

departamento de matemática



universidade de aveiro

1. Em cada uma das alíneas que se seguem, averigúe se a aplicação considerada é uma aplicação linear:

- (a) $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(x, y, z) = (2x - y - z, x + y, x)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;
- (b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(x, y, z) = (y, x, 0)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;
- (c) $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x, y, z) = xyz$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;
- (d) $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(x, y) = (x^2 + y, x - 2y, x)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$;
- (e) $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x, y) = |x - y|$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$;
- (f) $\varphi : P_2[x] \longrightarrow P_1[x]$ tal que $\varphi(ax^2 + bx + c) = b + 2cx$, $\forall ax^2 + bx + c \in P_2[x]$;
- (g) $\varphi : P_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(ax^2 + bx + c) = c - 2b - a$, $\forall ax^2 + bx + c \in P_2[x]$;
- (h) $\varphi : P_2[x] \longrightarrow P_2[x]$ tal que $\varphi(ax^2 + bx + c) = a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c$, $\forall ax^2 + bx + c \in P_2[x]$;
- (i) $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$ tal que $\varphi(x, y) = \begin{bmatrix} 2x - 5y \\ 2x \end{bmatrix}$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$;
- (j) $\varphi : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que $\varphi(A) = AB + BA$, com $B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $\forall A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$;
- (k) $\varphi : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que $\varphi(A) = \det(A)$, $\forall A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$;
- (l) $\varphi : M_{n \times m}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{m \times n}(\mathbb{R})$ tal que $\varphi(A) = A^T$, $\forall A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$.

2. (a) Seja E um espaço vectorial real e seja $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação linear e sejam $v_1, v_2 \in E$ tais que

$$\varphi(v_1) = 1 \quad \text{e} \quad \varphi(v_2) = -1.$$

Determine $\varphi(3v_1 - 5v_2)$.

- (b) Seja $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação linear tal que

$$\psi(1, 3) = (1, 1) \quad \text{e} \quad \psi(1, 1) = (0, 1).$$

Determine $\psi(-1, 3)$.

- (c) Seja $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação linear tal que

$$\phi(3, -1, 2) = 5, \quad \phi(1, 0, 1) = 2 \quad \text{e} \quad \phi(0, 0, 1) = -1.$$

Determine $\phi(-1, 1, 0)$.

- (d) Seja $\theta : P_2[x] \longrightarrow P_2[x]$ uma aplicação linear tal que

$$\theta(x + 1) = x, \quad \theta(x - 1) = 1 \quad \text{e} \quad \theta(x^2) = 0.$$

Determine $\theta(2 - x + 3x^2)$.

3. Para cada caso, verifique se existe uma aplicação linear que satisfaça as condições indicadas. Em caso afirmativo, determine a expressão geral de tal aplicação linear.

- (a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\varphi(1, 1) = (1, -2)$ e $\varphi(1, 0) = (-4, 1)$;
- (b) $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(1, 0) = (1, 2, -1)$ e $\varphi(0, 1) = (0, 1, 0)$;
- (c) $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(1, 2) = (3, -1, 5)$ e $\varphi(0, 1) = (2, 1, -1)$;
- (d) $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(1, 1, 1) = 3$, $\varphi(0, 1, -2) = 1$ e $\varphi(0, 0, 1) = -2$;
- (e) $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\varphi(1, 1, 1) = (1, 2, 3), \quad \varphi(1, 2, 3) = (1, 4, 9) \quad \text{e} \quad \varphi(2, 3, 4) = (1, 8, 27);$$

- (f) $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(1, 0) = (0, 0, 0)$, $\varphi(1, 1) = (1, 0, 1)$ e $\varphi(3, 2) = (2, 0, 2)$;
- (g) $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\varphi(1, 2) = (4, 5, 0), \quad \varphi(0, 1) = (1, -1, 2) \quad \text{e} \quad \varphi(1, 1) = (1, 3, -2);$$

- (h) $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(1, 2) + \varphi(2, 4) = -\varphi(1, 2)$, $\varphi(0, 1) = (1, 1, -1)$;
- (i) $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(0, 0) = (1, 0, 0)$;
- (j) $\varphi : P_2[x] \longrightarrow P_3[x]$ tal que $\varphi(1+x) = x - x^3$, $\varphi(1+x^2) = 1 - x$ e $\varphi(x) = x$;
- (k) $\varphi : P_2[x] \longrightarrow P_2[x]$ tal que $\varphi(1) = 1+x+x^2$, $\varphi(x) = 1+x^2$ e $\varphi(x+2x^2) = 4x^2$;
- (l) $\varphi : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 3, \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = -1, \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0 \quad \text{e} \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2.$$

4. Considere a aplicação $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\varphi(x, y, z) = (x - y + z, x + y + 2z)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

- (a) Verifique que φ é aplicação linear.
- (b) Calcule $\varphi(\mathbb{R}^3)$.
- (c) Determine $\varphi^{-1}(\{(1, -2)\})$.

5. Considere a aplicação linear $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\varphi(1, 2) = (2, 3) \quad \text{e} \quad \varphi(0, 1) = (1, 4).$$

Seja $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$ um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^2$.

- (a) Determine $\varphi(x, y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- (b) Calcule $\varphi(S)$.
- (c) Determine $\varphi^{-1}(\{(2, 7)\})$.

6. Considere o subespaço vectorial de $P_3[x]$

$$S = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in P_3[x] : d = c + b \wedge a = -d\}.$$

Seja $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow P_3[x]$ uma aplicação linear definida por

$$\varphi(1, 0, 0) = x^3 + 2x, \quad \varphi(0, 1, 1) = x^2 - 2x \quad \text{e} \quad \varphi(0, 0, 1) = x^3 + x^2.$$

Determine $\varphi^{-1}(S)$ e comprove, usando a definição, que $\varphi^{-1}(S)$ é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.

7. Sejam E e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ e seja F um subespaço vectorial de E . Seja ainda φ uma aplicação linear de E para E' . Mostre que:

- (a) $\varphi^{-1}(\varphi(F)) \supseteq F$;
- (b) $\varphi^{-1}(\varphi(E)) = \varphi^{-1}(E')$.

1. Não são aplicações lineares as alíneas (c) , (d) , (e) e (k) .
2. (a) 8; (b) $(2, -1)$; (c) -1 (d) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$;
3. (a) $\varphi(x, y) = (5y - 4x, -3y + x), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$;
(b) $\varphi(x, y) = (x, 2x + y, -x), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$;
(c) $\varphi(x, y) = (2y - x, y - 3x, 7x - y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$;
(d) $\varphi(x, y, z) = (8x - 3y - 2z), \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;
(e) φ não é aplicação linear;
(f) $\varphi(x, y) = (y, 0, y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$;
(g) φ não é aplicação linear;
(h) $\varphi(x, y) = (y - 2x, y - 2x, 2x - y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$;
(i) φ não é aplicação linear;
(j) $\varphi(ax^2 + bx + c) = (a - c)x^3 + bx + a, \forall ax^2 + bx + c \in P_2[x]$;
(k) $\varphi(ax^2 + bx + c) = (c + b + \frac{3}{2}a)x^2 + cx + c + b - \frac{a}{2}, \forall ax^2 + bx + c \in P_2[x]$;
(l) $\varphi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 3a + 2b - 3c + 2d, \forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
4. (b) $\mathbb{R}^2$; (c) $\{(4 + 3y, y, -3 - 2y) : y \in \mathbb{R}\}$.
5. (a) $\varphi(x, y) = (y, 4y - 5x), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$; (b) $\{(x, 9x) : x \in \mathbb{R}\}$; (c) $\{(\frac{1}{5}, 2)\}$.
6. $\{(u, u, 0) : u \in \mathbb{R}\}$.