ v_2$$

- Mas por exemplo para os vectores: $v_1 = (1,\ 1,\ 1)$

$$v_3 = (1,\ 0,\ 0)$$

procuremos α e β tais que,

$$(0,\ 0,\ 0) \ = \ \alpha\ v_1 + \ \beta\ v_3$$

$$= (\ \alpha + \beta\ ,\ \alpha\ ,\ \alpha\ )$$

Igualando, obtemos $\alpha + \beta = 0$ e $\alpha = 0$

donde concluímos, ***de forma única***, que $\alpha = 0$ e $\beta = 0$.

Portanto, neste caso, a combinação nula trivial é a ***única combinação nula***.

- Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Dizemos que os vectores $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_k \in E$ são:

(i) ***linearmente independentes*** se

$$\alpha_1\ u_1 + \alpha_2\ u_2 + \ldots + \alpha_k\ u_k \ = 0 \ \Rightarrow \ \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$$

*ou seja, **a única combinação linear nula é a trivial**.*

(ii) ***linearmente dependentes*** se

existem $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ ***não todos nulos*** tais que,

$$\beta_1\, u_1 + \beta_2\, u_2 + \ldots + \beta_k\, u_k = 0$$

ou seja,

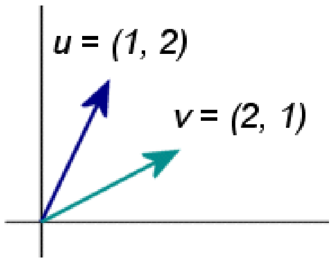
existem combinações lineares nulas, além da trivial.

- Por exemplo,

no ***espaço dos vectores livres do plano***,

consideremos os vectores, $u = (1, 2)$

$v = (2, 1)$



Procuremos escalares α e β tais que $\alpha\, u + \beta\, v = 0$,

ou seja, $\alpha\,(1, 2) + \beta\,(2, 1) = (0, 0)$

$(\alpha + 2\,\beta\,,\, 2\,\alpha + \beta) = (0, 0)$

o que conduz à resolução do sistema,

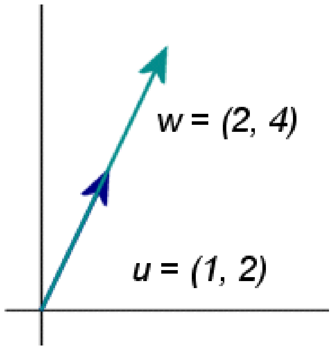
$$\begin{cases} \alpha + 2\,\beta = 0 \\ 2\,\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

que tem a ***solução única*** $\alpha = \beta = 0$.

Os vectores u e v são portanto ***linearmente independentes***.

Por outro lado para os vectores, $u = (1, 2)$

$w = (2, 4)$



existe obviamente a ***combinação linear nula não trivial***,

$$2u - w = 0$$

ou $$2(1, 2) - (2, 4) = (0, 0)$$

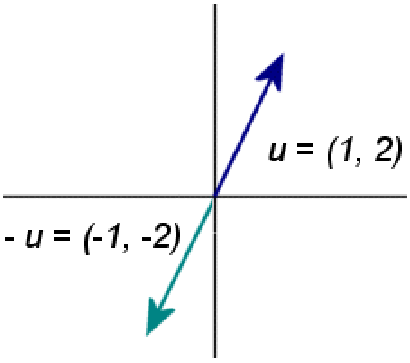
Os vectores u e w são portanto ***linearmente dependentes***.

Em termos geométricos, esta ***dependência linear*** é evidente pois os dois vectores são ***colineares***.

Note que o mesmo acontece, por exemplo,

para u e o seu vector simétrico,

$$-u = (-1, -2)$$



porque $u + (-u) = 0$

ou $(1, 2) + (-1, -2) = (0, 0)$

- Por exemplo no espaço vectorial $\mathbb{R}^3$, os vectores : $v_1 = (1, 1, 1)$

$v_2 = (1, 0, 1)$

$v_3 = (0, 0, 1)$

são ***linearmente independentes***.

Efectivamente, para $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que,

$$\alpha\, v_1 + \beta\, v_2 + \gamma\, v_3 = 0$$

$$\alpha\,(1,\ 1,\ 1) + \beta\,(1,\ 0,\ 1) + \gamma\,(0,\ 0,\ 1) = (0,\ 0,\ 0)$$

obtemos de forma única, $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$

- Por outro lado, os vectores: $v_1 = (1,\ 1,\ 1)$

  $v_2 = (1,\ 0,\ 1)$

  $v_3 = (2,\ 1,\ 2)$

são ***linearmente dependentes***.

Porque, sendo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que,

$$\alpha\, v_1 + \beta\, v_2 + \gamma\, v_3 = 0$$

$$\alpha\,(1,\ 1,\ 1) + \beta\,(1,\ 0,\ 1) + \gamma\,(2,\ 1,\ 2) = (0,\ 0,\ 0)$$

donde resulta o ***sistema***, $\begin{cases} \alpha + \beta + 2\,\gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + 2\,\gamma = 0 \end{cases}$

onde logo notamos duas linhas iguais ...

ou então, pela matriz ampliada,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2' := L_2 - L_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

obtemos, $\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = -\gamma \\ \beta = -\gamma \end{cases}$

Assim, para ***qualquer*** $\gamma \in \mathbb{R}$ temos,

$$(-\gamma)\ (1,\ 1,\ 1) + (-\gamma)\ (1,\ 0,\ 1) + \gamma\ (2,\ 1,\ 2) = (0,\ 0,\ 0)$$

por exemplo para $\gamma = 1$,

$$(-1)\ (1,\ 1,\ 1) + (-1)\ (1,\ 0,\ 1) + 1\ (2,\ 1,\ 2) = (0,\ 0,\ 0)$$

ou seja, uma ***combinação linear nula*** com ***escalares não nulos***.

- ***Exercício***: No espaço vectorial $\mathbb{R}^3$, verifique se os três vectores $(1,\ 1,\ 1)$, $(1,\ 1,\ 0)$ e $(1,\ 0,\ 1)$ são linearmente independentes ou dependentes.

- ***Exercício***: No espaço vectorial $P_3[x]$, verifique se os quatro vectores $1+x$, $x+x^2$, x^3 e $1+2x+x^3$ são linearmente independentes ou dependentes.

- ***Exercício***: No espaço vectorial das funções reais de variável real, verifique se os três vectores $f(x) = 1$, $g(x) = \cos^2 x$ e $h(x) = \mathrm{sen}^2\, x$ são linearmente independentes ou dependentes.

- As noções de independência e dependência lineares dizem respeito a um ***conjunto de vectores*** de um espaço E.

  E se o conjunto tiver apenas ***um elemento*** ?

  - Como vimos, para ***qualquer escalar*** α temos sempre $\alpha\ 0_E = 0_E$,

    ou seja, existem combinações lineares nulas não triviais.

    Podemos então dizer que o ***vector nulo*** é ***linearmente dependente***.

  - Por outro lado, para qualquer vector $v \in E$ tal que $v \neq 0_E$,

    a combinação linear $\alpha\ v = 0_E$, só pode ocorrer se $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$.

    Podemos então dizer que,

    todo o ***vector não nulo*** é ***linearmente independente***.

  - Portanto,

    O conjunto unitário $\{ v \}$ é ***linearmente independente*** se e só se $v \neq 0_E$.

    ou,

    O conjunto unitário $\{ v \}$ é ***linearmente dependente*** se e só se $v = 0_E$.

- Para conjuntos ***não unitários*** de vectores, temos a seguinte ...

- ***Proposição***:

  Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$.

  Os vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k \in E$, com $k > 1$,

  são ***linearmente dependentes*** *se e só se*

  pelo menos um deles é combinação linear dos restantes.

Demonstração: $(\Rightarrow)$

Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_k \in E$ linearmente dependentes.

Então existem $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ ***não todos nulos*** tais que,

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_k v_k = 0_E$$

Sem perda de generalidade, seja $\beta_1 \neq 0_{\mathbb{K}}$. Então,

$$\beta_1 v_1 = -\beta_2 v_2 - \ldots - \beta_k v_k$$

e como existe o inverso em $\mathbb{K}$,

$$v_1 = -(\beta_1)^{-1} \beta_2 v_2 - \ldots - (\beta_1)^{-1} \beta_k v_k$$

e portanto v_1 é combinação linear dos restantes.

$(\Leftarrow)$

Suponhamos que um deles é combinação linear dos restantes.

Sem perda de generalidade, seja ele v_1.

Então existem $\alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ tais que,

$$v_1 = \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k$$

o que nos permite escrever,

$$1_{\mathbb{K}} v_1 - \alpha_2 v_2 - \ldots - \alpha_k v_k = 0_E$$

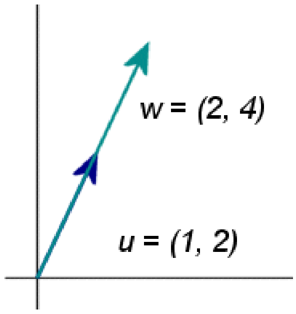
o que mostra que os vectores são linearmente dependentes

pois, pelo menos $1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$.

- No exemplo do ***espaço dos vectores livres do plano***,

  para os dois vectores ***linearmente dependentes***,

$$u = (1, 2)$$
$$w = (2, 4)$$



é obvio que $w = 2\,u$.

- ***Proposição***: Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$.

  Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_k \in E$ ***linearmente independentes***

  e seja $w \in E$ tal que,

  $v_1, v_2, \ldots, v_k$, w são ***linearmente dependentes***

  Então w é ***combinação linear*** de $v_1, v_2, \ldots, v_k$.

Demonstração: Se $v_1, v_2, \ldots, v_k$, w são linearmente ***dependentes***,

então existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1} \in \mathbb{K}$

não todos nulos, tais que,

$$\alpha_1\, v_1 + \alpha_2\, v_2 + \ldots + \alpha_k\, v_k + \alpha_{k+1}\, w = 0_E$$

Por absurdo, suponhamos que $\alpha_{k+1} = 0_{\mathbb{K}}$

e nesse caso,

$$\alpha_1\, v_1 + \alpha_2\, v_2 + \ldots + \alpha_k\, v_k = 0_E$$

Mas como $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são linearmente ***independentes***, então,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0_{\mathbb{K}}$$

Assim, teríamos a situação de,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = \alpha_{k+1} = 0_{\mathbb{K}}$$

o que iria contrariar a hipótese de $v_1, v_2, \ldots, v_k, w$ serem ***dependentes***.

Portanto terá de ser $\alpha_{k+1} \neq 0_{\mathbb{K}}$.

Mas sendo não nulo, α_{k+1} tem elemento ***inverso*** $(\alpha_{k+1})^{-1}$ e podemos escrever,

$$w = -(\alpha_{k+1})^{-1}\ \alpha_1\ v_1 - (\alpha_{k+1})^{-1}\ \alpha_2\ v_2 - \ldots - (\alpha_{k+1})^{-1}\ \alpha_k\ v_k$$

ou seja, w como ***combinação linear*** de $v_1, v_2, \ldots, v_k$.

- ***Exercício***: Verifique que as duas matrizes,

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

são ***linearmente independentes***

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

mas, com $C = A - B$,

verifique que as três matrizes são ***linearmente dependentes***.

- ***Proposição***: Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$.

  Se $v_1, v_2, \ldots, v_k \in E$ são ***linearmente dependentes***

  então, para qualquer sobreconjunto,

  $v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_{k+p}$

  são também são ***linearmente dependentes*** .

Demonstração: Se $v_1, v_2, \ldots, v_k$, são linearmente ***dependentes***,

então existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$

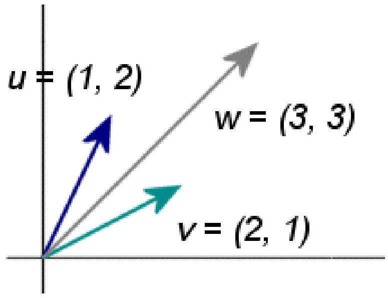
não todos nulos, tais que,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k = 0_E$$

Mas nesse caso, também podemos construir a combinação,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k + 0_{\mathbb{K}} v_{k+1} + \ldots + 0_{\mathbb{K}} v_{k+p} = 0_E$$

onde ***nem todos os escalares são nulos***.



- No ***espaço dos vectores livres do plano***,

  com os vectores, $u = (1, 2)$

  $v = (2, 1)$

  e $w = u + v = (3, 3)$

O conjunto de vectores $\{u, v\}$ é linearmente ***independente***,

mas $\{u, v, w\}$ é linearmente ***dependente***

e $\{u, v, w, x\}$ é linearmente ***dependente***

para ***qualquer*** vector x do espaço.

- Das proposições anteriores podemos também concluir que:

  - Qualquer ***subconjunto*** de um conjunto de vectores ***linearmente independentes*** é ainda ***linearmente independente***.
  - Qualquer conjunto de vectores que inclua o ***vector nulo*** é ***linearmente dependente.***
  - Qualquer conjunto de vectores que inclua dois ***vectores iguais*** é ***linearmente dependente***.
  - ...

⁕ Subespaço Gerado por Vectores

- Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam $v_1, v_2, \ldots, v_k \in E$.

  O conjunto de todos os ***vectores que são combinações lineares destes***,

  $$G = \{ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k \;:\; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K} \}$$

  é um ***subespaço vectorial*** de E,

  chamado ***subespaço gerado pelo conjunto de vectores*** $v_1, v_2, \ldots, v_k$.

- G é efectivamente um ***subespaço vectorial*** de E, porque:

  (i) $0_E \in G$

  pois $0_E = 0_{\mathbb{K}} v_1 + \ldots + 0_{\mathbb{K}} v_k$

  (ii) $\forall\, x, y \in G \Rightarrow x + y \in G$

  pois, se $x, y \in G$

então, $\exists\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}\ :\ x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2\ v_2 + \ \ldots + \lambda_k\ v_k$

$\exists\ \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k \in \mathbb{K}\ :\ y = \gamma_1 v_1 + \gamma_2\ v_2 + \ \ldots + \gamma_k\ v_k$

e a soma,

$$\begin{aligned} x + y &= (\lambda_1 v_1 + \lambda_2\ v_2 + \ \ldots + \lambda_k\ v_k) \\ &\quad + (\gamma_1 v_1 + \gamma_2\ v_2 + \ \ldots + \gamma_k\ v_k) \\ &= (\lambda_1 + \gamma_1)\ v_1 + (\lambda_2 + \gamma_2)\ v_2 + \ldots + (\lambda_k + \gamma_k)\ v_k \end{aligned}$$

onde os $(\lambda_i + \gamma_i)$ são também elementos de $\mathbb{K}$.

(iii) $\forall\ \alpha \in \mathbb{K},\ \forall\ x \in G \Rightarrow \alpha\ x \in G$

O que é também simples verificar ...

- Representamos por $\langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ o ***subespaço gerado*** pelos ***vectores geradores*** $v_1, v_2, \ldots, v_k$.

- Por exemplo no espaço vectorial $\mathbb{R}^3$, determinemos $\langle (1, 1, 1), (1, 0, 1) \rangle$ o ***subespaço gerado*** pelos vectores : $v_1 = (1, 1, 1)$
$v_2 = (1, 0, 1)$

Para que um vector $(x, y, z) \in \langle (1, 1, 1), (1, 0, 1) \rangle$ terá de ser uma ***combinação linear*** de $(1, 1, 1)$ e $(1, 0, 1)$

ou seja, terão de existir $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tais que,

$$(x, y, z) = \alpha\,(1, 1, 1) + \beta\,(1, 0, 1)$$

portanto, se e só se for ***possível*** o sistema,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \alpha = y \\ \alpha + \beta = z \end{cases}$$

que resolvendo,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 1 & 1 & z \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2' := -L_2 - L_1 \\ L_3' := -L_3 - L_1}]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & y - x \\ 0 & 0 & z - x \end{array}\right]$$

verificamos que será ***possível*** se e só se $x = z$.

Portanto o subespaço ***existe*** e é formado pelos vectores cuja primeira e terceira componentes são iguais, isto é,

$$\langle\, (1, 1, 1), (1, 0, 1) \,\rangle = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z \,\}$$

- Por exemplo no espaço vectorial $\mathbb{R}^2$, determinemos $\langle\, (0, 1), (0, 2) \,\rangle$

  o ***subespaço gerado*** pelos vectores : $v_1 = (0, 1)$

  $v_2 = (0, 2)$

Para um vector ***qualquer*** (x, y) procuremos $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tais que,

$$(x, y) = \alpha\,(0, 1) + \beta\,(0, 2)$$

ou seja, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tais que, $\begin{cases} 0 = x \\ \alpha + 2\beta = y \end{cases}$

sistema que tem por matriz ampliada,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & y \\ 0 & 0 & x \end{array}\right]$$

e portanto é ***possível*** se e só se $x = 0$.

Portanto o subespaço ***existe*** e é formado por todos os vectores cuja primeira componente é nula, isto é,

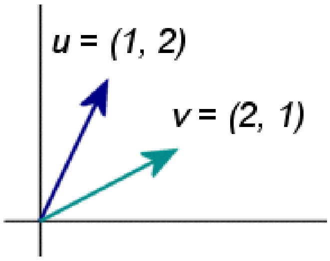
$$\langle\, (0, 1), (0, 2) \,\rangle = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \,\}$$

- No ***espaço dos vectores livres do plano*** (ou em $\mathbb{R}^2$)

  determinemos $\langle\, (1, 2), (2, 1) \,\rangle$

  o ***subespaço gerado*** pelos vectores : $u = (1, 2)$

  $v = (2, 1)$



Para que um vector $(x, y) \in \langle\, (1, 2), (2, 1) \,\rangle$

terão de existir $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tais que,

$$\begin{aligned} (x, y) &= \alpha\,(1, 2) + \beta\,(2, 1) \\ &= (\alpha + 2\beta,\ 2\alpha + \beta) \end{aligned}$$

o que conduz à resolução do sistema, $\begin{cases} \alpha + 2\beta = x \\ 2\alpha + \beta = y \end{cases}$

que é ***possível e determinado***, sendo a ***solução única*** dada por,

$$\begin{cases} \alpha = (2y - x)/3 \\ \beta = (2x - y)/3 \end{cases}$$

Assim, para ***qualquer vector*** $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é possível determinar,

de ***forma única***, a respectiva combinação linear de $(1, 2)$ e $(2, 1)$.

Por exemplo para o vector $(x, y) = (5, 6)$

$$(5, 6) = (12 - 5)/3\ (1, 2) + (10 - 6)/3\ (2, 1)$$

obtemos a combinação,

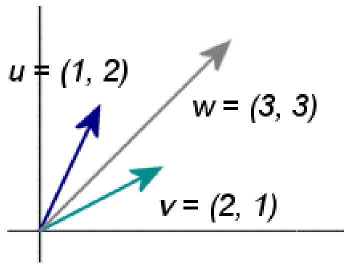
$$= 7/3\ (1, 2) + 4/3\ (2, 1)$$

que naturalmente,

$$= (7/3\ ,\ 14/3) + (8/3\ ,\ 4/3)$$

$$= (15/3\ ,\ 18/3) = (5\ ,\ 6)$$

E recordando o vector $(x, y) = (3, 3)$



obtemos a combinação, $(3, 3) = (6 - 3)/3\ (1, 2) + (6 - 3)/3\ (2, 1)$

$$= (1, 2) + (2, 1)$$

Assim, ***todo o vector*** $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito, de ***forma única***,

como combinação linear de $(1, 2)$ e $(2, 1)$.

Portanto o ***subespaço*** $\langle (1, 2), (2, 1) \rangle$ é ***todo o espaço vectorial*** $\mathbb{R}^2$.

✱ Conjuntos de Geradores

- Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam $v_1, v_2, \ldots, v_k \in E$.

  Se todo o vector de E se escreve como combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_k$, dizemos que os vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são ***geradores de*** E,

  ou que $v_1, v_2, \ldots, v_k$ ***geram*** E,

  ou que $v_1, v_2, \ldots, v_k$ ***formam um sistema de geradores de*** E,

  e escrevemos,

$$E = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$$

- Por exemplo no espaço vectorial $\mathbb{R}^2$, consideremos os vectores $u = (1, 1)$

  $v = (0, 1)$

  Para um vector qualquer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ procuremos os escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tais que,

$$\begin{aligned} (a, b) &= \alpha\,(1, 1) + \beta\,(0, 1) \\ &= (\alpha, \alpha) + (0, \beta) \\ &= (\alpha, \alpha + \beta) \end{aligned}$$

  o que conduz à resolução do sistema, $\begin{cases} \alpha = a \\ \alpha + \beta = b \end{cases}$

  com matriz ampliada,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & b \end{array}\right] \xrightarrow[L_2' := L_2 - L_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b-a \end{array}\right]$$

Sendo portanto um sistema ***possível e determinado***, para todo o (a, b), isso significa que ***todo o vector*** $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito como ***combinação linear*** dos vectores $(1, 1)$ e $(0, 1)$.

Para um dado (a, b), a respectiva combinação linear é dada por,

$$(a, b) = a\,(1, 1) + (b - a)\,(0, 1)$$

Por exemplo, $(13, 15) = 13\,(1, 1) + 2\,(0, 1)$

Portanto, os vectores $(1, 1)$ e $(0, 1)$ são ***geradores de*** $\mathbb{R}^2$ e $\langle (1, 1), (0, 1) \rangle = \mathbb{R}^2$

- Um espaço vectorial não nulo tem uma ***infinidade de sistemas de geradores***. Por exemplo, mostre que também,

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &= \langle (1, 0), (0, 1) \rangle \\ &= \langle (1, 2), (2, 3), (3, 4) \rangle \\ &= \langle (0, 0), (2, 3), (3, 4), (0, 1) \rangle \end{aligned}$$

- Um espaço vectorial E diz-se ***finitamente gerado*** se existe um ***número finito de vectores*** $u_1, u_2, \ldots, u_k \in E$ ***que geram*** E, ou seja, tais que,

$$E = \langle u_1, u_2, \ldots, u_k \rangle$$

- Por exemplo, o espaço vectorial $\mathbb{R}^2$ é finitamente gerado.

- E como qualquer subespaço vectorial é também um espaço vectorial, a noção de ***finitamente gerado*** também se aplica a ***subespaços vectoriais***.

- Consideremos por exemplo o conjunto $F \subseteq \mathbb{R}^4$ definido por,

$$F = \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \ x + y + z + w = 0 \}$$

Em primeiro verifiquemos que $F \leq \mathbb{R}^4$, ou seja, que F ***é subespaço vectorial***:

(i) $(0, 0, 0, 0) \in F$

(ii) a soma de dois vectores de F pertence a F

(iii) o produto de um escalar por um vector de F pertence a F

Procuremos agora um ***conjunto finito de geradores*** de F.

A partir da relação existente entre as componentes de qualquer vector $(x, y, z, w) \in F$, podemos explicitar, $x = -y - z - w$ e verificar que ***todo o vector*** de F tem a forma,

$$(-y - z - w, y, z, w)$$

o que nos sugere que pode ser escrito como a ***soma de três***, por exemplo,

$$\begin{aligned}(-y - z - w, y, z, w) = \ & (-y, y, 0, 0) \\ & + (-z, 0, z, 0) \\ & + (-w, 0, 0, w)\end{aligned}$$

ou seja, como a ***combinação linear***,

$$\begin{aligned}(-y - z - w, y, z, w) = \ & y\,(-1, 1, 0, 0) \\ & + z\,(-1, 0, 1, 0) \\ & + w\,(-1, 0, 0, 1)\end{aligned}$$

Portanto, encontrámos ***três vectores*** de $\mathbb{R}^4$ que ***geram o subespaço*** F, ou seja,

$$F = \langle\, (-1,\ 1,\ 0,\ 0),\ (-1,\ 0,\ 1,\ 0),\ (-1,\ 0,\ 0,\ 1)\, \rangle$$

e assim mostrámos que F é um ***subespaço finitamente gerado*** de $\mathbb{R}^4$.

- É simples verificar que o conjunto das ***quatro matrizes***,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gera todas as matrizes quadradas de ordem 2,

pelo que o espaço vectorial $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ é ***finitamente gerado***.

✱ *Base e Dimensão*

- Seja E um espaço vectorial ***finitamente gerado***. Dizemos que um subconjunto $\mathcal{B} = \{\, e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n \,\} \subseteq E$ é uma ***base de*** E se,

  (i) $\mathcal{B}$ é um conjunto de vectores ***linearmente independentes***

  (ii) $\mathcal{B}$ é um conjunto de vectores ***geradores*** de E,

  isto é, $E = \langle\, e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n \,\rangle$

- Quando o conjunto $\{\, e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n \,\}$ dos elementos de uma base $\mathcal{B}$ tem uma ***ordem específica***, dizemos que $\mathcal{B}$ é uma ***base ordenada*** e representamos por,

$$\mathcal{B} = (\, e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n \,)$$

- ***Por convenção***, o ***espaço trivial*** $\{\, 0_E \,\}$ tem como única base o ***conjunto vazio*** $\emptyset$. Note que, neste espaço não existem vectores linearmente independentes, mas é finitamente gerado pois $\{\, 0_E \,\} = \langle\, 0_E \,\rangle$.

- No espaço vectorial $\mathbb{R}^3$, mostremos que é uma ***base*** o conjunto,

$$\mathcal{B} = \{\, (1,\ 1,\ 1),\ (1,\ 0,\ 1),\ \ (1,\ 2,\ 0)\,\}$$

(ii) Comecemos por verificar se o conjunto de vectores ***gera*** $\mathbb{R}^3$.

Para que tal aconteça é necessário que, para ***qualquer vector*** $(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3$ existam os escalares $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ tais que,

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z) &= \alpha\,(1,\ 1,\ 1) + \beta\,(1,\ 0,\ 1) + \gamma\,(1,\ 2,\ 0)\\ &= (\alpha,\ \alpha,\ \alpha) + (\beta,\ 0,\ \beta) + (\gamma,\ 2\,\gamma,\ 0)\\ &= (\alpha + \beta + \gamma\ ,\ \alpha + 2\,\gamma\ ,\ \alpha + \beta)\end{aligned}$$

o que conduz à resolução do sistema,
$$\begin{cases}\alpha + \beta + \gamma = x\\ \alpha + 2\,\gamma = y\\ \alpha + \beta = z\end{cases}$$

cuja matriz ampliada,

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & x\\ 1 & 0 & 2 & y\\ 1 & 1 & 0 & z\end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2' := L_2 - L_1\\ L_3' := L_3 - L_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & x\\ 0 & -1 & 1 & y - x\\ 0 & 0 & -1 & z - x\end{array}\right]$$

Sendo portanto um sistema ***possível e determinado***, isso significa que ***qualquer vector*** $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pode ser escrito como ***combinação linear*** dos vectores $(1, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ e $(1, 2, 0)$.

E assim provámos que estes vectores ***geram o espaço*** $\mathbb{R}^3$.

(i) Mostremos agora que os vectores $(1, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ e $(1, 2, 0)$ são ***linearmente independentes***.

Para isso, é necessário provar que ***são nulos*** os únicos escalares $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ que formam a ***combinação linear nula***,

$$\alpha\,(1, 1, 1) + \beta\,(1, 0, 1) + \gamma\,(1, 2, 0) = (0, 0, 0)$$

Mas esta igualdade conduz à resolução do sistema, $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$

que é o ***sistema homogéneo associado*** ao anterior.

Então este sistema também é ***possível e determinado***,

tendo apenas a ***solução trivial***, $\alpha = \beta = \gamma = 0$

e portanto os três vectores ***são linearmente independentes***.

Como são ***linearmente independentes*** e ***geram*** o espaço vectorial $\mathbb{R}^3$, podemos concluir que o conjunto,

$$\mathcal{B} = \{\, (1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 2, 0)\, \}$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$.