departamento de matemática **universidade de aveiro**

1. Seja $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

   (a) Mostre que $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$, usando a definição de inversa.

   (b) Sem efectuar cálculos, indique $(A^{-1})^{-1}$.

2. Em cada caso, use o algoritmo de inversão de matrizes para encontrar a inversa da matriz dada.

   (a) $\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$;

   (d) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (e) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; (f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & 7 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Em cada caso, encontre a matriz invertível A que satisfaz a equação matricial dada.

   (a) $(3A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$; (b) $(5A)^T = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$;

   (c) $\left(2A^T - 3I\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; (d) $(A^{-1} - 3I)^T = 5\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$;

   (e) $\left(A^T - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; (f) $\left(2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} - 5A^{-1}\right)^T = \left(4A^T\right)^{-1}$.

4. Seja $A = \begin{bmatrix} -1 & -10 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$. Para cada caso, encontre a matriz X que satisfaz a equação matricial dada.

   (a) $AX = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$; (b) $XA = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

5. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$. Resolva a equação matricial

$$X^{-1} + \left(XB^{-1}\right)^{-1} = A.$$

6. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ e sejam X_1 e X_2 matrizes tais que $AX_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$ e $BX_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$. Determine:
   (a) A^{-1} e B^{-1};
   (b) X_1 e X_2, usando a alínea anterior.

7. Mostre que se $U = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ e $AU = 0$ então $A = 0$.

8. (a) Simplifique $(I - A)(I + A)$.
   (b) Se $A^2 = 0$, mostre que $I - A$ é invertível e $(I - A)^{-1} = I + A$.
   (c) Se $A^3 = 0$, mostre que $I - A$ é invertível e $(I - A)^{-1} = I + A + A^2$.
   (d) Generalize, ou seja, se $A^n = 0$, determine $(I - A)^{-1}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

9. Seja A uma matriz invertível tal que $(7A)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$. Determine A.

10. Seja A uma matriz quadrada tal que $A^2 - 3A + I = 0$. Mostre que $A^{-1} = 3I - A$.

11. Diz-se que uma matriz M é *ortogonal* se $M^{-1} = M^T$. Prove que:
    (a) $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ é ortogonal;
    Sugestão: recorde a noção de inversa de uma matriz.
    (b) se M e N são matrizes ortogonais então MN é ortogonal.

1. (b) A.

2. (a) $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$;

   (d) $\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & -5 & -7 \\ 0 & 4 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix}$; (e) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$; (f) $\begin{bmatrix} 9 & 0 & -2 & 1 \\ 8 & 3 & -1 & 0 \\ -7 & -2 & 1 & 0 \\ -16 & -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

3. (a) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$; (b) $\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$; (d) $\frac{1}{34}\begin{bmatrix} 23 & -15 \\ -10 & 8 \end{bmatrix}$;

   (e) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7 & 11 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$; (f) $\frac{21}{40}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

4. (a) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -14 & -4 \\ 5 & -4 \\ 11 & -12 \end{bmatrix}$; (b) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -4 & -16 & 4 \\ 17 & 35 & 13 \end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix} 10 & -13 & -8 \\ -11 & 16 & 9 \\ -28 & 40 & 22 \end{bmatrix}$.

6. (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -10 & 7 & -4 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$;

   (b) $X_1 = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$ e $X_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{25}{9} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}^T$.

8. (a) $I - A^2$; (d) $(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

9. $A = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.