

departamento de matemática



universidade de aveiro

1. Para cada uma das alíneas, determine a matriz da aplicação linear φ em relação às bases indicadas.

- (a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(x, y) = (x, y, x+y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^3$;
- (b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\varphi(x, y, z) = (x+y, x+z, 2x, 0)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, em relação à base $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (2, 1, -1), (1, 2, 1))$ de $\mathbb{R}^3$ e à base canónica de $\mathbb{R}^4$;
- (c) $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(x, y, z, w) = (0, x-y, z-w)$, para todo $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$, em relação à base $\mathcal{B} = ((1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1))$ de $\mathbb{R}^4$ e à base $\mathcal{B}' = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), (-1, 1, 2))$ de $\mathbb{R}^3$;
- (d) $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(x, y, z) = (x+2y, y+2z, 3z)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$;
- (e) $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(x, y, z) = (x+2y+z, 2x-y-3z, x-3y-4z)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$;
- (f) $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x, y, z, w) = x+y-w$, para todo $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$, em relação à base $\mathcal{B} = ((1, 2, 0, 0), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 2, 1), (2, 1, 1, 2))$ de $\mathbb{R}^4$ e à base $\mathcal{B}' = (2)$ de $\mathbb{R}$;
- (g) $\varphi : P_3[x] \longrightarrow P_2[x]$ tal que $\varphi(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 3ax^2 + 2bx + c$, para todo $ax^3 + bx^2 + cx + d \in P_3[x]$, em relação às bases canónicas de $P_3[x]$ e de $P_2[x]$, respectivamente.
- (h) $\varphi : P_2[x] \longrightarrow P_2[x]$ tal que $\varphi(ax^2 + bx + c) = -2ax^2 + (2a-b)x + b$, para todo $ax^2 + bx + c \in P_2[x]$, em relação à base $\mathcal{B} = (1+x, x^2, x-x^2)$ de $P_2[x]$.
- (i) $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\varphi(1, 0) = (3, 2)$ e $\varphi(1, 1) = (0, 3)$, em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$.

2. Para cada uma das alíneas, determine a aplicação linear φ tal que:

- (a) $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $M(\varphi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^3$;
- (b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $M(\varphi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^3$;
- (c) $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B} = ((1, -1), (2, -3))$ é uma base de $\mathbb{R}^2$;

- (d) $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B} = ((1, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 0))$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}' = ((1, 1), (-1, 1))$ é uma base de $\mathbb{R}^2$;
- (e) $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B} = ((-1, -1, -1), (0, -1, -2), (0, 0, 1))$ e $\mathcal{B}' = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 0))$ são bases de $\mathbb{R}^3$.
- (f) $\varphi : P_1[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B} = (x, 1 - x)$ é base de $P_1[x]$ e $\mathcal{B}' = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ é base de $\mathbb{R}^3$.
- (g) $\varphi : P_1[x] \longrightarrow P_2[x]$ e $M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B}_{P_1[x]}$ é base canónica de $P_1[x]$ e $\mathcal{B}' = (x, 1 - x^2, 1 - x + x^2)$ é base de $P_2[x]$.
3. Determine as matrizes de mudança de base $M(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ e $M(\mathcal{B}', \mathcal{B})$, para cada um dos seguintes pares de bases dos espaços vectoriais indicados.
- (a) $\mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1))$ e $\mathcal{B}' = ((1, 1), (-2, 3))$ de $\mathbb{R}^2$;
- (b) $\mathcal{B} = ((1, 0), (1, -1))$ e $\mathcal{B}' = ((1, 3), (2, 5))$ de $\mathbb{R}^2$;
- (c) $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ e $\mathcal{B}' = ((-1, -1, 1), (1, 1, 1), (0, 1, 2))$ de $\mathbb{R}^3$;
- (d) $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (2, -1, 1), (1, 2, 1))$ e $\mathcal{B}' = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), (-1, 1, 2))$ de $\mathbb{R}^3$;
- (e) $\mathcal{B} = ((1, 2, 0, 0), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 2, 1), (2, 1, 1, 1))$ e $\mathcal{B}' = ((1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1))$ de $\mathbb{R}^4$;
- (f) $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ e $\mathcal{B}' = (1 + x, x^2, x - x^2)$ de $P_2[x]$;
4. Sejam $\mathcal{B} = ((1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1))$ e $\mathcal{B}' = ((1, 0, 1), (-1, 0, 1), (0, 1, 0))$ bases de $\mathbb{R}^3$.
- (a) Determine a matriz de mudança de base $M(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.
- (b) Seja $u \in \mathbb{R}^3$. Sabendo que $u = (1, 2, -1)_{\mathcal{B}}$, determine as coordenadas de u em relação à base $\mathcal{B}'$ usando a matriz de mudança de base da alínea anterior.
5. Seja φ um endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ tal que $A = \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ é sua a matriz em relação à base $\mathcal{B} = ((1, -1), (2, -3))$ de $\mathbb{R}^2$.
- (a) Determine a matriz de mudança de base $M(\mathcal{B}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$, onde $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^2$.
- (b) Utilizando a matriz calculada na alínea anterior, determine a matriz de φ em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$, isto é, $M(\varphi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$.

6. Considere o endomorfismo φ de $\mathbb{R}^2$ tal que por $\varphi(x, y) = (0, x + y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- (a) Determine a matriz de φ em relação à base canónica do espaço considerado, isto é, $M(\varphi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$.
 - (b) Determine a matriz de mudança de base $M(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B})$, onde $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B} = ((1, 1), (1, 0))$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.
 - (c) Utilizando matriz de mudança de base da alínea anterior, determine a matriz de φ em relação à base $\mathcal{B}$, definida na alínea anterior, isto é, $M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B})$.
7. Seja φ um endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuja matriz em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é

$$M(\varphi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determine a matriz de φ em relação à base $\mathcal{B} = ((1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$, usando o conceito de matriz de mudança de base.

8. Seja φ uma aplicação linear de $\mathbb{R}^3$ para $P_3[x]$ tal que, para todo $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$\varphi(a, b, c) = ax^3 + (a - 2b - c)x^2 - 2cx + (a + b).$$

- (a) Determine a matriz de φ em relação às bases canónicas dos espaços considerados.
 - (b) Utilizando matrizes de mudança de base, determine a matriz de φ em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ e à base $\mathcal{B} = (1 + x^3, x^2, x - x^2, 1 + x - x^3)$ de $P_3[x]$.
9. Considere φ e ψ dois endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ tais que

$$\varphi(x, y, z) = (x, 2y, y - z), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

$$M(\varphi - 3\psi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

onde $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^3$. Determine a matriz de ψ em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$.

10. Sejam E e E' dois espaços vectoriais reais tais que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ é uma base de E e $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ é uma base de E' . Seja ainda φ uma aplicação linear de E em E' tal que

$$M(\varphi; \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_{E'}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine a matriz de φ em relação à base $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_1 + e_2, -e_2 + e_3)$ de E e à base $\mathcal{B}'_1 = (e'_1 + e'_2, e'_1 - e'_2)$ de E' .

- (b) Sendo $u = (1, -1, 2)_{\mathcal{B}_1}$, determine as coordenadas de $\varphi(u)$ em relação à base $\mathcal{B}'_1$.
11. Sejam E e E' dois espaços vectoriais reais de dimensões 3 e 2, respectivamente, e tais que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ é uma base de E e $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ é uma base de E' . Seja ainda

$$M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determine a base $\mathcal{B}'_1$ de E' tal que

$$M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}'_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

1. (a) $M(\varphi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^4}) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;
- (c) $M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; (d) $M(\varphi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$;
- (e) $M(\varphi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$; (f) $M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;
- (g) $M(\varphi; \mathcal{B}_{P_3[x]}, \mathcal{B}_{P_2[x]}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; (h) $M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$;
- (i) $M(\varphi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.
2. (a) $\varphi(x, y, z) = (x + y + 2z, 2x + y + 3z, x - y), \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;
- (b) $\varphi(x, y, z) = (-2x + 3y - z, x - 3y + z, -x + 2y - z), \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;
- (c) $\varphi(x, y) = (-3x - 2y, -11x - 9y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$;
- (d) $\varphi(x, y, z) = (x - y - z, 9y - 9x + 3z), \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;
- (e) $\varphi(x, y, z) = (2x - 5y + 2z, 4x - 12y + 5z, z - 2y), \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;
- (f) $\varphi(ax + b) = (2a + 3b, 3a + b, 2a + 2b), \forall ax + b \in P_1[x]$;
- (g) $\varphi(ax + b) = (-4a - 8b)x^2 + (2a + 6b)x + 2b, \forall ax + b \in P_1[x]$.
3. (a) $M(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $M(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$;
- (b) $M(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} -5 & -7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $M(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$;
- (c) $M(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $M(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;
- (d) $M(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ e $M(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & -4 & -12 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$;
- (e) $M(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $M(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & -3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$;
- (f) $M(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $M(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

$$4. \text{ (a) } \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{(b) } u = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)_{B'}.$$

$$5. \text{ (a) } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}; \quad \text{(b) } \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -11 & -9 \end{bmatrix}.$$

$$6. \text{ (a) } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{(b) } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad \text{(c) } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$7. \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$8. \text{ (a) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{(b) } \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -6 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$9. \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$10. \text{ (a) } \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad \text{(b) } \varphi(u) = (-2, 8)_{B'_1}.$$

$$11. \mathcal{B}'_1 = (e'_1 + e'_2, e'_2).$$