



## 7. Problemas de Proximidade: Diagramas de Voronoi

Antonio L. Bajuelos  
Departamento de Matemática  
Universidade de Aveiro



Mestrado em Matemática e Aplicações

### Introdução



- A origem do conceito de **Diagrama de Voronoi** não é conhecida.
- As estruturas deste tipo **aparecem na Natureza** de tal forma que não devem ter passado despercebidas aos primeiros cientistas ou mesmo a leigos observadores.



carapaça de tartaruga



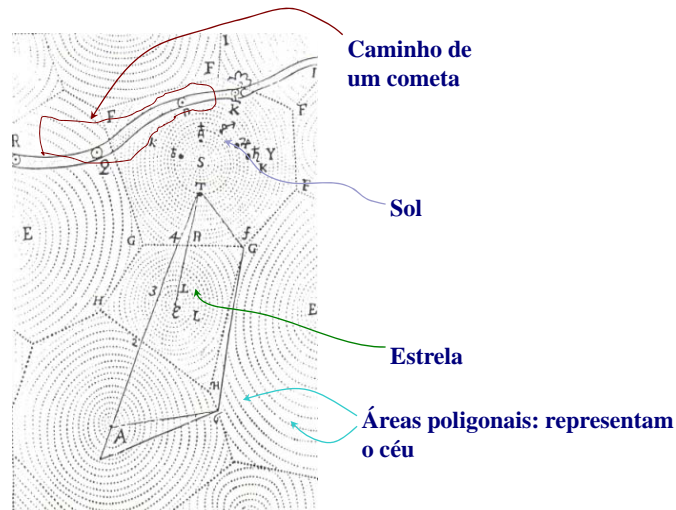
corpo de girafa



deserto

## Histórico

- 1644 - Descartes recorre aos **Diagramas de Voronoi** para mostrar a disposição da matéria no sistema solar;



3

## Histórico (cont...)

- 1850 - 1908 **Peter Dirichlet** e **Georgy Voronoi** (1868-1908), discutem pela primeira vez os diagramas de Descartes
- 1911 - **Thiessen** usa as regiões de **Voronoi** como uma ajuda preciosa à estimação de regiões de precipitação;
- 1921 - **Davis** e **Harding** recorrem aos diagramas para a estimação de reservas de minério em certos depósitos;
- 1960 - Os diagramas vieram a ser uma ajuda preciosa no campo da ecologia, para obtenção de estimativas de concentrações de árvores em florestas;
- 1970 - Desenvolvem-se alguns algoritmos para a construção dos diagramas em 2 e 3 dimensões;
- 1975- **Shamos** e **Hoey** apresentam um algoritmo do tipo *dividir-para-conquistar* para construir os diagramas

4

## Histórico (cont...)



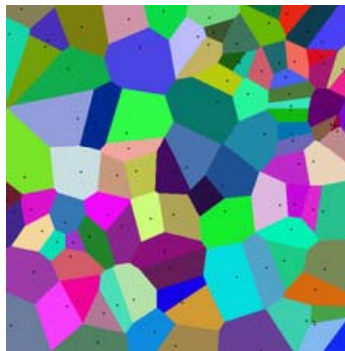
- ❑ 1989 - **Fortune** desenvolve um algoritmo por *varrimento* (plane-sweep-algorithm), muito elegante e de simples complexidade;
- ❑ 1989 - **Klein** introduz a generalização do conceito de **Diagrama de Voronoi**, através dos Diagramas de Voronoi *abstractos*, que já não eram baseados no conceito de distância, mas sim bissetriz;
- ❑ 1992- **Okabe**, **Boots** e **Sugihara** introduzem os diagramas de Voronoi *generalizados*, que usavam uma função característica para construir a partição do plano, em vez de métricas ou curvas bissetrizes.

5

## Definições e observações gerais



- ❑ **Definição (informal):** Dado um conjunto de pontos (geradores) no plano, um **Diagrama de Voronoi** não é mais do que uma subdivisão desse plano em regiões formadas pelos lugares mais próximos a cada um dos pontos.



6

## Definições e observações gerais



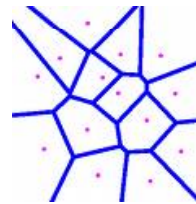
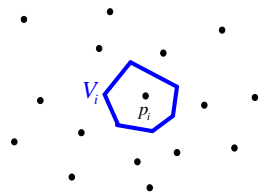
Seja  $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  um conjunto de pontos de  $\mathbb{R}^2$ . Os pontos de  $S$  denominam-se por **geradores** (ou **sítios**).

**Definição:** Chama-se **região de Voronoi** (ou **polígono de Voronoi**) associada ao gerador  $p_i$  de  $S$ , e representa-se por  $V(p_i)$  ou  $V_i$ , ao conjunto definido por:

$$V(p_i) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(p_i, x) \leq d(p_j, x); 1 \leq j \leq n\}$$

onde  $d$  denota a distância (Euclidiana) em  $\mathbb{R}^2$

- Note que um **Polígono de Voronoi** pode ser uma região do plano não limitada (neste caso algumas das arestas do polígono podem ser semi-rectas).

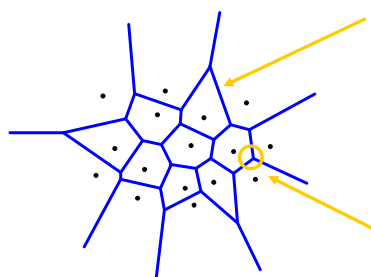


7

## Definições e observações gerais



Ao conjunto definido por  $\text{Vor}(S) = \{V(p_1), V(p_2), \dots, V(p_n)\}$  chama-se **Diagrama de Voronoi (DV)**



**Arestas de Voronoi** – Pontos do plano que estão mais próximos de dois geradores do que quaisquer outros

**Vértices de Voronoi** – pontos do plano que estão tão próximos de três geradores do que quaisquer outros

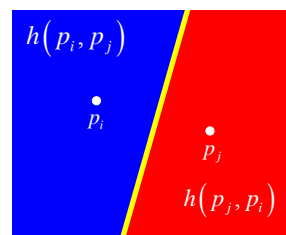
8

## Definições e observações gerais



### ■ Observações:

- Dados dois pontos  $p_i$  e  $p_j$  do plano, o conjunto dos pontos mais próximos de  $p_i$  do que de  $p_j$  é o semi-plano que contém  $p_i$  e é definido pela mediatriz do segmento  $p_i p_j$ . Esse semi-plano será denotado por  $h(p_i, p_j)$  e o semi-plano que contém  $p_j$  será denotado por  $h(p_j, p_i)$



9

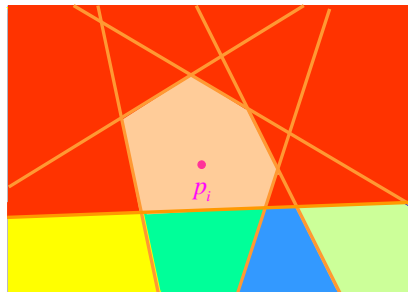
## Definições e observações gerais



### ■ Observações:

- $V(p_i)$  é a intersecção de  $n - 1$  semi-planos e, conseqüentemente, é uma **região poligonal convexa** com, no máximo,  $n - 1$  arestas e vértices.

$$V(p_i) = \bigcap_{i \neq j} h(p_i, p_j)$$

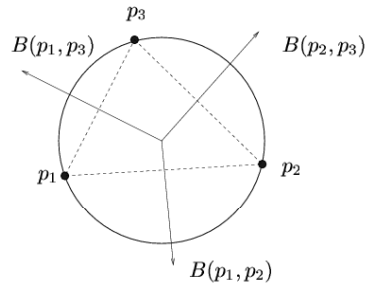


10

## Definições e observações gerais



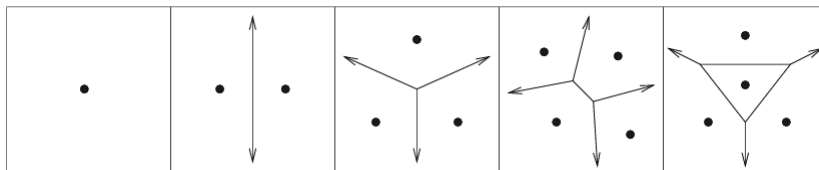
- **Definição:** Para um par de geradores distintos  $p_i$  e  $p_j$ , denota-se por  $B(p_i, p_j)$  a recta mediatriz e ortogonal ao segmento  $p_i p_j$
- Os pontos em  $B(p_i, p_j)$  são equidistantes a  $p_i$  e a  $p_j$
- A figura a seguir mostra um **diagrama de Voronoi** para três pontos não colineares.



- Vamos supor que:
  - **Não existem três pontos colineares**
  - **Nenhum conjunto de quatro pontos é co-circular**

11

## Alguns Diagramas de Voronoi com até 4 geradores



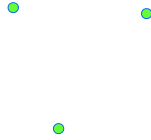
Applet Java em:

<http://www.dma.fi.upm.es/mabellanas/voronoi/applet/voronoi-jar.html>

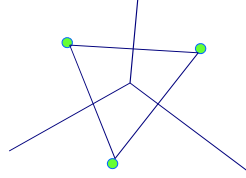
12

## Construção do DV para três pontos

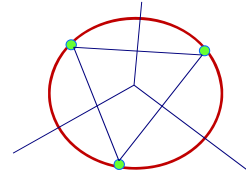
Considerem-se os pontos  $p_1, p_2$  e  $p_3$ :



São dados três pontos no plano



- Unimos os três geradores;
- Calculamos a mediatriz de cada segmento;

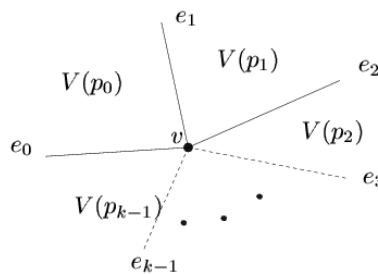


- Da intersecção das mediatrizes resulta um ponto que é o centro de uma circunferência que contem os três geradores;

13

## Propriedades dos Diagramas de Voronoi

**Teorema 1:** Se  $v$  é um vértice de Voronoi (ou seja, um vértice de um Diagrama de Voronoi) então  $v$  está na intersecção de três arestas de Voronoi.



14

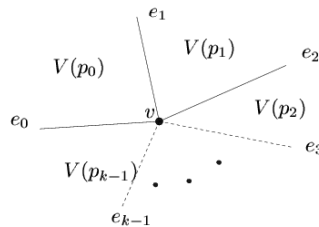
## Propriedades dos Diagramas de Voronoi



### Teorema 1: (Prova)

Um vértice de **Voronoi** é, por definição, a intersecção de arestas de **Voronoi**. Sejam  $e_0, e_1, \dots, e_{k-1}$ , ( $k \geq 3$ ) as arestas, incidentes no vértice  $v$ . **Pretende-se provar que  $k = 3$**  (ver Figura)

A aresta  $e_i$  é comum aos  $V(p_{i-1})$  e  $V(p_i)$  com  $i = 1, \dots, k-1$ . Como  $v$  pertence à aresta  $e_i$  então  $v$  é equidistante a  $p_{i-1}$  e  $p_i$  com  $i = 1, \dots, k-1$ . Logo  $v$  é equidistante a  $p_0, p_1, \dots, p_{k-1}$  e portanto estes pontos são co-circulares. Como assumimos que em  $S$  não existem quatro pontos co-circulares temos que  $k \leq 3$ . Suponhamos que  $k = 2$  então  $e_0$  e  $e_1$  são arestas partilhadas por  $V(p_0)$  e  $V(p_1)$ . Por definição estas arestas pertencem à mediatriz do segmento  $p_1p_2$  e portanto  $e_0$  e  $e_1$  não se intersectam no vértice  $v$ , uma contradição. Logo  $k = 3$  e  $v$  está na intersecção de três arestas. ♦



15

## Propriedades dos Diagramas de Voronoi



**Teorema 1:** Se  $v$  é um **vértice de Voronoi** (ou seja, um vértice de um **Diagrama de Voronoi**) então  $v$  está na intersecção de três arestas de Voronoi.



Os vértices de Voronoi são o centro de círculos definidos por três pontos do conjunto  $S$  e, portanto, o **Diagrama de Voronoi** é regular de grau três. Esse círculo denota-se por  $C(v)$ .

16

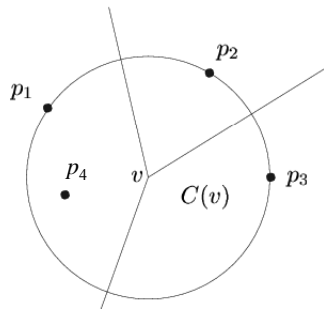


## Propriedades dos Diagramas de Voronoi



**Teorema 2: (círculo circunscrito)** Para cada vértice  $v$ , o interior do círculo  $C(v)$  não contém nenhum outro gerador.

**Prova:** Sejam  $p_1, p_2$  e  $p_3$  três geradores de  $S$  que determinam o círculo  $C(v)$ . Se  $C(v)$  contém outro gerador, digamos  $p_4$ , então  $v$  é mais próximo de  $p_4$  do que  $p_1, p_2$  e  $p_3$ . O que resultaria numa contradição pois assumimos que  $v$  era um ponto comum a  $V(p_1), V(p_2)$  e  $V(p_3)$  ♦



17

## Propriedades dos Diagramas de Voronoi



- O **teorema do círculo circunscrito** estabelece uma **relação bijectiva** entre o centro do círculo que contém três geradores na sua fronteira e os **vértices de Voronoi**
- ➔ Algoritmo elementar para encontrar todos os **vértices de Voronoi** de um DV para um dado conjunto  $S$ :

Para cada tripla de pontos  $(p_i, p_j, p_k)$ ,  $1 \leq i < j < k \leq n$  se o círculo que contém  $p_i, p_j$  e  $p_k$  na sua fronteira não contém nenhum outro ponto do conjunto  $S$  no seu interior, então o centro do círculo é um **vértice de Voronoi**

18

## Propriedades dos Diagramas de Voronoi



**Teorema 3: (círculo vazio)** Sejam  $p$  e  $q$  dois geradores distintos de  $S$ . As regiões  $V(p)$  e  $V(q)$  possuem uma aresta comum se e só se existe um círculo que contém  $p$  e  $q$  e tal que todos os demais geradores são exteriores a este círculo.

**Prova:**

Os polígonos  $V(p)$  e  $V(q)$  possuem arestas comuns se existirem pontos que são equidistantes a  $p$  e a  $q$  e além disso estão mais próximos de  $p$  e  $q$  do que outro par de geradores qualquer.

Isto implica que  $V(p)$  e  $V(q)$  têm uma aresta comum se e só se existe um círculo que contém  $p$  e  $q$  e exclui todos os demais geradores (considere-se um círculo  $C(x)$  em que  $x$  é um ponto interior da aresta partilhada por  $V(p)$  e  $V(q)$  e com raio  $d(x,p) = d(x,q)$ ). ♦

19

## Propriedades dos Diagramas de Voronoi

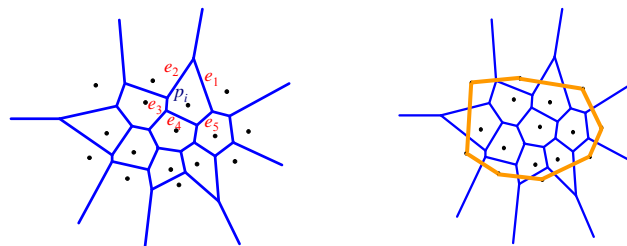


**Teorema 4:** A região de Voronoi,  $V(p_i)$ , é limitada sse  $p_i$  pertence ao interior do invólucro convexo de  $S$  ( $\text{conv}(S)$ ).

**Prova:**

← (procurar na literatura da disciplina)

→ Suponhamos que  $V(p_i)$  é limitada e sejam  $e_1, e_2, \dots, e_k$  ( $k \geq 3$ ) as arestas de  $V(p_i)$  listadas em sentido anti-horário. Cada aresta  $e_j$  ( $j = 1, \dots, k$ ) por definição está contida em alguma mediatriz de um segmento  $p_i'p_i''$ , onde  $p_i' \in S$ . Assim tem-se que  $p_i$  é um ponto no interior do  $\text{conv}(p_1', p_2', \dots, p_k')$ . ♦



20

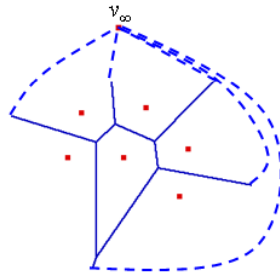
## Propriedades dos Diagramas de Voronoi



**Teorema 5:** Um diagrama de Voronoi com  $n$  ( $n > 2$ ) geradores não tem mais de  $2n-5$  vértices e  $3n-6$  arestas.

**Prova:** Sabe-se que, para qualquer grafo planar conexo com  $m_r$  - regiões,  $m_v$  - vértices e  $m_e$  - arestas:  $m_v - m_e + m_r = 2$  - Fórmula de Euler (1)

No entanto, não podemos aplicar esta fórmula directamente a  $\text{Vor}(S)$ , porque  $\text{Vor}(S)$  tem arestas “semi-infinitas” pelo que não é propriamente um grafo. Para remediar a situação acrescenta-se um vértice  $v_\infty$  “no infinito” ao conjunto dos vértices e considera-se que todas as arestas semi-infinitas de  $\text{Vor}(S)$  estão ligadas a este vértice:

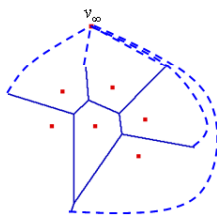


21

## Propriedades dos Diagramas de Voronoi



**Prova (Teorema 5, cont...):**  $m_v - m_e + m_r = 2$  (1)



Obtém-se assim, um grafo planar conexo ao qual podemos aplicar a Fórmula de Euler (1). Considere-se  $n_v$  o número de vértices,  $n_e$  o número de arestas e  $n$  o número de sítios de  $\text{Vor}(S)$ . Então:  $(n_v + 1) - n_e + n = 2$  (2)

Cada aresta no grafo aumentado tem exactamente dois vértices, então se adicionarmos o grau de todos os vértices obtemos o dobro do número de arestas, uma vez que o grau de um vértice corresponde ao número de arestas que nele incidem. Como cada vértice, incluindo o  $v_\infty$ , tem, no mínimo, grau três pelo **Teorema 1** então tem-se que:  $2n_e \geq 3(n_v + 1)$  (3) e obtemos

$$(n_v + 1) \leq \frac{2}{3}n_e \Leftrightarrow n_e \geq \frac{3}{2}(n_v + 1) \quad (4) \quad \text{Juntando (2) e (4) obtemos que:}$$

$$\frac{2}{3}n_e - n_e \geq 2 - n \Leftrightarrow 2n_e - 3n_e \geq 6 - 3n \Leftrightarrow n_e \leq 3n - 6$$

$$(n_v - 1) - \frac{3}{2}(n_v + 1) \geq 2 - n \Leftrightarrow 2(n_v + 1) - 3(n_v + 1) \geq 4 - 2n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n_v + 1 \leq 2n - 4 \Leftrightarrow n_v \leq 2n - 5 \quad \blacklozenge$$

22

## Algoritmos para a construção de um DV



### Método N° 1

- Seja  $S = \{p_1, \dots, p_n\}$  o conjunto de pontos geradores e  $DV = \{V(p_1), \dots, V(p_n)\}$  o **Diagrama de Voronoi**. Então para construir o DV basta gerar os  $V(p_i)$  através de  $S$ .
- O **1º método** trata o problema de uma forma muito simples, recorrendo a uma das definições de **Diagrama de Voronoi** que se baseia na intersecção de semi-planos:

**O polígono de Voronoi, associado ao gerador  $p_i$ , é a intersecção de todos os semi-planos delimitados pelas mediatrizes aos segmentos de recta entre  $p_i$  e os outros geradores.**

De acordo com esta definição constrói-se os *polígonos de Voronoi*, um por um, obtendo o seguinte método:

23

## Algoritmos para a construção de um DV (cont...)



### Método N° 1 (cont...)

**Entrada:**  $n$  geradores  $p_1, \dots, p_n$

**Saída:** Diagrama de Voronoi  $V = \{V(p_1), \dots, V(p_n)\}$

**Passo 1:** Para cada  $i$ , com  $i=1, \dots, n$ , gerar  $n-1$  semi-planos  $H(p_i, p_j)$ ,  $1 \leq j \leq n$ ,  $i \neq j$  e construir a sua intersecção, que origina  $V(p_i)$

**Passo 2:** Devolver  $\{V(p_1), \dots, V(p_n)\}$  como saída e parar

24

## Algoritmos para a construção de um DV



### Método N°1 (cont...)

#### Eficiência:

- Construir um semi-plano  $H(p_i, p_j)$  para dois pontos dados requer um gasto de tempo constante. Consequentemente, para cada  $p_i$ , o tempo necessário para construir  $n-1$  semi-planos é  $O(n)$ .
- A intersecção de semi-planos seria processada do seguinte modo:
  - *intersectar dois semi-planos obtendo-se um polígono com dois lados;*
  - *intersectar este polígono com o terceiro semi-plano e assim sucessivamente.*
- No  $k$ -ésimo passo temos a intersecção do  $k$ -ésimo polígono (que no pior dos casos terá  $k$ -ésimos lados) com um novo semi-plano o que requer um tempo, pelo menos, proporcional a  $k$  (pois temos que verificar a intersecção, do novo semi-plano, com os  $k$  lados do polígono).

25

## Algoritmos para a construção de um DV



### Método N°1 (cont...)

#### Eficiência (cont...):

- Sendo assim, construir a intersecção de  $n-1$  semi-planos requer um tempo proporcional a:

$$1 + 2 + \dots + (n-1) \Rightarrow O(n^2)$$

Repetindo o processo para todos os geradores, obtemos o total de tempo requerido por este método que é  $O(n^3)$

- Ao se utilizar uma técnica mais sofisticada, consegue-se diminuir o tempo de obtenção das intersecções até  $O(n \log n)$ , obtendo-se, assim, uma complexidade, para o método, na ordem de  $O(n^2 \log n)$

26

## Algoritmos para a construção de um DV

### Método N° 2 (incremental)

Começar com a construção do Diagrama de Voronoi para dois ou três geradores e depois ir adicionando novos geradores, um de cada vez.

#### PASSO $i+1$

A partir do DV para os  $i$  pontos ( $DV_i$ ) adiciona-se o ponto  $p_{i+1}$  e actualiza-se o  $DV_i$  ( $\rightarrow DV_{i+1}$ ) da seguinte forma:

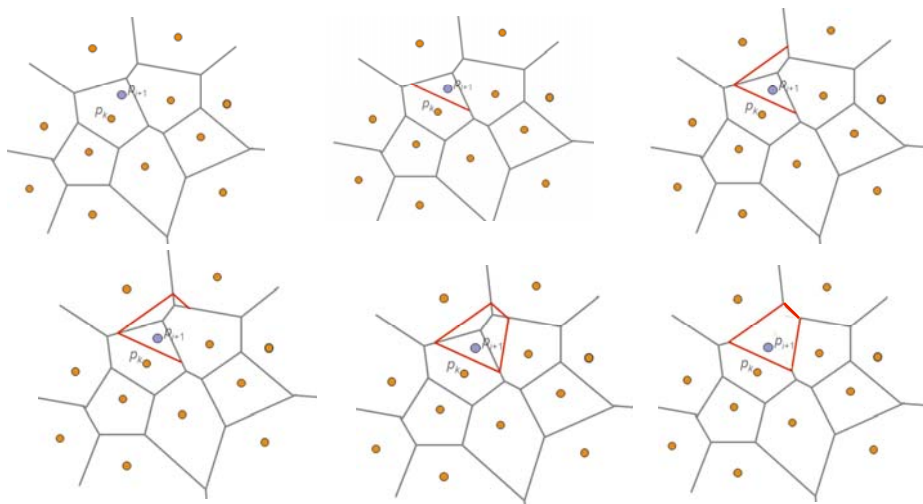
1. Localizar o ponto  $p_{i+1}$  em  $DV_i$ . Seja  $V(p_k)$  a região de  $DV_i$  que contém o ponto  $p_{i+1}$
2. Determinar as mediatrizes entre  $p_{i+1}$  e  $p_k$ , e entre  $p_{i+1}$  e os geradores cuja fronteira é intersectada pelas sucessivas mediatrizes
3. Eliminar as porções das arestas e vértices contidas na região  $V(p_{i+1})$

Complexidade:  $O(n^2)$

27

## Algoritmos para a construção de um DV

### Método N° 2 (incremental)



Applet: <http://www.cs.cornell.edu/Info/People/chew/Delaunay.html>

28

## Algoritmos para a construção de um DV



### Método N° 3 (divisão e conquista)

1. **Dividir** o conjunto  $S$  em dois subconjuntos  $S_1$  e  $S_2$  com aproximadamente o mesmo tamanho.
2. Determinar recursivamente (**conquistar**)  $\text{Vor}(S_1)$  e  $\text{Vor}(S_2)$
3. **Combinar**  $\text{Vor}(S_1)$  e  $\text{Vor}(S_2)$  e determinar  $\text{Vor}(S)$

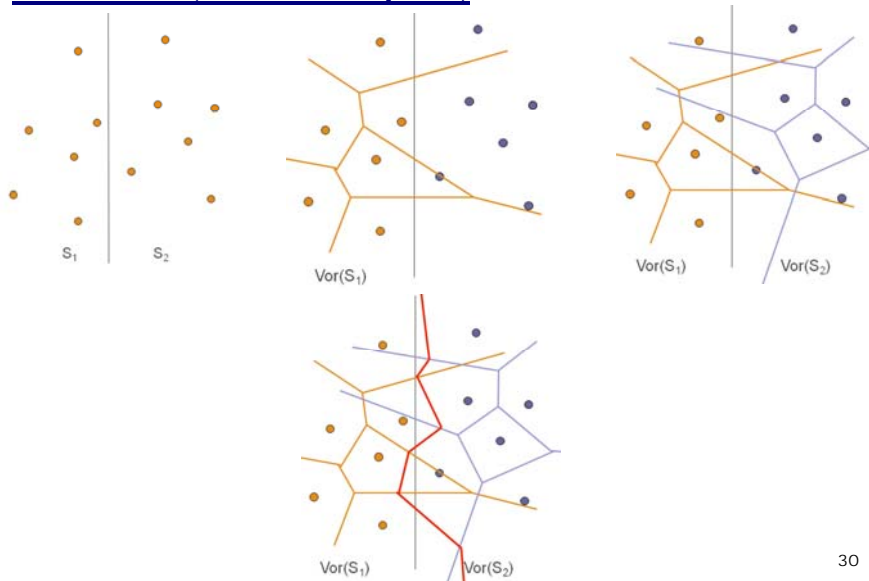
No pior dos casos, este método, tem um gasto temporal na ordem de  $O(n \log n)$  o que é muito bom. No entanto, foi provado por Ohya (1984) que, em média, é também  $O(n \log n)$

29

## Algoritmos para a construção de um DV



### Método N° 3 (divisão e conquista)



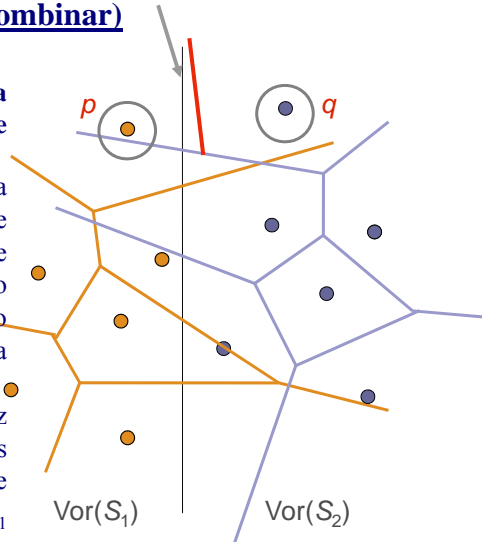
30

## Algoritmos para a construção de um DV

### Método N° 3 (Fase Combinar)

#### I. Determinar a cadeia divisória entre $\text{Vor}(S_1)$ e $\text{Vor}(S_2)$

1. Começar por uma linha divisória vertical que chega desde o infinito e cruza a primeira região (superior) de Voronoi do conjunto  $S_1$  e a primeira (superior) de  $S_2$
2. Determinar a mediatriz entre os geradores das regiões superiores de Voronoi dos conjuntos  $S_1$  e  $S_2$



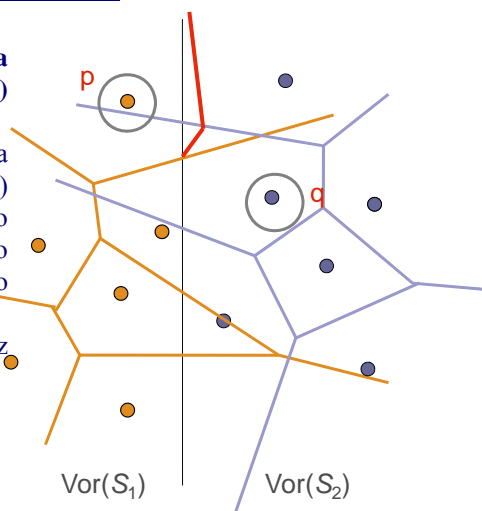
31

## Algoritmos para a construção de um DV

### Método N° 3 (Fase Combinar)

#### I. Determinar a cadeia divisória entre $\text{Vor}(S_1)$ e $\text{Vor}(S_2)$

3. Se a mediatriz intersecta uma aresta do  $\text{Vor}(S_2)$  então actualiza-se o ponto  $q$ , em caso contrário actualiza-se o ponto  $p$ .
4. Determinar a mediatriz entre os geradores  $p$  e  $q$

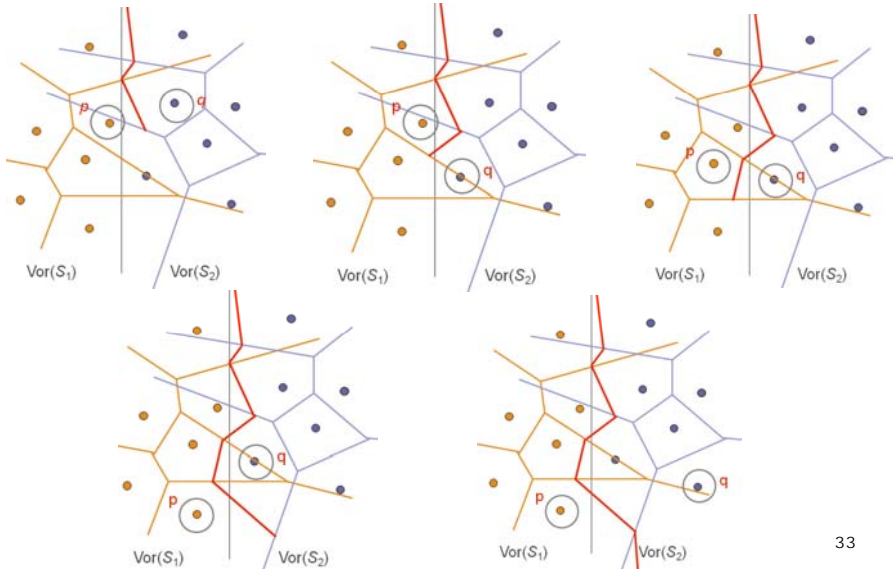


32



## Algoritmos para a construção de um DV

### Método N° 3 (divisão e conquista)



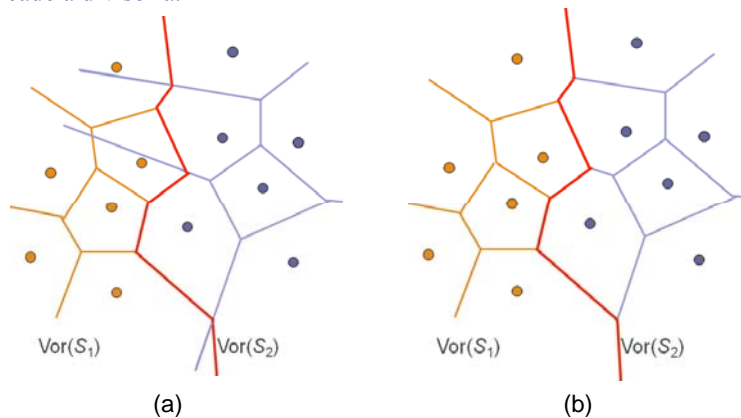
33

## Algoritmos para a construção de um DV

### Método N° 3 (divisão e conquista)



- II. (a) Remover as arestas e vértices de Voronoi de  $Vor(S_1)$  à direita da cadeia divisória.  
(b) Remover as arestas e vértices de Voronoi de  $Vor(S_2)$  à esquerda da cadeia divisória.



34

## Algoritmos para a construção de um DV



### Método N° 4

- O 4º método, que foi apresentado por *Fortune* (1986/87), é o chamado *Método de Varrimento*.
- A estratégia utilizada é a de percorrer o plano, onde se encontram os geradores, com uma linha de varrimento (*sweep line*), que pode percorrer o plano horizontal ou verticalmente.
- Enquanto o plano é percorrido, pela linha de varrimento, vai sendo armazenada a informação relativa à intersecção dessa linha com certos pontos no plano – os geradores.
- A complexidade do algoritmo apresentado por *Fortune* é  $O(n \log n)$
- Pode consultar os detalhes sobre o *Algoritmo de Fortune* em: <http://www.dma.fi.upm.es/mabellanas/voronoi/voronoi/voronoi.html#3.3>
- Applet JAVA do *Algoritmo de Fortune*: <http://www.diku.dk/hjemmesider/studerende/duff/Fortune/>

<http://www.youtube.com/watch?v=dgRA-6Fi6wk>

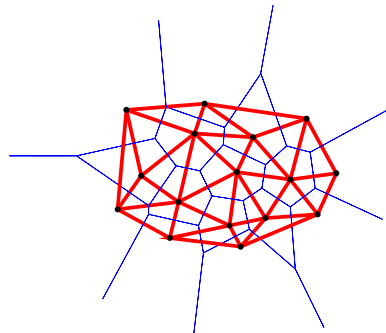
35

## Triangulação de Delaunay



### Definição:

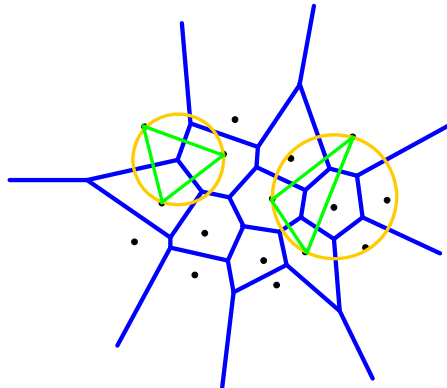
- Considere-se um *Diagrama de Voronoi*,  $Vor(S)$ .
- Se ligarmos todos os pares de pontos (geradores) cujos Polígonos de Voronoi partilham uma aresta, obtemos um grafo.
- Se este grafo consistir apenas em triângulos, a este grafo dá-se o nome de *Triangulação de Delaunay* e será denotado por  $TD(S)$ .
- A cada um dos triângulos chama-se *face* da *Triangulação de Delaunay*
- O  $TD(S)$  é o *grafo dual do DV(S)*



36

## Triangulação de Delaunay

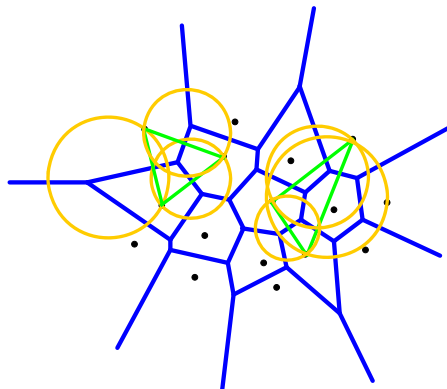
**Teorema 1:** Três pontos  $p_i$ ,  $p_j$  e  $p_k$  de  $S$  são vértices da mesma face da **Triangulação de Delaunay** de  $S$  se e só se o círculo definido por estes pontos não contiver qualquer outro ponto de  $S$ .



37

## Triangulação de Delaunay

**Teorema 2:** Dois pontos  $p_i$  e  $p_j$  de  $S$  formam uma aresta de  $TD(S)$  se e só se existe um círculo que contem  $p_i$  e  $p_j$  na sua fronteira e não contem qualquer outro ponto de  $S$ .



38