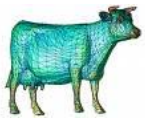
4 . Partição de Polígonos

Antonio L. Bajuelos
Departamento de Matemática
Universidade de Aveiro



Mestrado em Matemática e Aplicações

"Imagination is more important than knowledge"

A. Einstein

Algumas motivações …

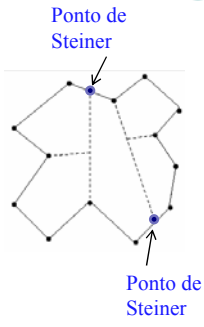
- A ***decomposição*** de um polígono, ou de qualquer outra região, em partes mais simples é útil em muitos problemas.
- Tipos mais comuns: ***triângulos***, ***quadriláteros*** ou ***peças convexas***

Uma decomposição diz-se que é uma partição se as componentes dos sub-polígonos não se sobrepõem, excepto na sua fronteira. Se houver sobreposição de componentes, então dizemos que a decomposição é uma cobertura.

- A ***partição de polígonos*** é usada (por exemplo) na:
  - *Modelação de objectos em aplicações onde a geometria é importante*
  - *O reconhecimento de padrões*
  - *Compressão de dados*
  - *Processamento de imagens*

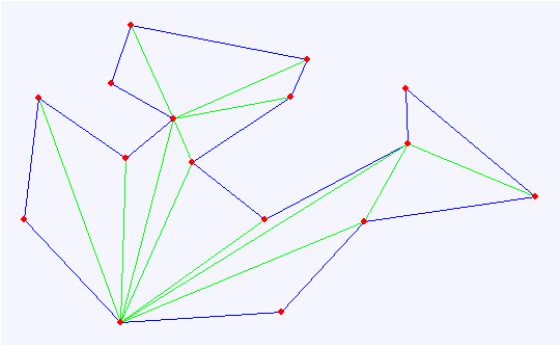
Algumas motivações …

- ***Classes de polígonos*** úteis para a decomposição de polígonos:
  - *convexos*
  - *estrelados*
  - *espirais*
  - *monótonos*
  - *triângulos*
  - *quadrados*
  - *rectângulos e trapézios*
- A decomposição em componentes mais simples, pode ser feita (ou não) com a introdução de vértices adicionais, aos quais chamamos ***pontos de Steiner***
- O uso de ***pontos de Steiner*** tornar a decomposição do polígono mais complexa
- Em geral pretende-se que a decomposição seja minimal.
  - **Exemplo:** *Decompor o polígono num número mínimo de componentes*



Triangulação de Polígonos: O Problema

- *Dado um polígono P, com n vértices, encontrar diagonais que particionem o polígono em triângulos.*
- Da definição da diagonal ⟹ uma diagonal *corta* um polígono simples em exactamente dois sub-polígonos.



Triangulação de Polígonos

Será sempre possível encontrarmos esta partição?

Sim!!!

Triangulação de Polígonos: Existência

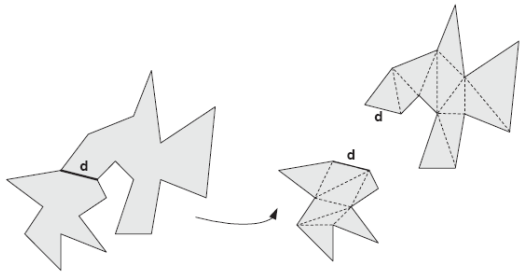
Teorema: (Triangulação de polígonos, Lennes, 1911) ***Todo o polígono admite pelo menos uma triangulação***

Prova:

Seja *P* um polígono simples. A prova é feita por indução sobre o número de vértices do polígono.

Se $n = 3$ o polígono é um triângulo ♦

Seja $n \geq 4$. Pelo lema de *Meister* todo o polígono com pelo menos 4 vértices possui uma diagonal, então *P* possui uma diagonal *d*. O segmento *d* particiona *P* em dois polígonos com menos do que *n* vértices; cada um tendo *d* como aresta.

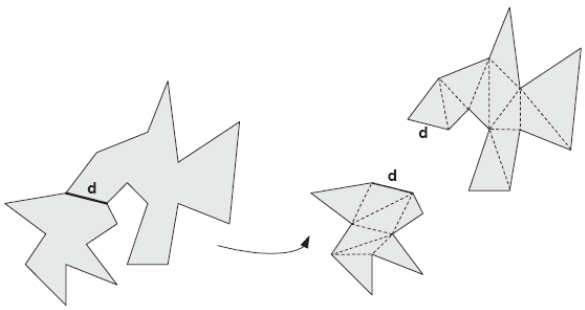


Triangulação de Polígonos:Existência

Teorema: (Triangulação de polígonos) ***Todo o polígono admite pelo menos uma triangulação***

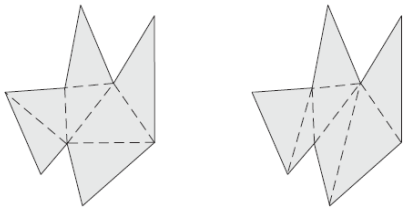
Prova (cont…):

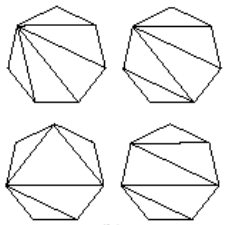
Aplicando a hipótese indutiva temos que cada um desses polígonos pode ser triangulado. Logo, combinando as triangulações de cada um dos polígonos e *d* obtemos uma triangulação de *P* ♦



Triangulação de Polígonos: não é única

- **A triangulação de um polígono pode não ser única.**
  - **Exemplos:**





  - **Muitas?**

Número de Catalan

$$1 \le T_n \le \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2} \qquad T_n = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2} -$$

número de triangulações de um polígono convexo com n vértices

Triangulação de Polígonos: Quantas?

- **Teorema:** **(Número de triângulos de uma triangulação)** ***Qualquer triangulação de um polígono simples P com n vértices tem exactamente n − 2 triângulos.***

  Prova:

  Consideremos uma diagonal qualquer.

  Esta diagonal divide P em dois sub-polígonos, P_1 e P_2 com n_1 e n_2 vértices, respectivamente.

  Cada vértice de P pertence exactamente a um dos dois sub-polígonos, excepto para os dois vértices que definem a diagonal, que pertence a ambos. Então, $n_1 + n_2 = n + 2$.

  Pela indução, qualquer triangulação de P_i tem $n_i - 2$ triângulos o que implica que a triangulação de P tem $(n_1 - 2) + (n_2 - 2) = n - 2$ triângulos. ♦

Triangulação de Polígonos: Quantas?

- **Corolários:**
  - ***Qualquer triangulação de um polígono simples P com n vértices tem exactamente n − 3 diagonais.***

    Prova:

    Imediata do teorema anterior ♦
  - ***A soma dos ângulos internos de um polígono de n vértices é (n-2)π***

    Prova:

    Pelo teorema anterior existem (*n*-2) triângulos numa triangulação de um polígono com *n* vértices.

    Cada triângulo contribui com π para a soma dos ângulos internos ♦

Triangulação de Polígonos: diagonais

Utilizando a definição de diagonal podemos provar facilmente que:

Lema: *Seja* $P = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ *um polígono simples. Então o segmento de recta* $s = v_i v_j$, $i \neq j$ *é uma diagonal de P sse:*

- *para cada aresta* ***e*** *de P, que não é incidente a* v_i *ou* v_j, *temos que* $s \cap \boldsymbol{e} = \varnothing$

e

- $s \subset P$ *numa vizinhança de* v_i *ou de* v_j.

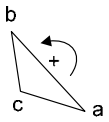
Triangulação de Polígonos: diagonais

- **Os predicados Left e LeftOn**
  - Uma recta pode ser determinada pelo **segmento orientado** *ab*. Então:
    - Se um ponto *c* está à esquerda dessa recta ⇒ o terno (*a*, *b*, *c*) forma um circuito orientado positivamente (**CCW**) ⇒ A(T(*a*, *b*, *c*)) > 0
    - Predicado **Left(a, b, c)** – verdadeiro se *c* está à esquerda da recta determinada pelo segmento orientado *ab*, falso em caso contrario

```
bool Left (a, b, c)
  {
     return Area (T(a, b, c)) > 0;
  }
```

    - Predicado **LeftOn(a, b, c)** – verdadeiro se *c* está à esquerda ou sobre a recta determinada pelo segmento orientado *ab*, falso em caso contrario

```
bool LeftOn (a, b, c)
  {
     return Area (T(a, b, c)) ≥ 0;
  }
```



Triangulação de Polígonos: verificação de diagonal

- O seguinte algoritmo testa se um dado segmento é uma diagonal

Algoritmo Diagonal(P, v[i], v[j])

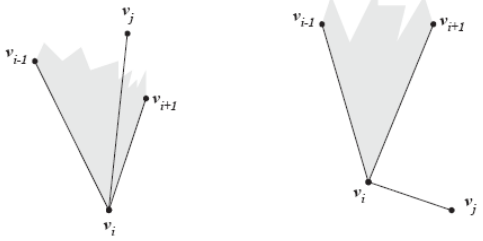
Entrada: um polígono P = {v[0], v[1], …, v[n-1]} e dois vértices v[i] e v[j], i ≠ j
Saída: TRUE se s = v[i]v[j], é uma diagonal de P, FALSE caso contrário
FOR cada aresta(e) de P não incidente a v[i] ou v[j] DO
  IF e ∩ s ≠ ∅ THEN return FALSE
IF v[i] é convexo (LeftON(v[i-1], v[i], v[i+1])= TRUE) THEN
  return (¬ Left(v[j], v[i], v[i-1])) ∧ Left(v[j], v[i], v[i+1])
ELSE
  return ¬(Left(v[i], v[j], v[i-1]) ∧ (¬ Left(v[j], v[i], v[i+1])))

- **Análise:** A complexidade e tempo do **Algoritmo Diagonal** é determinada pela ciclo for i.e. é *O*(*n*).
- **Teorema:** *Seja P um polígono com n vértices e sejam u e v vértices de P. Então determinar se o segmento uv é diagonal leva tempo O*(*n*).

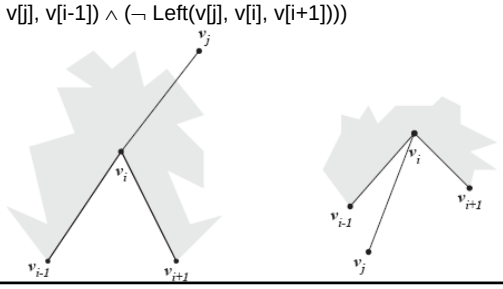
Triangulação de Polígonos

. . . . .

IF **v[i] é convexo** (LeftON(v[i-1], v[i], v[i+1])= TRUE) THEN
return (¬ Left(v[j], v[i], v[i-1])) ∧ Left(v[j], v[i], v[i+1])



ELSE (**v[i] é reflexo**)
return ¬(Left(v[i], v[j], v[i-1]) ∧ (¬ Left(v[j], v[i], v[i+1])))



Triangulação de Polígonos: Algoritmo Ingénuo Nº 1

Algoritmo T1(P)

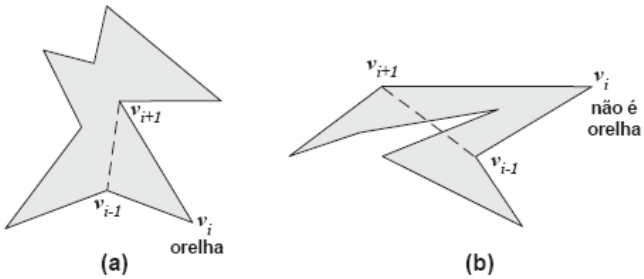
Entrada: um polígono $P = \{v_0, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$, $n > 3$
Saída: uma triangulação de P

```
WHILE não achou diagonal DO
      Seja v[i]v[j] um segmento candidato a diagonal
      IF Diagonal(P,v[i],v[j]) THEN
         achou diagonal
         Traçar a diagonal v[i]v[j]
         Particione P em dois subpolígonos
         P1={v[0],…,v[i],v[j],v[j+1],…,v[n-1]}
         P2={v[i],v[i+1],…,v[j-1],v[j]}
        T1(P1)
        T1(P2)
```

- **Análise:** Existem $\binom{n}{2}$ ⇒ $O(n^2)$ candidatas a diagonal. Testar se um segmento é diagonal é $O(n)$. Repetir estas $O(n^3)$ operações elementares para cada uma das $n-3$ diagonais será um custo de $O(n^4)$

Triangulação de Polígonos: Teoremas das duas orelhas

- Diremos que três vértices consecutivos *u*, *v*, *w* de um polígono formam uma **orelha** se o segmento de recta *vw* é uma diagonal.
- Duas orelhas não se sobrepõem se os seus interiores são disjuntos.



Triangulação de Polígonos: Teoremas das duas orelhas

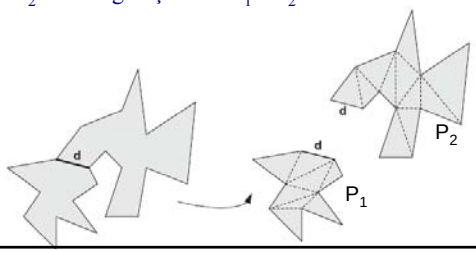
- **Teorema:** (Meister Two Ears Theorem) *Todo polígono com pelo menos 4 vértices possui pelo menos duas orelhas.*

- **Teorema:** *Seja P um polígono com n ≥ 4 vértices e T uma triangulação de P. Então pelo menos dois triângulos de T formam orelhas de P.*

  Prova: (por indução no número de vértices de P)

  Se *n* = 4, P – quadrilátero, os dois triângulos de T são orelhas de P.

  Seja *n* ≥ 5. Partimos P em dois polígonos P_1 e P_2 através de uma diagonal *d* de T. Sejam T_1 e T_2 as triangulações de P_1 e P_2

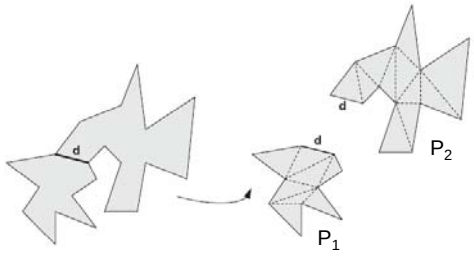


Triangulação de Polígonos: Teoremas das duas orelhas

- **Teorema:** *Seja P um polígono com n ≥ 4 vértices e T uma triangulação de P. Então pelo menos dois triângulos de T formam orelhas de P.*

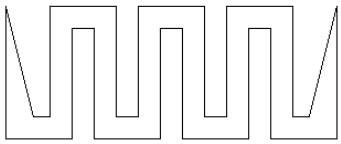
Prova (cont…):

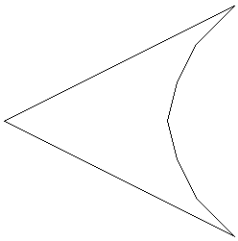
A diagonal *d* não faz parte de pelo menos um dos triângulos de T_1 que formam orelhas de P_1, e que portanto, também forma uma orelha de P. Analogamente, pelo menos um dos triângulos de P_2 forma uma orelha de P. Como estes triângulos são disjuntos, a prova do teorema está completa. ♦



Triangulação de Polígonos: Teoremas das duas orelhas

- Exemplos de polígonos simples com "muitos" vértices e só duas orelhas





Triangulação de Polígonos: Algoritmo Ingénuo Nº 2

- Podemos acelerar o **Algoritmo T1(P)** por um factor de n se explorarmos o ***Teorema das duas Orelhas***.

Algoritmo T2(P) – Triangulação por corte de orelhas, 1975

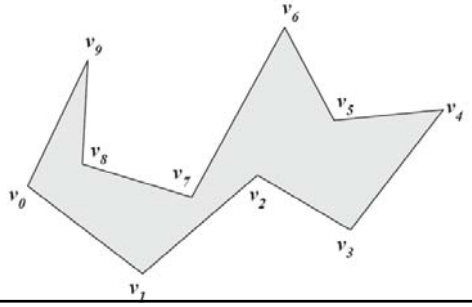
Entrada: um polígono $P = \{v_0, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$, $n > 3$
Saída: uma triangulação de P

1. WHILE n > 3 DO
2. Encontre v[i] tal que E:= Δ(v[i-1],v[i],v[i+1]) é uma orelha
3. Traçar a diagonal v[i-1]v[i+1]
4. P ← P – E /* corta orelha */

- **Análise:** Verificar que um vértice de P é uma orelha é $O(n)$ (utilizando o algoritmo Diagonal. Então a linha 2 (localizar e verificar que um vértice é uma orelha) é no pior dos casos $O(n^2)$. Se o polígono estiver armazenado numa lista circular duplamente ligada, então a linha 3 é $O(1)$. Por tanto a complexidade de tempo deste algoritmo é $O(n^3)$

Triangulação de Polígonos: Exemplo de "corte de orelhas"

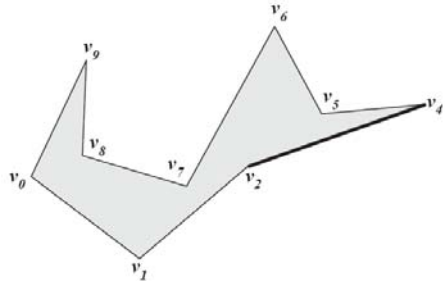
- Pela definição de orelha temos que:
  - **Orelha** – triângulo (T) formado por três vértices consecutivos de P tal que T ⊂ P.
  - Seja $T(v_{i-1}, v_i, v_{i+1})$ uma orelha de P, então v_i é chamado **extremidade de uma orelha**
- Denotemos por:
  - C – conjunto dos **vértices convexos** de P
  - R - conjunto dos **vértices côncavos** de P
  - E - conjunto das **extremidades das orelhas** de P



$C = \{v_0, v_1, v_3, v_4, v_6, v_9\}$
$R = \{v_2, v_5, v_7, v_8\}$
$E = \{v_3, v_4, v_6, v_9\}$

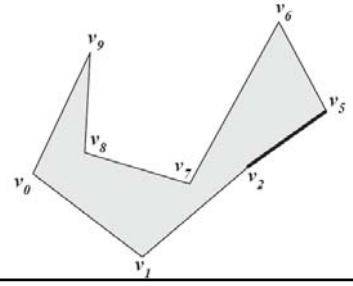
Triangulação de Polígonos: Exemplo de "corte de orelhas"

- **1º passo:** Removemos a primeira orelha: T(v_2, v_3, v_4)



• Actualizamos C, R e E
C = {v_0, v_1, v_4, v_6, v_9}
R = {v_2, v_5, v_7, v_8}
E = {v_4, v_6, v_9}

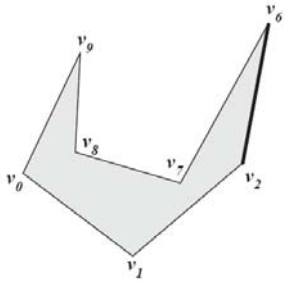
- **2º passo:** Removemos a seguinte orelha: T(v_2, v_4, v_5)



• Actualizamos C, R e E
C = {v_0, v_1, v_5, v_6, v_9}
R = {v_2, v_7, v_8}
E = {v_5, v_6, v_9}

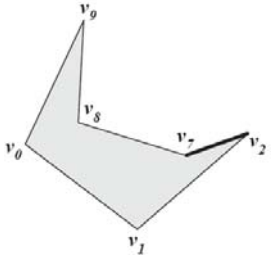
Triangulação de Polígonos: Exemplo de "corte de orelhas"

- **3º passo:** Removemos a seguinte orelha: T(v_2, v_5, v_7)



• Actualizamos C, R e E
C = {v_0, v_1, v_2, v_6, v_9}
R = {v_2, v_7, v_8}
E = {v_4, v_6, v_9}

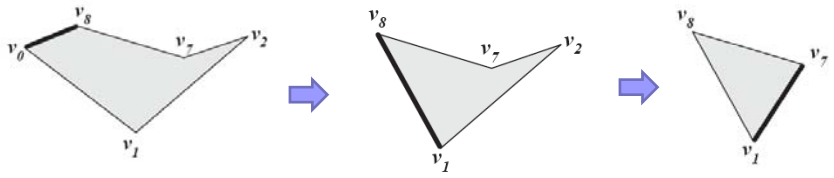
- **4º passo:** Removemos a seguinte orelha: T(v_2, v_6, v_7)



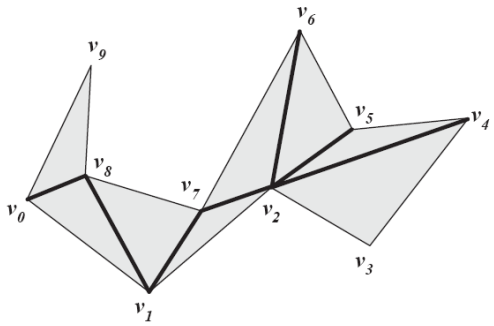
• Actualizamos C, R e E
C = {v_0, v_1, v_2, v_9}
R = {v_7, v_8}
E = {v_9,v_2}

Triangulação de Polígonos: Exemplo de "corte de orelhas"

- **Próximos passos …**

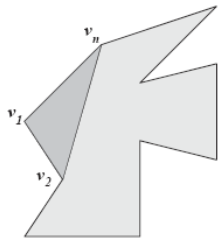


- **Resultado final:**



Triangulação de Polígonos: Algoritmo de Lennes, 1911

- Utiliza a técnica de **inserção recursiva de diagonais**
- **Ideias gerais:**
  - Procurar um vértice v_i que defina com os seus adjacentes (v_{i-1} e v_{i+1}) um ângulo interno convexo. **Então:**
    - Se o $T(v_{i-1}, v_i, v_{i+1})$ não contém outros vértices de P no seu interior ⇨ o segmento $v_{i-1}v_{i+1}$ define uma diagonal
    - Se existe pelo menos um vértice de P no interior de $T(v_{i-1}, v_i, v_{i+1})$ ⇨ o segmento que liga v_i ao vértice mais próximo dele (no interior de $T(v_{i-1}, v_i, v_{i+1})$) define uma diagonal.
  - Após esta verificação o polígono fica dividido em dois: um triângulo e um polígono de $(n-2)$ lados ou dois polígonos de lados maiores ou iguais a 3 ⇨ **podemos aplicar o algoritmo recursivamente até obter somente triângulos**



Triangulação de Polígonos: Algoritmo de Lennes, 1911

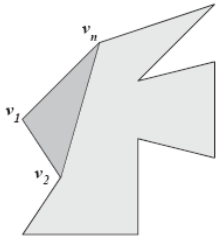
Algoritmo T3(P)

Triangulação por inserção recursiva de diagonais (Lennes, 1911)

Entrada: um polígono $P = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $n > 3$

Saída: uma triangulação de P

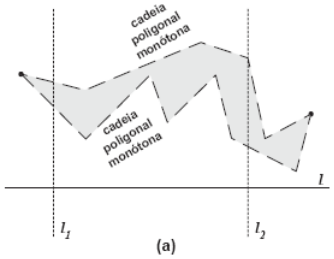
1. Se P for triângulo, Stop
2. Senão, determinar um vértice (suponha sem perda da generalidade que seja v_1) tal $\angle v_n v_1 v_2$ seja convexo. Então
3. Se o conjunto V dos vértices de P que estão dentro do $T(v_n, v_1, v_2)$ for vazio então:
4. Faça $V_1 = \{v_1, v_2, v_n\}$ e $V_2 = \{v_2, v_3, \ldots, v_n\}$
5. Senão, determinar o vértice $v_k \in V$ "mais próximo" de v_1
6. Faça $V_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ e $V_2 = \{v_1, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$
7. Aplique recursivamente o algoritmo a V_1 e V_2



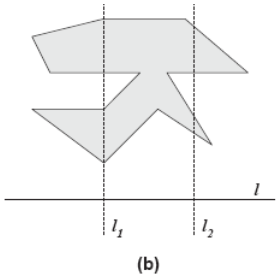
- **Análise:** Cada execução do passo 3 é $O(n)$ e gera uma das (n-3) diagonais da triangulação. Logo o algoritmo é $O(n^2)$

Triangulação de Polígonos Monótonos

- Um **polígono** diz-se **monótono** em relação à recta l se, para toda a recta l' perpendicular a l, a intersecção do polígono com l' é conexa, isto é, a intersecção é um segmento de recta, um ponto ou o conjunto vazio.
  - Ou ainda, um **polígono** diz-se **monótono** em relação à recta l se a sua fronteira for composta por duas curvas poligonais (ou cadeias) monótonas em relação à recta l.



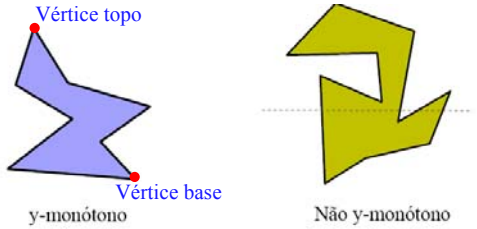
Polígono monótono (em relação a l)



Polígono não monótono (em relação a l)

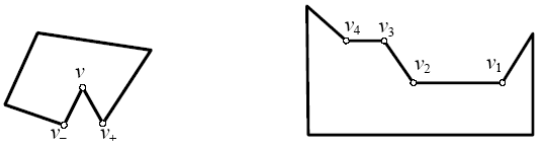
Triangulação de Polígonos Monótonos

- Um **polígono monótono** em relação ao eixo dos *xx´*s e em relação ao eixo dos *yy´*s diz-se ***x*-monótono** e ***y*-monótono**, respectivamente.
- Na prática a monotonia é usada apenas em relação aos eixos coordenados.
- A fronteira de um **polígono *y*-monótono** é composta por duas cadeias monótonas: a cadeia direita e a cadeia esquerda.
  - Cada cadeia tem como extremos o vértice mais baixo (**base**) e o vértice mais alto (**topo**) do polígono, e contém zero ou mais vértices entre estes extremos.



Triangulação de Polígonos Monótonos

- Uma **ponta interior** de um polígono é um vértice reflexo *v* cujos vértices adjacentes v_- e v_+ estão acima ou abaixo de *v* (pelo menos um deles tem de estar estritamente acima ou abaixo).



- **Lema:** *Um polígono é y-monótono se não possui pontas interiores.*
- **Teorema:** *Um polígono com n vértices pode ser particionado em polígonos y-monótonos em tempo **O(n log n)** por um algoritmo que usa espaço **O(n)***

Nota: o algoritmo pode ser encontrado, por exemplo, em:
http://www.ime.usp.br/~coelho/mac747/material.html

Triangulação de Polígonos Monótonos

- **Importante!!!**
  - *Um facto fundamental do ponto de vista de algoritmos envolvendo polígonos y-monótonos é que os seus vértices podem ser ordenados em relação às suas y-coordenadas em tempo linear.*

Justificação:

- Para se obter uma ordenação $u_1, \ldots, u_n$ dos vértices de P em relação às suas y-coordenadas, podemos proceder da seguinte forma:
  - Encontrar um vértice mais alto e um vértice mais baixo de P. [Pode-se executar este passo em tempo $O(n)$, simplesmente percorrendo a lista de vértices de P]
  - Particionar fr(P) em duas cadeias y-monótonas (a cadeia esquerda e a cadeia direita). [Este passo gasta tempo $O(1)$]
  - Intercalar (*merge*) as duas cadeias para formar uma lista dos vértices ordenados em relação às suas y-coordenadas. [O conhecido algoritmo de intercalação* gasta tempo $O(n)$]

* ver **http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/mrgsrt.html**

Triangulação de Polígonos Monótonos

- Seja P um polígono ***y*-monótono** com n vértices. Assumimos que P é estritamente y-monótono.
  - ⇨ Iremos sempre para baixo quando percorremos a cadeia poligonal esquerda ou direita de P, desde o vértice de maior y até ao de menor y.
- Propriedade importante dos polígonos monótonos que permitem simplificar a triangulação:
  - ***podemos trabalhar em P desde cima até baixo em ambas as cadeias, adicionando diagonais sempre que seja possível.***
- O algoritmo de triangulação de polígonos monótonos utiliza uma estrutura de dados em forma de **pilha**
- Quando processamos um vértice adicionamos o maior número possível de diagonais deste vértice até os vértices que se encontram na pilha. Estas diagonais dividem P em triângulos

Triangulação de Polígonos Monótonos

Algoritmo T4(P) - Triangulação de polígonos monótonos

Entrada: um polígono $P = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $n > 3$, y-monótono

Saída: uma triangulação de P

1. Ordenar os vértices v[1], ..., v[n] por ordem decrescente de y-coordenadas.
   Sejam u[1], ..., u[n] os vértices nessa ordenação.
   [Este passo gasta tempo $O(n)$, como vimos anteriormente]
2. Iniciar com a cadeia reflexa S com os dois vértices mais altos, ou seja, S (pilha) ← (u[1](base), u[2](topo))
3. FOR i = 3,..., n DO
   Sejam s[1],..., s[t] os vértices em S da base até ao topo da pilha (s[1] é o vértice mais alto da cadeia reflexa e s[t] é o mais baixo).

   Caso (a): u[i] é adjacente a s_t, mas não é adjacente a s[1].
   Enquanto $t > 1$ e o ângulo $\angle$u[i]s[t]s[t-1] $< \pi$, traçar a diagonal u[i]s[t-1], desempilhar s[t] e diminuir t de uma unidade. O algoritmo usa o facto de que $\angle$ u[i]s[t]s[t-1] $< \pi$ somente se:
   (1) u[i] está à direita do segmento s[t-1]s[t] se u[i] pertence à cadeia direita;
   (2) u[i] está à esquerda do segmento s[t-1]s[t] se u[i] pertence à cadeia esquerda.

Triangulação de Polígonos Monótonos

Algoritmo T4(P) - Triangulação de polígonos monótonos

Exemplo:

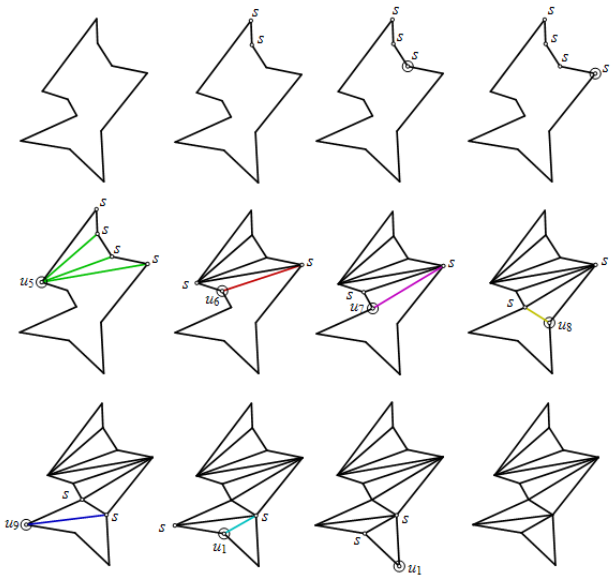
Caso (b): u[i] é adjacente a s_1, mas não é adjacente a s[t]. Traçar as diagonais u[i]s[2], u[i]s[3], ... , u[i]s[t]. Desempilhe todos os vértices em S e empilhe s[t] seguido de u[i]. (Note-se que o polígono determinado pelos vértices u[i], s[1],..., s[t] possui uma única triangulação).

Caso c): u_i é adjacente a s[1] e a s[t].
Neste caso u[i] = u[n] e o polígono P_{i-1} determinado pelos vértices u[i], s[1], ..., s[t] possui uma única triangulação. Traçar as diagonais u[i]s[2], u[i]s[3], ... , u[i]s[t-1] e parar.

Triangulação de Polígonos Monótonos

Algoritmo T4(P) - Triangulação de polígonos monótonos

Exemplo:



Triangulação de Polígonos Monótonos

Algoritmo T4(P) - Triangulação de polígonos monótonos

- **Análise da complexidade do algoritmo:**
  - O ciclo **for** é executado $n - 2$ vezes.
  - Observação Importante:
    - Em cada execução do ciclo **for** são executadas no máximo duas operações **empilha**. Assim, o número total de operações **empilha** executadas pelo algoritmo durante toda a sua execução é limitado por $2n - 2$ incluindo os dois **empilha** executados no passo 2.
    - Portanto, como o número de execuções da operação **desempilha,** ao longo da execução do algoritmo, não pode exceder o número de operações **empilha**, o tempo total gasto pelo ciclo **FOR** é $O(n)$.

- **Teorema:** *Um polígono y-monótono com n vértices pode ser triangulado em tempo linear*

Triangulação de Polígonos Simples em $O(n \log n)$

Ideias do algoritmo:

- **Decompor o polígono dado em polígonos *y*-monótonos**, aplicando o algoritmo para partição de polígonos em partes monótonas;
- **Triangular cada um dos polígonos *y*-monótonos** obtidos, aplicando o algoritmo triangular polígono *y*-monótonos.

- **Teorema:** *Um polígono simples com n vértices pode ser triangulado em tempo **O(n log n)** por um algoritmo que usa espaço **O(n)***

O estudo das triangulações não fica por aqui …

Running Time	Designers	Year	Technique
$O(n^2)$	*Lennes*	1911	Recursive diagonal insertion
$O(n^3)$	*Meisters*	1975	Ear cutting
O(n log n)	*Garey, Johnson, Preparata & Tarjan*	1978	Decomposition into monotone pieces
O(n log n)	*Chazelle*	1982	Divide & Conquer
O(n + r log r) where r is the # of reflex vertices of the Polygon	*Hertel & Mehlhorn*	1983	-
O(n log s) where s is the sinuosity of P	*Chazelle*	1983	-
O(n log log n)	*Tarjan & Van Wyk*	1987	Using involved data structures
O(n (1 + to)) where to is the # of free triangles in the output triangulation.	*Toussaint*	1988	Sleeve-searching (Output sensitive)
$O(n^2)$	*ElGindy, Everett & Toussaint*	1990	Finding an ear in linear time via prune & search
O(n)	*Chazelle*	1990	-
O(kn)	Kong, Everett & *Toussaint*	1990	Graham Scan