departamento de matemática **universidade de aveiro**

1. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ -3 & -6 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 0 & 3 \\ 9 & -4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

   Para cada caso, calcule o produto indicado ou explique porque não está definido.

   (a) AB; (b) A^2; (c) CD; (d) DC; (e) BC; (f) C^2; (g) AD.

2. Em cada caso, calcule o produto de matrizes indicado:

   (a) $\begin{bmatrix} 2 & 7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 9 & -3 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$;

   (d) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$; (e) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 7 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$; (f) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}$.

3. Determine a matriz X tal que $BA + 5X = A$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

4. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, determine a matriz quadrada X tal que:

   (a) $(X - C)^T = A^T B^T$; (b) $X^T = A^T (A + BCA)^T$; (c) $(A - 3X)^T = B^2 - C$.

5. Determine a primeira e a segunda colunas da matriz B sabendo que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{bmatrix}.$$

6. Sejam A e B duas matrizes quadradas. Se está definido o produto AB e é uma matriz quadrada, prove que BA também é uma matriz quadrada.

7. Sejam A, B e C matrizes. Se estão definidos os produtos AC e CB e $AC = CB$, prove que A e B são ambas matrizes quadradas.

8. Sejam A, B e C matrizes. Simplifique as seguintes expressões matriciais:
   (a) $A(3B - C) + A^3C$;
   (b) $A(3B - C) + A^2B + 3A(C - 2B)$;
   (c) $(A - B)(A - B) - A^2 + B^2$;
   (d) $A(3B - C) + (A + 2B)C + 2B(C + 2A)$;
   (e) $(A - B)(C - A) + (C - B)(A - C) + (C - A)^2$.

9. Sejam A e B matrizes e suponhamos que estão definidos os produtos AB e BA. Se $AB = A$ e $BA = B$, mostre que $A^2 = A$ e $B^2 = B$.

10. Seja A uma matriz. Mostre que AA^T e $A^T + A$ são ambas matrizes simétricas.

11. Sejam A e B duas matrizes simétricas tais que está definido o produto AB. Prove que:
    (a) $AB + BA$ é uma matriz simétrica;
    (b) se AB é uma matriz simétrica então $AB = BA$.

12. Sejam A e B matrizes para as quais o produto AB está definido. Em cada caso, ou demonstre que afirmação é verdadeira ou dê um exemplo que mostre que é falsa.
    (a) Então também está definido o produto BA.
    (b) Se AB é uma matriz quadrada então o produto BA também está definido.
    (c) Se o produto BA também está definido e $AB = BA$ então A e B são ambas matrizes quadradas e do mesmo tamanho.
    (d) Se a potência A^2 está definida então A é uma matriz quadrada.
    (e) Se a matriz A tem uma linha de zeros então a matriz AB tem uma linha de zeros.
    (f) Se a matriz A tem uma coluna de zeros então a matriz AB tem uma coluna de zeros.
    (g) Se a matriz $AB = 0$ então $A = 0$ ou $B = 0$.
    (h) A igualdade $(AB)^2 = A^2B^2$ é sempre válida.
    (i) A igualdade $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ é sempre válida.
    (j) Se $AB = BA$, então $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
    (k) Se $AJ = A$ então J é a matriz identidade.
    (l) Se $A^2 = A$ então $A = 0$ ou $A = I$.

Sugestão: nas alíneas (j) e (k), atenda à seguinte definição: uma matriz M é *idempotente* se $M^2 = M$.

1. Não estão definidos os produtos das alíneas (b) , (d) e (g) ;
   (a) $\begin{bmatrix} 13 & 21 \\ 51 & -23 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 7 \\ 19 \end{bmatrix}$; (e) $\begin{bmatrix} 8 & -31 \\ -6 & 15 \\ 17 & 7 \end{bmatrix}$; (f) $\begin{bmatrix} -5 & 18 \\ -12 & 19 \end{bmatrix}$.

2. (a) $\begin{bmatrix} -20 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 15 & 27 & -9 \\ -25 & -45 & 15 \\ 10 & 18 & -6 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 26 & -30 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 34 \\ 0 \end{bmatrix}$;
   (e) $\begin{bmatrix} -6 & 21 \\ -14 & 14 \end{bmatrix}$; (f) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 22 \\ -2 & 11 & -31 \\ 1 & -13 & 28 \end{bmatrix}$.

3. $X = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

4. (a) $X = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 5 \end{bmatrix}$; (b) $X = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 6 & 3 & 9 \\ 11 & 2 & 15 \end{bmatrix}$; (c) $X = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

5. $B = \begin{bmatrix} 7 & -8 & * \\ 4 & -5 & * \end{bmatrix}$.

8. (a) $3AB - AC + A^3C$; (b) $-3AB + 2AC + A^2B$; (c) $-AB - BA + 2B^2$;
   (d) $3AB + 4BC + 4BA$; (e) 0.

12. (a) F; (b) V; (c) V; (d) V; (e) V; (f) F; (g) F; (h) F; (i) F; (j) V;
    (k) F; (l) F.