departamento de matemática **universidade de aveiro**

1. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a+1 \\ a & 2a & 0 \\ a-1 & 4a & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b+1 & 0 \\ 1 & 0 & b-1 & b \\ b & b-1 & 0 & b-1 \\ b & b-1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Estude as características de A e de B, em função dos parâmetros reais a e b.

2. Faça a discussão de cada um dos sistemas de equações lineares, em função dos respectivos parâmetros.

(a) $\begin{cases} x + ay = 1 \\ bx + y = 5 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} ax + y = -1 \\ 2x + y = b \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x - 3y - 3z = a \\ -x + y + 2z = b \\ x - 3y = c \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x - 2y + 2z = a \\ -2x + y + z = b \\ x - 5y + 7z = c \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x - 2y - z = -4 \\ 5x + 2y + 5z = 4 \\ 2x - 3y - 2z = a \end{cases}$ (f) $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 3x + y = 3 \\ ax + 8y - 5z = b \end{cases}$

(g) $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x - 2y + 3z = 1 \\ x + 2y + (a^2+1)z = a \end{cases}$

(i) $\begin{cases} x + y + z = 1 + b \\ x + by + z = a \\ bx + y = b(1+2b) \end{cases}$ (j) $\begin{cases} x + y + 7z = -7 \\ 2x + 3y + 17z = -16 \\ x + 2y + (a^2+1)z = 3a \end{cases}$

(k) $\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = b \\ ax + y + z = 0 \end{cases}$ (l) $\begin{cases} x - y = 1 \\ ax + 4z = a + 1 \\ 2x - y + 2z = 4 \end{cases}$

3. Para cada sistema de equações lineares, determine os valores de a, b e c para os quais o sistema é possível.

(a) $\begin{cases} x + y + 2z = a \\ x + z = b \\ 2x + y + 3z = c \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 2x + 5y + 3z = b \\ x + 8z = c \end{cases}$.

4. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - z = 0 \\ 2x - y = 1 \\ ax + 2y + z = 2 \\ x - y + z = b \end{cases}$$

   (a) Para que valores de a e b o sistema é possível e determinado?

   (b) Para $a = -4$ e $b = 1$, resolva o sistema dado.

5. Determine os valores de a e b que tornam possível e determinado o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 3x - 7y = a \\ x + y = b \\ 5x + 3y = 5a + 2b \\ x + 2y = a + b - 1 \end{cases}$$

   e, para os valores encontrados, determine a solução do sistema.

6. Considere o sistema de equações lineares $\begin{cases} x - y = 3 \\ 5y - z = -3 \\ a^2x + 4a^2y - z = a + 1 \end{cases}$.

   (a) Discuta-o em função do parâmetro real a.

   (b) Para $a = 0$, determine o conjunto solução do sistema.

7. Determine $a \in \mathbb{R}$ de modo a que seja possível e determinado o seguinte sistema

$$\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = 2 \\ x + y + az = 3 \end{cases}$$

   e resolva-o para os valores de a encontrados.

8. Seja $M = \left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{array}\right]$ a matriz ampliada de um sistema de equações lineares.

   Para que valores de a e b o sistema é:

   (a) impossível;

   (b) possível e determinado;

   (c) possível e indeterminado com grau de indeterminação 1;

   (d) possível e indeterminado com grau de indeterminação 2.

1. se $a \in \{-1, 0\}$, $\text{car}(A) = 2$ e se $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, $\text{car}(A) = 3$;
   se $b = 1$, $\text{car}(B) = 3$ e se $b \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\text{car}(B) = 4$.

2. (a) sistema impossível: $ab = 1$ e $b \neq 5$;
   sistema possível e indeterminado: $a = \frac{1}{5}$ e $b = 5$;
   sistema possível e determinado: $ab \neq 1$;
   (b) sistema impossível: $a = 2$ e $b \neq -1$;
   sistema possível e indeterminado: $a = 2$ e $b = -1$;
   sistema possível e determinado: $a \neq 2$ e $b \in \mathbb{R}$;
   (c) sistema impossível: $2a - c + 3b \neq 0$;
   sistema possível e indeterminado: $2a - c + 3b = 0$;
   (d) sistema impossível: $c - 3a - b \neq 0$;
   sistema possível e indeterminado: $c - 3a - b = 0$;
   (e) sistema possível e determinado: $a \in \mathbb{R}$;
   (f) sistema impossível: $a = -1$ e $b \neq 4$;
   sistema possível e indeterminado: $a = -1$ e $b = 4$;
   sistema possível e determinado: $a \neq -1$ e $b \in \mathbb{R}$;
   (g) sistema impossível: $a = -2$;
   sistema possível e indeterminado: $a = 1$;
   sistema possível e determinado: $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$;
   (h) sistema impossível: $a = 0$;
   sistema possível e determinado: $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
   (i) sistema impossível: ($b = 0$ e $a \neq 1$) ou ($b = 1$ e $a \neq 2$);
   sistema possível e indeterminado: ($b = 0$ e $a = 1$) ou ($b = 1$ e $a = 2$);
   sistema possível e determinado: $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$;
   (j) sistema impossível: $a = 3$;
   sistema possível e indeterminado: $a = -3$;
   sistema possível e determinado: $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$;
   (k) sistema impossível: ($a = 1$ e $b \in \mathbb{R}$) ou ($a = -2$ e $b \neq 3$);
   sistema possível e indeterminado: $a = -2$ e $b = 3$;
   sistema possível e determinado: $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ e $b \in \mathbb{R}$;
   (l) sistema impossível: $a = 2$;
   sistema possível e determinado: $a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

3. (a) $c - b - a = 0$; (b) $a, b, c \in \mathbb{R}$.

4. (a) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$ e $b = 1$; (b) $CS = \{(4, 7, 4)\}$.

5. $a = 2$ e $b = 4$ e $CS = \{(3, 1)\}$.

6. (a) sistema impossível: $a = 1$;
   sistema possível e indeterminado: $a = -1$;
   sistema possível e determinado: $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$;
   (b) $CS = \left\{\left(\frac{11}{5}, -\frac{4}{5}, -1\right)\right\}$.

7. $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ e $CS = \left\{\left(\frac{2}{a+2}, \frac{a-4}{(a+2)(a-1)}, \frac{3a}{(a+2)(a-1)}\right)\right\}$.

8. (a) $a = 0$ e $b \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$; (b) $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $b \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$;
(c) $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $b = 2$; (d) $a = 0$ e $b = 2$.