departamento de matemática **universidade de aveiro**

1. Determine o número de inversões e classifica quanto à paridade as seguintes permutações de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$:

   (a) $(3, 4, 1, 5, 2)$ (b) $(4, 2, 5, 3, 1)$ (c) $(5, 4, 3, 2, 1)$
   (d) $(1, 2, 3, 4, 5)$ (e) $(1, 3, 5, 4, 2)$ (f) $(2, 3, 5, 4, 1)$

2. Calcule o determinante das seguintes matrizes usando o teorema de Laplace.

   (a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 6 & -9 \\ -14 & 21 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{bmatrix}$

   (d) $\begin{bmatrix} a+1 & a \\ a & a-1 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 9 \end{bmatrix}$

   (g) $\begin{bmatrix} 1 & b & c \\ b & c & 1 \\ c & 1 & b \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$ (i) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

   (j) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (k) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & x \\ 0 & c & y & z \\ d & r & s & t \end{bmatrix}$

3. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

   (a) Calcule o seu determinante.

   (b) Em cada alínea, aplique as propriedades do determinante e indique o valor do determinante da matriz B, sabendo que B é a matriz obtida a partir de A efectuando as seguintes operações elementares:

      i. $L_1 \leftrightarrow L_3$; ii. $L_2' := \frac{1}{7}L_2$;

      iii. $L_1' := -\frac{1}{3}L_1$ e $L_3' := 2L_3$; iv. $L_3' := L_3 + L_1$;

      v. $L_2' := L_2 - 2L_1$ e $L_1 \leftrightarrow L_3$; vi. $L_1' := L_1 + 7L_2$ e $L_3' := -2L_3$

   (c) Confirme os resultados obtidos na alíneas anteriores, efectuando os cálculos.

4. Em cada caso, calcule o determinante, transformando a matriz dada numa matriz triangular superior por meio de operações elementares sobre as linhas e aplicando as propriedades do determinante. De seguida, verifique os seus cálculos usando o teorema de Laplace, e faça uma estimativa de qual o método mais eficiente.

(a) $\begin{vmatrix} -1 & -9 & 6 \\ 2 & -2 & 1 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 3 & -6 & 2 \\ 7 & -1 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 1 & 3 \\ 7 & 6 & -9 & 4 \\ 2 & -7 & 6 & 9 \end{vmatrix}$

5. Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$, determine:

(a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} g & h & i \\ d-6a & e-6b & f-6c \\ a-7g & b-7h & c-7i \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ -7g & -7h & -7i \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$

6. Sem efectuar cálculos, prove que $\begin{vmatrix} y+z & x+z & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

7. Sejam A, B e C matrizes quadradas de ordem 3 tais que $\det A = -2$, $\det B = 3$ e $\det C = -1$. Calcule:

   (a) $\det\left(A^3B^{-1}C^TB^2A^{-1}\right)$; (b) $\det\left(B^TA^{-1}B^{-1}CA^2\left(C^{-1}\right)^T\right)$;

   (c) $\det\left(-A^TB^{-1}C^2\right)$; (d) $\det\left(4(BA)^T(CA)^{-1}\right)$.

8. Sejam A e B matrizes quadradas de ordem 3 tais que $\det(2A^{-1}) = 5 = \det\left(A^2(B^T)^{-1}\right)$. Calcule $\det A$ e $\det B$.

9. Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n, com $n \in \mathbb{N}$. Mostre que se A é invertível então $\det B = \det(A^{-1}BA)$.

10. Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n, com $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Prove que $\det\left(A + B^T\right) = \det\left(A^T + B\right)$

   Sugestão: Mostre que $\left(A^T + B\right)^T = A + B^T$.

   (b) Justifique que está errado o seguinte argumento:

$$\det\left(A + B^T\right) = \det A + \det\left(B^T\right) = \det\left(A^T\right) + \det B = \det\left(A^T + B\right).$$

11. Seja A uma matriz quadrada de ordem n, com $n \in \mathbb{N}$. Indique os valores possíveis para o determinante da matriz A, sabendo que:
    (a) $A^2 = I$; (b) $A^2 = 3A$; (c) $A = -A^T$ e n é ímpar;
    (d) $A^2 + I = 0$ e n é par; (e) $A^3 = A$.

12. Mostre que $A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ -a & 1 & c \\ -b & -c & 1 \end{bmatrix}$ é invertível para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$.

13. Considere o sistema de equações lineares $\begin{cases} x - 2y = \alpha x \\ x - y = \alpha y \end{cases}$.

    Mostre, aplicando as propriedades do determinante, que a sua única solução é a solução trivial.

14. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & 0 & a \\ a & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -b & b \\ 1 & 1 & -1 \\ b & -b & 1 \end{bmatrix}$$

    Determine os valores dos parâmetros a e b para os quais as matrizes A e B são invertíveis e calcule A^{-1} e B^{-1} para esses valores encontrados.

15. Mostre que a matriz

$$D = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

    é invertível e determine a sua inversa.

16. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + y + \alpha^2 z = 1 \\ x + \alpha^2 y + z = 1 \\ \alpha^2 x + y + z = \alpha \end{cases}.$$

    (a) Escreva a matriz A dos coeficientes do sistema e mostre que

$$\det A = -(\alpha - 1)^2(\alpha + 1)^2(\alpha^2 + 2).$$

    (b) Justifique a afirmação: "Se $\alpha = 0$, a matriz A é invertível".
    (c) Fazendo $\alpha = 0$, calcule A^{-1}.
    (d) Discuta o sistema em função do parâmetro α, aplicando as alíneas anteriores.
    (e) Determine o conjunto solução do sistema quando $\alpha = 0$.

17. Sejam A, B e C matrizes quadradas de ordem n, com $n \in \mathbb{N}$. Em cada caso, ou mostre que a afirmação é verdadeira ou dê um exemplo mostrando que é falsa.

    (a) Se $\det A = 0$ então A possui duas linhas idênticas.

    (b) $\det(-A) = -\det A$.

    (c) $\det(A + B) = \det A + \det B$.

    (d) Se $n = 2$, $\det(5A) = 25 \det A$.

    (e) Se $\det A = \det B$ então $A = B$.

    (f) Se a diagonal principal de A é constituída por zeros então $\det A = 0$.

    (g) Se $A^T = -A$ então $\det A = -1$.

    (h) $\det(3A) = 3 \det A$.

    (i) $\det(AB) = \det(BA)$.

    (j) Se $A^3 = 3I$ então A é invertível.

    (k) Se $A^2 = A$ e $A \neq 0$ então A é invertível.

    (l) Se A^2 é invertível então A é invertível.

1. (a) ímpar: 5 inversões; (b) ímpar: 7 inversões; (c) par: 10 inversões; (d) par: 0 inversões; (e) par: 4 inversões; (f) ímpar: 5 inversões.

2. (a) 17; (b) 0; (c) 0; (d) -1; (e) 39; (f) 119; (g) $3bc - b^3 - c^3 - 1$; (h) $2abc$; (i) -56; (j) 0; (k) $abcd$.

3. (a) 126 (b) i. -126; ii. 18; iii. -84; iv. 126; v. -126 vi. -252.

4. (a) 279; (b) 123; (c) -15.

5. (a) 5; (b) -5; (c) -40 (d) 5; (e) -35 (f) -15.

7. (a) -12; (b) -2; (c) $-\frac{2}{3}$; (d) -192.

8. $\det A = \frac{8}{5}$ e $\det B = \frac{64}{125}$.

11. (a) $\det A \in \{-1, 1\}$;
(b) $\det A \in \{0, 3^n\}$;
(c) $\det A = 0$;
(d) $\det A \in \{-1, 1\}$;
(e) $\det A \in \{-1, 0, 1\}$.

12. $\det A = 1 + a^2 + b^2 + c^2$.

14. A é invertível se e só se $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ e $A^{-1} = \frac{1}{1-a^2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -a \\ \frac{2-a^2}{a} & -\frac{1}{a} & 1 \\ \frac{2}{a} & -\frac{a^2+1}{a} & 2 \end{bmatrix}$;

B é invertível se e só se $b \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ e $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{b+1} & \frac{b}{b+1} & 0 \\ \frac{1}{b-1} & 1 & \frac{1}{1-b} \\ \frac{2b}{b^2-1} & \frac{b}{b+1} & \frac{1}{1-b} \end{bmatrix}$.

15. $D^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

16. (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & 1 \\ \alpha^2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; (c) $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;
(d) sistema impossível: $\alpha = -1$;
sistema possível e indeterminado: $\alpha = 1$;
sistema possível e determinado: $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$;
(e) $CS = \{(1, 0, 0)\}$.

17. (a) F; (b) F; (c) F; (d) V; (e) F; (f) F; (g) F; (h) F; (i) V; (j) V; (k) F; (l) V.