departamento de matemática **universidade de aveiro**

1. Para cada caso, determine a adjunta e o determinante da matriz A e confirme o resultado verificando que $A(\operatorname{adj} A) = (\det A)I_n$. Utilize essa informação para calcular a inversa da matriz A, caso exista.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

2. Em cada caso, utilize a noção de matriz adjunta para calcular o elemento da posição $(2,3)$ da inversa da matriz.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 7 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

3. Em cada caso, ou mostre que a afirmação é verdadeira ou dê um exemplo mostrando que é falsa. Seja A uma matriz quadrada de ordem n, com $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Se $\operatorname{adj} A$ existe então A é invertível.

   (b) Se A é invertível e $\operatorname{adj} A = A^{-1}$ então $\det A = 1$.

   (c) Se $\operatorname{adj} A = 0$ então $A = 0$.

4. Em cada caso, resolva o sistema usando a regra de Cramer.

   (a) $\begin{cases} 2x - 5y + 7z = 9 \\ -x + 4y + 2z = -2 \\ 3x + 3y - 6z = 5 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 5 \\ 5x + 3y + z = 8 \\ -2x + 6y + 7z = -3 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x + y + 2z + 3w = 1 \\ 3x - y - z - 2w = -4 \\ 2x + 3y - z - w = -6 \\ x + 2y + 3z - w = -4 \end{cases}$

5. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine as inversas de A e de B.

   (b) Determine o conjunto solução de cada um dos seguintes sistemas de equações lineares

   $$AX_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T \quad \text{e} \quad BX_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T,$$

   usando a alínea anterior.

6. Determine $a \in \mathbb{R}$ de modo a que seja possível aplicar a regra de Cramer no sistema

$$\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = 2 \\ x + y + az = 3 \end{cases}.$$

7. Para cada caso, verifique que se trata de um sistema de Cramer e resolva-o aplicando a regra de Cramer.

(a) $\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ -x + y + z = 2 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} -x + z = 1 \\ 2x + y = 2 \\ y - 2z = -4 \end{cases}$

8. Considere o sistema de equações lineares $\begin{cases} x - y = 3 \\ 5y - z = -3 \\ a^2x + 4a^2y - z = a + 1 \end{cases}$.

   (a) Discuta-o em função do parâmetro a.

   (b) Resolva o sistema para $a = 0$ aplicando a regra de Cramer.

9. Usando a regra de Cramer, determine a solução do sistema de equações lineares cuja matriz ampliada é

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -6 \end{array}\right].$$

1. (a) $\det A = 9$, $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ e $A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$;
   (b) $\det A = 20$, $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -8 & 2 & 6 \\ -2 & -2 & 4 \\ 10 & 10 & 0 \end{bmatrix}$ e $A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$.

2. (a) $\frac{4}{21}$; (b) $\frac{2}{9}$.

3. (a) F; (b) V; (c) V.

4. (a) $\left\{\left(\frac{442}{165}, -\frac{1}{15}, \frac{26}{55}\right)\right\}$;
   (b) $\left\{\left(\frac{421}{263}, -\frac{4}{263}, \frac{11}{263}\right)\right\}$;
   (c) $\{(2, -2, 3)\}$;
   (d) $\{(-1, -1, 0, 1)\}$.

5. (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{10}{9} & \frac{7}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$;
   (b) $CS_1 = \{(5, 2, 0)\}$, $CS_2 = \left\{\left(1, -\frac{25}{9}, \frac{4}{3}\right)\right\}$.

6. $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

7. (a) é um sistema de Cramer e $CS = \left\{\left(\frac{4}{5}, \frac{13}{5}, \frac{1}{5}\right)\right\}$;
   (b) é um sistema de Cramer e $CS = \{(1, 0, 2)\}$.

8. (a) sistema impossível: $a = 1$;
   sistema possível e indeterminado: $a = -1$;
   sistema possível e determinado: $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$;
   (b) $\left\{\left(\frac{11}{5}, -\frac{4}{5}, -1\right)\right\}$.

9. $\{(-9, 4)\}$.