

departamento de matemática



universidade de aveiro

1. Considere a aplicação linear φ de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$ tal que

$$\varphi(1, 0) = (1, 0, 0) \quad \text{e} \quad \varphi(0, 1) = (2, 1, -1).$$

Determine:

- (a) a matriz de φ em relação às bases canónicas dos espaços considerados;
- (b) a matriz de φ em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$ e à base

$$\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3)) \text{ de } \mathbb{R}^3,$$

usando a alínea anterior;

- (c) as coordenadas de $\varphi(1, 3)$ na base $\mathcal{B}$, definida na alínea anterior;
 - (d) $\varphi(x, y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Considere o endomorfismo φ de $\mathbb{R}^3$ cuja matriz, em relação à base canónica do espaço considerado, é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Calcule $\varphi(0, 1, 3)$.
 - (b) Determine o núcleo de φ e uma sua base.
 - (c) Indique a característica φ , sem calcular $\text{Im } \varphi$.
3. Considere a aplicação linear φ de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{R}^3$ definida, em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ e de $\mathbb{R}^3$, pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine bases para $\text{Im } \varphi$ e para $\text{Nuc } \varphi$.
- (b) Escreva a matriz de φ em relação à base

$$\mathcal{B} = ((1, -1, 1, 0), (0, 1, -1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1))$$

de $\mathbb{R}^4$ e à base $\mathcal{B}' = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ de $\mathbb{R}^3$.

- (c) Calcule $\varphi^{-1}(\langle(1, 1, 1)\rangle)$.

4. Considere a aplicação linear φ de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^4$ definida, em relação às bases canónicas dos espaços considerados, pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Calcule $\varphi^{-1}(\{(0, 1, 1, 2)\})$.
- (b) Determine o núcleo de φ . Diga se φ é ou não um monomorfismo.
- (c) Indique um subespaço complementar de $\text{Im } \varphi$.
5. Considere a aplicação linear φ de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$ definida, em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ e à base $\mathcal{B} = ((1, 1), (-1, 1))$ de $\mathbb{R}^2$, pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine:

- (a) o núcleo e a nulidade de φ ;
- (b) $\varphi(x, y, z)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
6. Considere a aplicação linear φ de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^5$ definida, em relação à base

$$\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$$

de $\mathbb{R}^3$ e à base canónica de $\mathbb{R}^5$, pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja ainda $F = \langle (1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 0) \rangle$.

- (a) Escreva a matriz de φ em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ e à base

$$\mathcal{B}' = ((1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 0))$$

de $\mathbb{R}^5$.

- (b) Calcule $\varphi^{-1}(F)$.
- (c) Diga se φ é um monomorfismo ou um epimorfismo.

7. Considere o endomorfismo φ de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ definido por:

$$\varphi \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a-b & a+b-c \\ b+c-d & 2a+b-d \end{bmatrix}, \quad \forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

- (a) Determine $\text{Nuc } \varphi$ e $\text{Im } \varphi$.
- (b) Diga se φ é ou não um automorfismo.
- (c) Escreva a matriz de φ em relação à base de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

- (d) Escreva a matriz de φ em relação à base

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, usando a alínea anterior.

- (e) Calcule $\varphi^{-1} \left(\left\langle \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \right)$.

8. Considere o endomorfismo φ de $\mathbb{R}^2$ tal que $\varphi(1, 2) = (2, -2)$ e

$$\text{Nuc } \varphi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\}.$$

Determine:

- (a) $\varphi(0, 1)$ e $\varphi(1, 1)$;
- (b) a matriz de φ em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$.

9. Seja E um espaço vectorial real tal que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ uma sua base. Considere o endomorfismo φ de E tal que:

$$\varphi(e_1) = 2e_1 + 3e_2, \quad \varphi(e_2) = -e_1 + e_2 \quad \text{e} \quad \varphi(e_3) = 2e_2 + 3e_3.$$

- (a) Determine a matriz de φ em relação à base $\mathcal{B}$.
- (b) Considere os vectores $u_1 = e_1 - e_2$, $u_2 = 2e_3$ e $u_3 = e_2 + e_3$.
 - i. Prove que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ é uma base de E .
 - ii. Escreva a matriz de mudança de base $M(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.
 - iii. Utilizando a alínea anterior, determine a matriz de φ em relação à base $\mathcal{B}'$.
 - iv. Determine as coordenadas do vector $\varphi(v)$ na base $\mathcal{B}'$, onde $v = (2, -1, 0)_{\mathcal{B}}$.

10. Considere o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ y + 2z = b \\ -x + z = c \end{cases}$$

- (a) Determine a relação entre os valores de a , b e c para os quais o sistema é possível.
- (b) Supondo que o sistema é possível, determine o conjunto solução e indique o grau de indeterminação.
- (c) Seja φ o endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuja matriz em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é a matriz dos coeficientes do sistema dado. Utilizando as alíneas anteriores, indique:
 - i. $\text{Im } \varphi$;
 - ii. $\text{Nuc } \varphi$;
 - iii. $\varphi^{-1}(\{(1, 2, 1)\})$.

11. Seja φ um endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ representado, em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$, pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ \alpha & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{bmatrix},$$

onde α é um parâmetro real.

- (a) Determine os valores de α para os quais φ é um isomorfismo.
- (b) Para $\alpha = 1$, determine:
 - i. o núcleo de φ ;
 - ii. o conjunto $\varphi^{-1}(\{(a, b, c)\})$, onde $(a, b, c) = \varphi(1, 2, 0)$.
- (c) Discuta o sistema $AX = 0$, em função de α .

Sugestão: utilize as alíneas anteriores.

- (d) Utilizando as alíneas anteriores, determine os valores de α para os quais o sistema $AX = B$ é possível, para todo $B \in M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$.
12. Seja φ um endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ representado, em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$, pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \alpha \\ \alpha & -1 & -1 \\ -1 & \alpha & -1 \end{bmatrix},$$

onde α é um parâmetro real.

- (a) Determine, em função de α , a nulidade de φ .
- (b) Considere $\alpha = 2$.

- i. Verifique que $\text{Nuc } \varphi$ é um subespaço complementar de $\text{Im } \varphi$.
- ii. Determine $\varphi^{-1}(\{(1, 1, -2)\})$.

13. Seja φ uma aplicação linear de $\mathbb{R}^3$ para $P_2[x]$ definida por:

$$\varphi(a, b, c) = (b - c) + (a + c)x + (a + 2b)x^2,$$

para todo $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

- (a) Determine $\text{Nuc } \varphi$ e averigüe se φ é um isomorfismo.
- (b) Determine a matriz de φ em relação à base $\mathcal{B} = ((2, 0, 0), (1, -1, 0), (0, 2, -1))$ de $\mathbb{R}^3$ e à base $\mathcal{B}' = (1 + x^2, 1 - x, -1)$ de $P_2[x]$.
- (c) Considere a aplicação linear ψ de $P_2[x]$ em $\mathbb{R}^4$ cuja matriz em relação à base $\mathcal{B}'$ de $P_2[x]$, definida na alínea anterior, e à base canónica de $\mathbb{R}^4$ é

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine a matriz de $\psi \circ \varphi$ relativamente à base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, definida na alínea anterior, e à base canónica de $\mathbb{R}^4$.

14. Sejam φ e ψ endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ definidos por:

$$\varphi(1, 1, 0) = (1, 0, 0), \quad \varphi(1, -1, 0) = (1, 2, 0) \quad \text{e} \quad \varphi(0, 0, 1) = (0, 1, 1)$$

e

$$\psi(x, y, z) = (-y, x - y, z), \quad \text{para todo } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

- (a) Determine $\varphi(x, y, z)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- (b) Considere o endomorfismo de $\mathbb{R}^3$, $\varphi + \alpha\psi$, onde α é um parâmetro real. Determine os valores de α para os quais $\varphi + \alpha\psi$ é um automorfismo.

1. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$; (c) $(7, -\frac{3}{2}, -1)$;
 (d) $\varphi(x, y) = (x + 2y, y, -y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. (a) $(3, 4, 10)$; (b) $\text{Nuc } \varphi = \{(-z, -z, z) : z \in \mathbb{R}\}$ e $\mathcal{B}_{\text{Nuc } \varphi} = ((-1, -1, 1))$;
 (c) $c_\varphi = 2$.
3. (a) $\mathcal{B}_{\text{Im } \varphi} = ((2, -1, 3), (1, 2, -1))$ e $\mathcal{B}_{\text{Nuc } \varphi} = ((-4, 1, -7, 0), (-3, 0, -5, 1))$;
 (b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & -3 \\ -6 & 2 & -2 & 7 \\ 3 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$; (c) $\{(2 - 3w - 4y, y, 3 - 7y - 5w, w) : y, w \in \mathbb{R}\}$.
4. (a) $\{(y, y, 1 - y) : y \in \mathbb{R}\}$;
 (b) $\text{Nuc } \varphi = \{(y, y, -y) : y \in \mathbb{R}\}$ e φ não é monomorfismo;
 (c) $\{(0, y, z, 0) : y, z \in \mathbb{R}\}$.
5. (a) $\text{Nuc } \varphi = \{(z, -2z, z) : z \in \mathbb{R}\}$ e $n_\varphi = 1$;
 (b) $\varphi(x, y, z) = (z - x, 3x + 2y + z)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
6. (a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$; (b) $\{(x, x + z, x) : x, z \in \mathbb{R}\}$;
 (c) não é monomorfismo nem epimorfismo.
7. (a) $\text{Nuc } \varphi = \left\{ \frac{1}{3} \begin{bmatrix} d & d \\ 2 & 3d \end{bmatrix} : d \in \mathbb{R} \right\}$ e $\text{Im } \varphi = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : w - x - y - z = 0\}$;
 (b) não é automorfismo. (c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; (d) $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 9 & 5 & -3 & 6 \\ -6 & -2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \\ -3 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$;
 (e) $\left\{ \begin{bmatrix} -c & 2c \\ c & 0 \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\}$.
8. (a) $\varphi(0, 1) = (2, -2)$ e $\varphi(1, 1) = (0, 0)$; (b) $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.
9. (a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; (b) ii. $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; iii. $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \\ 10 & 8 & 4 \end{bmatrix}$;
 iv. $\varphi(v) = (5, -5, 10)_{\mathcal{B}'}$.
10. (a) $c + a - b = 0$;
 (b) $\{(a - b + z, b - 2z, z) : z \in \mathbb{R}\}$ e grau de indeterminação é 1;

- (c) i. $\text{Im } \varphi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z + x - y = 0\}$; ii. $\text{Nuc } \varphi = \{(z, -2z, z) : z \in \mathbb{R}\}$;
iii. $\{(-1 + z, 2 - 2z, z) : z \in \mathbb{R}\}$.
11. (a) $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$;
(b) i. $\text{Nuc } \varphi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$; ii. $\{(1 + x, 2 + y, x + y) : x, y \in \mathbb{R}\}$;
(c) sistema possível e indeterminado: $\alpha \in \{-2, 1\}$;
sistema possível e determinado: $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$;
(d) $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.
12. (a) se $\alpha = -1$, $n_\varphi = 2$; se $\alpha = 2$, $n_\varphi = 1$; se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$, $n_\varphi = 0$;
(b) ii. $\{(z, z - 1, z) : z \in \mathbb{R}\}$.
13. (a) $\text{Nuc } \varphi = \{(0, 0, 0)\}$ e é um isomorfismo;
(b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} -6 & -7 & 11 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.
14. (a) $\varphi(x, y, z) = (x, x - y + z, z)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;
(b) $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.