➡ Exercícios sobre as propriedades do determinante

Sejam $A, B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, tais que $|A| = -2$ e $|B| = ¼$.

Determine:

- $| \, 3 \, A \, | = ?$

  Como A é uma matriz quadrada de ordem 3, pela propriedade do determinante do produto de uma matriz por um escalar,

  $| \, 3 \, A \, | = 3^n \, |A| = 3^3 \, |A| = 27 \, (-2) = -54$

- $| \, A \, B^{-1} \, A^{\mathrm{T}} \, | = ?$

  Pela propriedade do determinante do produto de matrizes,

  $| \, A \, B^{-1} \, A^{\mathrm{T}} \, | = |A| \, |B^{-1}| \, |A^{\mathrm{T}}|$

  e pelas propriedades do determinante da inversa e da transposta,

  $|A| \, |B^{-1}| \, |A^{\mathrm{T}}| = |A| \, |B|^{-1} \, |A| = (-2) \, (4) \, (-2) = 16$

- $| - B \, | = ?$

  Como B é uma matriz quadrada de ordem 3, pela propriedade do determinante do produto de uma matriz por um escalar,

  $| - B \, | = (-1 \,)^3 \, |B| = -\, ¼$

- $| \, B^{-1} \, A^4 \, B \, | = ?$

  Pela propriedade do determinante do produto de matrizes,

  $| \, B^{-1} \, A^4 \, B \, | = | \, B^{-1}| \, |A^4| \, |B|$

  e pelas propriedades do determinante da inversa e da potência,

  $| \, B^{-1}| \, |A^4| \, |B| = (4) \, (-2)^4 \, (¼) = 16$

- $|-\frac{1}{2}\,(B^T)^{-1}| = ?$

$$
\begin{aligned}
|-\tfrac{1}{2}\,(B^T)^{-1}| &= |-\tfrac{1}{2}\,(B^T)^{-1}| \\
&= (-\tfrac{1}{2})^3 \; |(B^T)^{-1}| \\
&= (-1/8)\; |B^T|^{-1} \\
&= (-1/8)\; |B|^{-1} \\
&= (-1/8)\,(4) = -\tfrac{1}{2}
\end{aligned}
$$

- Sabendo que, $\begin{vmatrix} 2a_1 & a_2+a_3 & -a_3 \\ 2c_1 & c_2+c_3 & -c_3 \\ 2b_1 & b_2+b_3 & -b_3 \end{vmatrix} = 10$

calcule, $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

Começamos por notar que a segunda coluna da matriz dada pode ser decomposta na soma de duas colunas, portanto pela propriedade 9,

$$\begin{vmatrix} 2a_1 & a_2+a_3 & -a_3 \\ 2c_1 & c_2+c_3 & -c_3 \\ 2b_1 & b_2+b_3 & -b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a_1 & a_2 & -a_3 \\ 2c_1 & c_2 & -c_3 \\ 2b_1 & b_2 & -b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a_1 & a_3 & -a_3 \\ 2c_1 & c_3 & -c_3 \\ 2b_1 & b_3 & -b_3 \end{vmatrix}$$

onde a segunda matriz tem duas colunas proporcionais e portanto o seu determinante é nulo,

$$= \ 2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & -a_3 \\ c_1 & c_2 & -c_3 \\ b_1 & b_2 & -b_3 \end{vmatrix} + 0$$

onde, multiplicando a terceira coluna pelo escalar -1,

$$= \ -2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

e trocando a segunda com a terceira linha e o respectivo sinal do determinante,

$$= \ 2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Assim, o determinante dado é o dobro do determinante pedido,

e portanto,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 5$$

- Sabendo que, $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 2$$

  calcule, $$\begin{vmatrix} a_1 & 2b_1 & 4c_1 + a_1 \\ a_2 & 2b_2 & 4c_2 + a_2 \\ a_3 & 2b_3 & 4c_3 + a_3 \end{vmatrix}$$

✱ Condições de Invertibilidade

- O teorema seguinte relaciona os conceitos fundamentais que temos vindo a estudar: ***matriz***, ***sistema*** de equações lineares, matriz ***inversa*** e ***determinante***.

- Este teorema permite-nos ***relacionar as questões*** mais importantes associadas a esses conceitos: ***A matriz tem inversa?*** ***O sistema tem solução única?***

- ***Teorema***: Seja A uma matriz quadrada de ordem n.

  As ***cinco condições*** seguintes ***são equivalentes***:

  a) A é ***invertível***.

  b) O sistema $A\,X = 0_{n\times 1}$ tem ***apenas a solução trivial***.

  c) A característica $r(A) = n$ e a matriz A pode ser reduzida à matriz I_n por operações elementares sobre linhas.

  d) O sistema $A\,X = B$ é ***possível e determinado***, para qualquer matriz B do tipo $n\times 1$.

  e) Existe uma matriz quadrada C de ordem n tal que $A\,C = I_n$.

Para ***demonstrar*** a equivalência das cinco questões,

basta mostrar que:

a) $\Rightarrow$ **b)** $\Rightarrow$ **c)** $\Rightarrow$ **d)** $\Rightarrow$ **e)** $\Rightarrow$ **a)**

Provemos que **a)** $\Rightarrow$ **b)**

ou seja, se A é invertível

então o sistema homogéneo só tem a solução trivial

Se A é invertível, então existe A^{-1}.

Tomemos uma solução qualquer $X_1 \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$,

do sistema homogéneo $A\,X = 0_{n\times 1}$.

Se X_1 é solução, então $A\,X_1 = 0_{n\times 1}$

Multiplicando à esquerda por A^{-1},

$$A^{-1}\,(\,A\,X_1\,) = A^{-1}\,0_{n\times 1}$$

$$(\,A^{-1}\,A\,)\,X_1 = A^{-1}\,0_{n\times 1}$$

$$I_n\,X_1 = A^{-1}\,0_{n\times 1}$$

$$I_n\,X_1 = 0_{n\times 1}$$

$$X_1 = 0_{n\times 1}$$

Portanto, a solução X_1 arbitrária é a ***solução trivial***.

Provemos que **b)** $\Rightarrow$ **c)**

ou seja, se o sistema homogéneo só tem a solução trivial

então $r(A) = n$ e a matriz A pode ser reduzida à matriz I_n por operações elementares sobre linhas.

Se o sistema $A\,X = 0_{n\times 1}$ só tem a solução trivial,

então é ***possível e determinado***.

Portanto $r(\,[\,A\mid 0\,]\,) = r(A) = n$ e, pelo algoritmo de

Gauss-Jordan, a matriz A pode ser reduzida à matriz I_n

por operações elementares sobre linhas.

As demonstrações das restantes implicações são igualmente simples ...

- O teorema seguinte relaciona a ***questão da invertibilidade*** com o valor do ***determinante***.

- ***Teorema***: Uma matriz quadrada A é ***invertível*** se e só se $|A| \neq 0$.

Demonstração: $(\Rightarrow)$

Se A é invertível, então existe A^{-1}

tal que, $A\,A^{-1} = I_n$

aplicando determinantes, $|A\,A^{-1}| = |I_n|$

e aplicando regras, $|A|\,|A^{-1}| = |I_n| = 1$

Se, por absurdo, acontecesse que $|A| = 0$

então teríamos $0 = 1$

$(\Leftarrow)$

Neste caso, esta demonstração é bem mais complicada ...

- ***Exercício***: Na matriz, $A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 1 & 0 \\ \alpha & -2 & -\alpha & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha^2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

determine os valores de α para os quais a matriz é ***invertível***.

Calculemos o determinante de A,

desenvolvendo ao longo da quarta coluna,

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & 1 & 0 \\ \alpha & -2 & -\alpha & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha^2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -\alpha^2 & -2 \end{vmatrix}$$

e desenvolvendo ao longo da primeira coluna,

$$\begin{aligned} &= (-1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha^2 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (-2\alpha + \alpha^2) \\ &= \alpha(\alpha - 2) \end{aligned}$$

Então, pelo teorema anterior, a matriz é ***invertível se e só se***, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$

- ***Exercício***: Na matriz, $A = \begin{bmatrix} \beta & 6 & 1 \\ 0 & \beta - 1 & 1 \\ 0 & 1 & \beta + 5 \end{bmatrix}$

  determine os valores de β para os quais

  o sistema homogéneo $A\,X = 0_{3\times 1}$.

  admite ***apenas a solução trivial***.

⁕ *A Matriz Adjunta no cálculo da Matriz Inversa*

- Para uma matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ chama-se ***matriz dos complementos algébricos de*** A, ou ***matriz complementar de*** A, à matriz cujos elementos A_{ij} são os complementos algébricos dos elementos a_{ij} de A.

$$\hat{A} = [A_{ij}]$$

- Para uma matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ chama-se ***matriz adjunta de*** A, e representa-se por $adj\ A$, à transposta da matriz dos complementos algébricos de A.

$$\boxed{\operatorname{ajd} A = \left(\hat{A}\right)^T}$$

- Por exemplo para a matriz, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

temos a ***matriz dos complementos algébricos***,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 & -8 \\ -5 & -7 & 4 \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

e a ***matriz adjunta***,

$$\operatorname{adj} A = (\hat{A})^T = \begin{bmatrix} 10 & -5 & -4 \\ 8 & -7 & -2 \\ -8 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

- Para a matriz, $A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

  verifique que *adj A* = *A* .

- ***Teorema***: Para uma matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$,

$$\boxed{A\,(adj\,A) = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix} = |A|\; I_n}$$

Além disso, se A for ***invertível*** então,

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, adj\, A}$$

- Por exemplo para a matriz, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ *(página 38)*

  como $|A| = -6$ temos,

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 10 & -5 & -4 \\ 8 & -7 & -2 \\ -8 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{5}{6} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{7}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

⁕ Sistemas de Cramer

- Sejam $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$.

  Dizemos que o sistema de equações lineares $A\,X = B$ é um ***sistema de Cramer*** se a matriz A é ***invertível***.

- Note-se que, em $A\,X = B$

  se A^{-1} existe, podemos multiplicar à esquerda, $A^{-1}\,(A\,X) = A^{-1}\,B$

  e obter $X = A^{-1}\,B$

  Ou seja, um sistema de Cramer é ***sempre possível e determinado*** e a sua única solução pode ser simplesmente calculada pelo ***produto*** $X = A^{-1}\,B$.

- ***Teorema***: Sejam $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ matrizes tais que, o sistema de equações $A\,X = B$ é um ***sistema de Cramer***.

  Para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, seja A_j a matriz que se obtém de A substituindo a coluna j pela matriz coluna B.

  Então, a ***solução única*** do sistema $A\,X = B$ é o *n-uplo* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ onde,

  $$\alpha_j = \frac{|A_j|}{|A|}$$ para todo o $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

- Por exemplo o sistema $AX = B$ onde,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Começamos por calcular o determinante e verificamos que $|A| = -2$.

Como o ***determinante é não nulo***, a matriz A é ***invertível*** e o sistema é um ***sistema de Cramer***.

Então, pelo teorema anterior, a ***solução única*** é o terno (x, y, z) calculado por,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-2} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{-2} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-2} = 0$$

portanto a solução é $(1, -1, 0)$.

- Mostre que o sistema $AX = B$ é um sistema de Cramer e calcule a solução pela Regra de Cramer, com,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- A tabela seguinte compara os ***tempos*** necessários à resolução

  de um sistema de equações lineares de dimensão nxn,

  num supercomputador Cray J90,

  utilizando o ***Método de Eliminação de Gauss*** ou a ***Regra de Cramer***,

n	***Eliminação de Gauss***	***Regra de Cramer***
2	6×10^{-12} seg	6×10^{-12} seg
3	1.7×10^{-11} seg	2.4×10^{-11} seg
4	3.6×10^{-11} seg	1.2×10^{-10} seg
5	6.5×10^{-11} seg	7.2×10^{-10} seg
6	1.06×10^{-11} seg	5.04×10^{-09} seg
10	4.3×10^{-10} seg	3.99168×10^{-05} seg
20	3.06×10^{-9} seg	1.622 anos
100	3.433×10^{-7} seg	2.9889×10^{138} séculos
1000	3.3433×10^{-4} seg	