

departamento de matemática



universidade de aveiro

1. Seja φ um endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ definido por $\varphi(x, y) = (2x - y, -8x + 4y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Dados os vectores $u = (5, 10)$, $v = (3, 2)$ e $w = (1, 1)$, indique quais pertencem ao núcleo de φ .

(b) Dados os vectores $a = (1, -4)$, $b = (5, 0)$ e $c = (-3, 12)$, indique quais pertencem à imagem de φ .

2. Seja $\psi : P_2[x] \rightarrow P_3[x]$ uma aplicação linear definida por

$$\psi(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx, \quad \text{para todo } ax^2 + bx + c \in P_2[x].$$

(a) Dados os polinómios $p_1(x) = x^2$, $p_2(x) = 0$ e $p_3(x) = 1 + x$, indique quais pertencem ao núcleo de ψ .

(b) Dados os polinómios $q_1(x) = x^2 + 3x$, $q_2(x) = x + 2$ e $q_3(x) = 4x^2 - x^3 + 7x$, indique quais pertencem à imagem de ψ .

3. Seja $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear tal que, para todo $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$,

$$\phi(x, y, z, w) = (4x + y - 2z - 3w, 2x + y + z - w, 6x - 9z + 9w)$$

Indique um vector que pertença ao $\text{Nuc } \phi$ e um vector que pertença a $\text{Im } \phi$.

4. Para cada uma das seguintes aplicações lineares, determine uma base do núcleo, $\mathcal{B}_{\text{Nuc } \varphi}$, e uma base da imagem, $\mathcal{B}_{\text{Im } \varphi}$, bem como a nulidade e a característica:

(a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\varphi(x, y) = (3x - y, -3x + y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$;

(b) $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(x, y) = (x + y, x, 2y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$;

(c) $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(x, y, z) = (0, 0, 2y)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

(d) $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(x, y, z) = (x + y, 0, y - z)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

(e) $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(x, y, z) = (x + 2z, y - z, x + y)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

(f) $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\varphi(x, y, z, w) = (4x + y + 5z + 2w, x + 2y + 3z)$, $\forall (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$;

(g) $\varphi : P_2[x] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(ax^2 + bx + c) = c + b - a$, $\forall ax^2 + bx + c \in P_2[x]$;

(h) $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(-1, 1) = (3, 2, 1)$, $\varphi(0, 1) = (1, 1, 0)$;

(i) $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$\varphi(1, 0, 0) = (1, 0), \quad \varphi(0, 1, 0) = (-1, 0) \quad \text{e} \quad \varphi(0, 0, 1) = (0, 0);$$

(j) $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$\varphi(1, 0, 0) = (2, 3), \quad \varphi(0, 1, 0) = (-1, 4) \quad \text{e} \quad \varphi(0, 0, 1) = (-5, 2).$$

5. Considere a base $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$ de $\mathbb{R}^3$. Seja $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow P_3[x]$ uma aplicação linear tal que:

$$\varphi(1, 0, 0) = x^3 + 2x, \quad \varphi(0, 1, 1) = x^2 - 2x, \quad \text{e} \quad \varphi(0, 0, 1) = x^3 + x^2.$$

Determine:

- (a) uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua uma base de $\text{Nuc } \varphi$, se possível.
 - (b) $\text{Im } \varphi$ e uma sua base.
 - (c) $\varphi^{-1}(\{x^3 + 2x\})$, expresso em função de $\text{Nuc } \varphi$.
6. Considere a aplicação $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definida por:

$$\varphi(1, 0, 0) = (1, 0, 2, 0), \quad \varphi(0, 1, 1) = (0, 1, -2, 0), \quad \text{e} \quad \varphi(0, 0, 1) = (1, 1, 0, 0).$$

Determine:

- (a) $\varphi(a, b, c)$, para todo $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$;
 - (b) $\text{Nuc } \varphi$ e a nulidade de φ ;
 - (c) $\text{Im } \varphi$ e a característica de φ ;
 - (d) $\varphi^{-1}(\{(2, 2, 0, 0)\})$;
 - (e) um subespaço complementar de $\text{Nuc } \varphi$.
7. Seja φ uma aplicação de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^2$ definida por

$$\varphi(x, y, z) = (x + k_1 - 2k_2, 2x + y), \quad \text{para todo } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

onde k_1 e k_2 são dois parâmetros reais.

- (a) Diga, justificando, qual a relação entre k_1 e k_2 para que φ seja uma aplicação linear.
 - (b) Considere $k_1 = 2$ e $k_2 = 1$. Determine um subespaço complementar de $\text{Nuc } \varphi$.
8. Sejam E e E' espaços vectoriais reais tais que $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, e_3)$ e $\mathcal{B}_{E'} = (e'_1, e'_2)$ são bases ordenadas de E e E' , respectivamente. Seja φ uma aplicação de E para E' definida por:

$$\varphi(xe_1 + ye_2 + ze_3) = (x + k)e'_1 + (y + z)e'_2, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

onde k é um parâmetro real.

- (a) Para que valores de k , φ uma aplicação linear?
- (b) Para os valores de k determinados na alínea anterior, determine uma base do núcleo de φ e indique a sua nulidade.

9. Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam φ e ψ endomorfismos de E . Mostre que:

- (a) $\text{Nuc}(\varphi \circ \psi) \supseteq \text{Nuc} \psi$;
- (b) $\text{Im}(\varphi \circ \psi) \supseteq \text{Im} \varphi$;
- (c) $\text{Nuc}(\varphi) \cap \text{Nuc}(\psi) \subseteq \text{Nuc}(\varphi + \psi)$.

1. (a) u ; (b) a e c .
2. (a) $p_2(x)$; (b) $q_1(x)$ e $q_3(x)$.
3. $(0, 0, 0, 0) \in \text{Nuc } \phi$ e $(-3, -1, 9) \in \text{Im } \phi$.
4. (a) $\mathcal{B}_{\text{Nuc } \varphi} = ((1, 3))$, $n_\varphi = 1$, $\mathcal{B}_{\text{Im } \varphi} = ((-1, 1))$ e $c_\varphi = 1$;
 (b) $\mathcal{B}_{\text{Nuc } \varphi} = \emptyset$, $n_\varphi = 0$, $\mathcal{B}_{\text{Im } \varphi} = ((1, 0, 2), (0, 1, -2))$ e $c_\varphi = 2$;
 (c) $\mathcal{B}_{\text{Nuc } \varphi} = ((1, 0, 0), (0, 0, 1))$, $n_\varphi = 2$, $\mathcal{B}_{\text{Im } \varphi} = ((0, 0, 1))$ e $c_\varphi = 1$;
 (d) $\mathcal{B}_{\text{Nuc } \varphi} = ((-1, 1, 1))$, $n_\varphi = 1$, $\mathcal{B}_{\text{Im } \varphi} = ((1, 0, 0), (0, 0, 1))$ e $c_\varphi = 2$;
 (e) $\mathcal{B}_{\text{Nuc } \varphi} = \emptyset$, $n_\varphi = 0$, $\mathcal{B}_{\text{Im } \varphi} = ((1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 1))$ e $c_\varphi = 3$;
 (f) $\mathcal{B}_{\text{Nuc } \varphi} = ((-4, 2, 0, -7), (-6, 0, 2, -7))$, $n_\varphi = 2$, $\mathcal{B}_{\text{Im } \varphi} = ((1, 0), (0, 1))$ e $c_\varphi = 2$;
 (g) $\mathcal{B}_{\text{Nuc } \varphi} = (x^2 + 1, x^2 + x)$, $n_\varphi = 2$, $\mathcal{B}_{\text{Im } \varphi} = (1)$ e $c_\varphi = 1$;
 (h) $\mathcal{B}_{\text{Nuc } \varphi} = \emptyset$, $n_\varphi = 0$, $\mathcal{B}_{\text{Im } \varphi} = ((1, 0, 1), (0, 1, -1))$ e $c_\varphi = 2$;
 (i) $\mathcal{B}_{\text{Nuc } \varphi} = ((1, 1, 0), (0, 0, 1))$, $n_\varphi = 2$, $\mathcal{B}_{\text{Im } \varphi} = ((1, 0))$ e $c_\varphi = 1$;
 (j) $\mathcal{B}_{\text{Nuc } \varphi} = ((18, -19, 11))$, $n_\varphi = 1$, $\mathcal{B}_{\text{Im } \varphi} = ((2, 3), (-1, 4))$ e $c_\varphi = 2$.
5. (a) $\mathcal{B} = ((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1))$;
 (b) $\text{Im } \varphi = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in P_3[x] : d = 0 \wedge c - 2a + 2b = 0\}$ e $\mathcal{B}_{\text{Im } \varphi} = (x^3 + 2x, x^2 - 2x)$;
 (c) $(1, 0, 0) + \text{Nuc } \varphi$.
6. (a) $\varphi(a, b, c) = (a + c - b, c, 2a - 2b, 0)$, para todo $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$;
 (b) $\text{Nuc } \varphi = \{(a, a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$ e $n_\varphi = 1$;
 (c) $\text{Im } \varphi = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : z - 2x + 2y = w = 0\}$ e $c_\varphi = 2$;
 (d) $\{(a, a, 2) : a \in \mathbb{R}\}$; (e) $\{(x, 0, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.
7. (a) $k_1 = 2k_2$; (b) $\mathbb{R}^2$.
8. (a) $k = 0$; (b) $\mathcal{B}_{\text{Nuc } \varphi} = \{e_3 - e_2\}$ e $n_\varphi = 1$.