



1. Transforme a matriz dada na sua forma escalonada reduzida, aplicando o método de eliminação de Gauss-Jordan.

$$(a) \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -2 & 2 & 7 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 6 & 1 & -5 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -9 & 2 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Para cada um dos sistemas de equações lineares seguintes:

- i) escreva a matriz simples (ou dos coeficientes);
- ii) escreva a matriz ampliada;
- iii) efectue operações elementares sobre as linhas para reduzir a matriz ampliada à sua forma escalonada reduzida;
- iv) resolva o sistema usando a forma escalonada reduzida obtida em iii).

$$(a) \begin{cases} 3x - y = 4 \\ 2x - \frac{1}{2}y = 1 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - y + z = 0 \\ x - 3y + 3z = -2 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 2x + 2y - 3z = 1 \\ x + z = 5 \\ 3x + 4y - 7z = -3 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x - 2y + 2z = 4 \\ -2x + y + z = 1 \\ x - 5y + 7z = -1 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} 4x + y - 8z = 1 \\ 3x - 2y + 3z = 5 \\ -x + 8y - 25z = -3 \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} x - 3y + z + w - t = 8 \\ -2x + 6y + z - 2w - 4t = -1 \\ 3x - 9y + 8z + 4w - 13t = 49 \end{cases}$$

$$(h) \begin{cases} x - 2y + z + 3w - t = 1 \\ -3x + 6y - 4z - 9w + 3t = -1 \\ -x + 2y - 2z - 4w - 3t = 3 \\ x - 2y + 2z + 2w - 5t = 1 \end{cases}$$

3. Em cada um dos sistemas de equações lineares dados no exercício anterior, indique:

- i) a característica da matriz simples do sistema;
- ii) a característica da matriz ampliada do sistema;
- iii) o número de incógnitas, o número de soluções e o grau de indeterminação da solução (ou seja, o número de parâmetros da solução).

Encontre uma relação entre estes valores.

4. Determine três inteiros positivos que satisfaçam o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x + 5y + 10z = 44 \end{cases}$$

5. Em cada caso, ou demonstre que a afirmação é verdadeira ou dê um exemplo mostrando que é falsa. Assuma que é dado um sistema de equações lineares cuja matriz simples é a matriz A , a matriz ampliada é a matriz M e a forma escalonada da matriz ampliada é a matriz R .

- (a) M e R têm o mesmo tamanho.
- (b) A característica da matriz A é sempre menor ou igual à característica da matriz M .
- (c) Se R tem uma linha de zeros, há infinitas soluções para o sistema.
- (d) Se o sistema tem mais do que uma solução, R deve ter uma linha de zeros.
- (e) Se o sistema tem uma solução, existem infinitas soluções.
- (f) Se o sistema tem mais incógnitas que equações, então tem infinitas soluções.
- (g) Se todas as linhas da matriz R tem um pivot, o sistema tem pelo menos uma solução.
- (h) Se o sistema tem uma solução então a característica da matriz M é igual à característica da matriz A .
- (i) Se M é uma matriz $m \times n$ e $\text{car}(M) = m$ então o sistema é possível.

1. (a)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

2. (a) $\{(-2, -10)\};$
 (b) $\left\{\left(3, \frac{2}{3}\right)\right\};$
 (c) $\left\{\left(\frac{1}{4}, z + \frac{3}{4}, z\right) : z \in \mathbb{R}\right\};$
 (d) $\left\{\left(5 - z, \frac{5}{2}z - \frac{9}{2}, z\right) : z \in \mathbb{R}\right\};$
 (e) $\{ \};$
 (f) $\{ \};$
 (g) $\{(3y + 3 - t, y, 5 + 2t, 0, t) : t, y \in \mathbb{R}\};$
 (h) $\{(9 + 2y + 13t, y, -2, -2 - 4t, t) : t, y \in \mathbb{R}\}.$

3. (a) $\text{car}(A) = \text{car}(M) = \text{n.º de inc.} = 2, \text{n.º de sol.: 1, grau de ind.: 0};$
 (b) $\text{car}(A) = \text{car}(M) = \text{n.º de inc.} = 2, \text{n.º de sol.: 1, grau de ind.: 0};$
 (c) $\text{car}(A) = \text{car}(M) = 2, \text{n.º de inc.: 3, n.º de sol.: indet., grau de ind.: 1};$
 (d) $\text{car}(A) = \text{car}(M) = 2, \text{n.º de inc.: 3, n.º de sol.: indet., grau de ind.: 1};$
 (e) $\text{car}(A) = 2, \text{car}(M) = 3, \text{n.º de inc.: 3, n.º de sol.: 0};$
 (f) $\text{car}(A) = 2, \text{car}(M) = 3, \text{n.º de inc.: 3, n.º de sol.: 0};$
 (g) $\text{car}(A) = \text{car}(M) = 3, \text{n.º de inc.: 5, n.º de sol.: indet., grau de ind.: 2};$
 (h) $\text{car}(A) = \text{car}(M) = 3, \text{n.º de inc.: 5, n.º de sol.: indet., grau de ind.: 2}.$

4. Por exemplo, $x = 4, y = 2$ e $z = 3$.

5. (a) V; (b) V; (c) F; (d) V; (e) F; (f) F; (g) F; (h) V; (i) F.