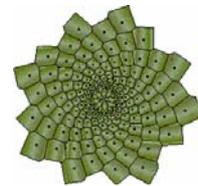




7. Problemas de Proximidade: Diagramas de Voronoi

António Leslie Bajuelos
Departamento de Matemática
Universidade de Aveiro



Mestrado em Matemática e Aplicações

Introdução



- A origem do conceito de **Diagrama de Voronoi** não é conhecida.
- As estruturas deste tipo **aparecem na Natureza** de tal forma que não devem ter passado despercebidas aos primeiros cientistas ou mesmo a leigos observadores.



carapaça de tartaruga



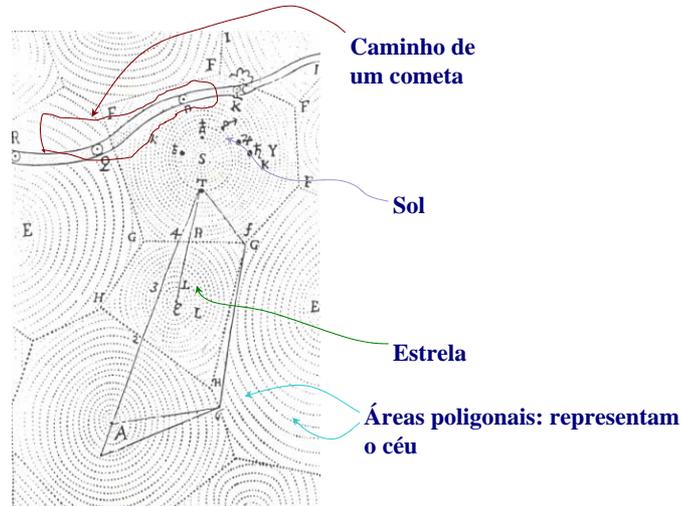
corpo de girafa



deserto

Histórico

- 1644 - Descartes recorre aos **Diagramas de Voronoi** para mostrar a disposição da matéria no sistema solar;



3

Histórico (cont...)

- 1850 - 1908 **Peter Dirichlet** e **Georgy Voronoi** (1868-1908), discutem pela primeira vez os diagramas de Descartes
- 1911 - **Thiessen** usa as regiões de **Voronoi** como uma ajuda preciosa à estimação de regiões de precipitação;
- 1921 - **Davis** e **Harding** recorrem aos diagramas para a estimação de reservas de minério em certos depósitos;
- 1960 - Os diagramas vieram a ser uma ajuda preciosa no campo da ecologia, para obtenção de estimativas de concentrações de árvores em florestas;
- 1970 - Desenvolvem-se alguns algoritmos para a construção dos diagramas em 2 e 3 dimensões;
- 1975- **Shamos** e **Hoey** apresentam um algoritmo do tipo *dividir-para-conquistar* para construir os diagramas

4

Histórico (cont...)



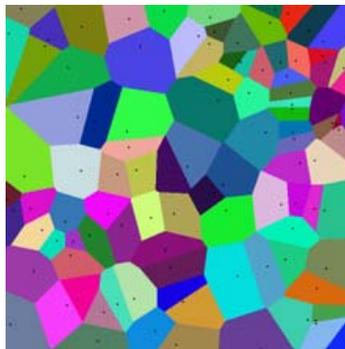
- ❑ 1989 - **Fortune** desenvolve um algoritmo por *varrimento* (plane-sweep-algorithm), muito elegante e de simples complexidade;
- ❑ 1989 - **Klein** introduz a generalização do conceito de **Diagrama de Voronoi**, através dos Diagramas de Voronoi *abstractos*, que já não eram baseados no conceito de distância, mas sim bissetriz;
- ❑ 1992- **Okabe**, **Boots** e **Sugihara** introduzem os diagramas de Voronoi *generalizados*, que usavam uma função característica para construir a partição do plano, em vez de métricas ou curvas bissetrizes.

5

Definições e observações gerais



- ❑ **Definição (informal):** Dado um conjunto de pontos (geradores) no plano, um **Diagrama de Voronoi** não é mais do que uma subdivisão desse plano em regiões formadas pelos lugares mais próximos a cada um dos pontos.



6

Definições e observações gerais



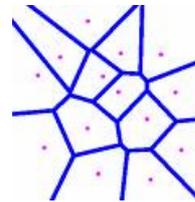
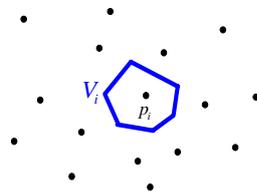
Seja $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ um conjunto de pontos de \mathbb{R}^2 . Os pontos de S denominam-se por **geradores** (ou **sítios**).

Definição: Chama-se **região de Voronoi** (ou **polígono de Voronoi**) associada ao gerador p_i de S e representa-se por $V(p_i)$ ou V_i , ao conjunto definido por:

$$V(p_i) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(p_i, x) \leq d(p_j, x); 1 \leq j \leq n\}$$

onde d denota a distância (Euclidiana) em \mathbb{R}^2

- Note que um **Polígono de Voronoi** pode ser uma região do plano não limitada (neste caso algumas das arestas do polígono podem ser semi-rectas).

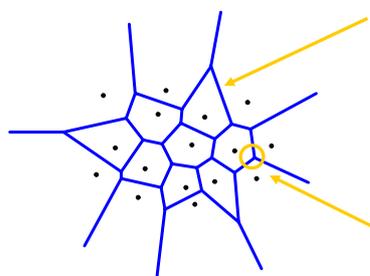


7

Definições e observações gerais



Ao conjunto definido por $\text{Vor}(S) = \{V(p_1), V(p_2), \dots, V(p_n)\}$ chama-se **Diagrama de Voronoi (DV)**



Arestas de Voronoi – Pontos do plano que estão mais próximos de dois geradores do que outros quaisquer

Vértices de Voronoi – pontos do plano que estão tão próximos de três geradores do que outros quaisquer

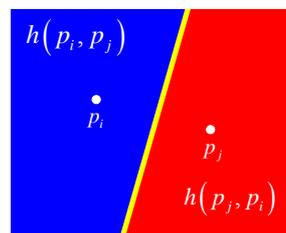
8

Definições e observações gerais



■ Observações:

- Dados dois pontos p_i e p_j do plano, o conjunto dos pontos mais próximos de p_i do que de p_j é o semi-plano que contém p_i e é definido pela mediatriz do segmento $p_i p_j$. Esse semi-plano será denotado por $h(p_i, p_j)$ e o semi-plano que contém p_j será denotado por $h(p_j, p_i)$



9

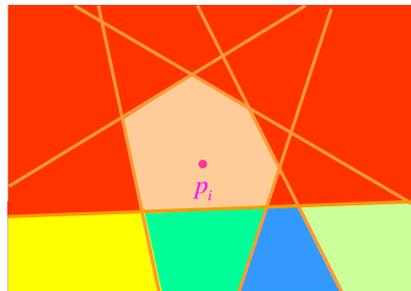
Definições e observações gerais



■ Observações:

- $V(p_i)$ é a intersecção de $n - 1$ semi-planos e, conseqüentemente, é uma **região poligonal convexa** com, no máximo, $n - 1$ arestas e vértices.

$$V(p_i) = \bigcap_{i \neq j} h(p_i, p_j)$$

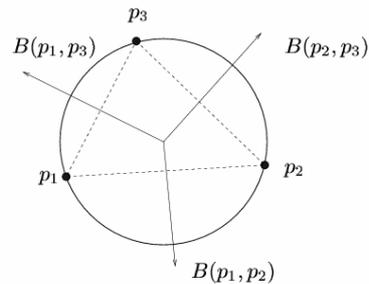


10

Definições e observações gerais



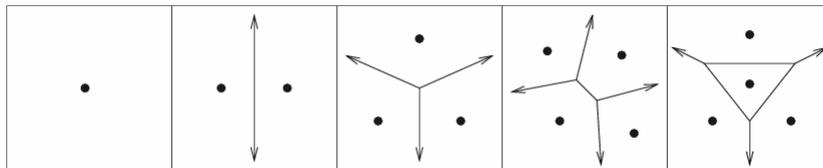
- **Definição:** Para um par de geradores distintos p_i e p_j e $B(p_i, p_j)$ denota-se por a recta mediatriz e ortogonal ao segmento $p_i p_j$
- Os pontos em $B(p_i, p_j)$ são equidistantes a p_i e a p_j
- A figura a seguir mostra um **diagrama de Voronoi** para três pontos não colineares.



- Vamos supor que:
 - **Não existem três pontos colineares**
 - **Nenhum conjunto de quatro pontos é co-circular**

11

Alguns Diagramas de Voronoi com até 4 geradores



Applet Java em:

<http://www.dma.fi.upm.es/mabellanas/voronoi/applet/voronoi-jar.html>

12

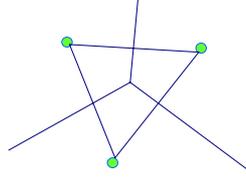
Construção do DV para três pontos



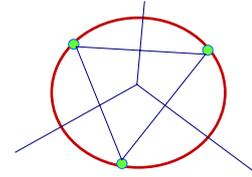
Considerem-se os pontos p_1, p_2 e p_3 :



São dados três pontos no plano



- Unimos os três geradores;
- Calculamos a mediatriz de cada segmento;



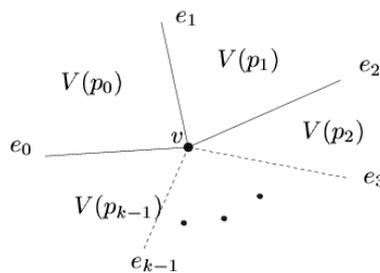
- Da intersecção das mediatrizes resulta um ponto que é o centro de uma circunferência que contem os três geradores;

13

Propriedades dos Diagramas de Voronoi



Teorema 1: Se v é um vértice de Voronoi (ou seja, um vértice de um Diagrama de Voronoi) então v está na intersecção de três arestas de Voronoi.



14

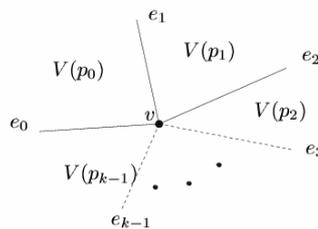
Propriedades dos Diagramas de Voronoi



Teorema 1: (Prova)

Um vértice de **Voronoi** é, por definição, a intersecção de arestas de **Voronoi**. Sejam e_0, e_1, \dots, e_{k-1} , ($k \geq 3$) as arestas, incidentes no vértice v . **Pretende-se provar que $k = 3$** (ver Figura)

A aresta e_i é comum aos $V(p_{i-1})$ e $V(p_i)$ com $i = 1, \dots, k-1$. Como v pertence à aresta e_i então v é equidistante a p_{i-1} e p_i com $i = 1, \dots, k-1$. Logo v é equidistante a p_0, p_1, \dots, p_{k-1} e portanto estes pontos são co-circulares. Como assumimos que em S não existem quatro pontos co-circulares temos que $k \leq 3$. Suponhamos que $k = 2$ então e_0 e e_1 são arestas partilhadas por $V(p_0)$ e $V(p_1)$. Por definição estas arestas pertencem à mediatriz do segmento p_0p_1 e portanto e_0 e e_1 não se intersectam no vértice v , uma contradição. Logo $k = 3$ e v está na intersecção de três arestas. ♦



15

Propriedades dos Diagramas de Voronoi



Teorema 1: Se v é um **vértice de Voronoi** (ou seja, um vértice de um **Diagrama de Voronoi**) então v está na intersecção de três arestas de Voronoi.



Os vértices de Voronoi são o centro de círculos definidos por três pontos do conjunto S e, portanto, o **Diagrama de Voronoi** é regular de grau três. Esse círculo denota-se por $C(v)$.

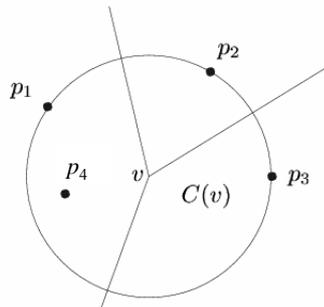
16

Propriedades dos Diagramas de Voronoi



Teorema 2: (circulo circunscrito) Para cada vértice v , o interior do círculo $C(v)$ não contém nenhum outro gerador.

Prova: Sejam p_1, p_2 e p_3 três geradores de S que determinam o círculo $C(v)$. Se $C(v)$ contém outro gerador, digamos p_4 , então v é mais próximo de p_4 do que p_1, p_2 e p_3 . O que resultaria numa contradição pois assumimos que v era um ponto comum a $V(p_1), V(p_2)$ e $V(p_3)$ ♦



17

Propriedades dos Diagramas de Voronoi



- O **teorema do círculo circunscrito** estabelece uma **relação bijectiva** entre o centro do círculo que contém três geradores na sua fronteira e os **vértices de Voronoi**
- ➔ Algoritmo elementar para encontrar todos os **vértices de Voronoi** de um DV para um dado conjunto S :

Para cada tripla de pontos (p_i, p_j, p_k) , $1 \leq i < j < k \leq n$ se o círculo que contém p_i, p_j e p_k na sua fronteira não contém nenhum outro ponto do conjunto S no seu interior, então o centro do círculo é um **vértice de Voronoi**

18

Propriedades dos Diagramas de Voronoi



Teorema 3: (círculo vazio) Sejam p e q dois geradores distintos de S . As regiões $V(p)$ e $V(q)$ possuem uma aresta comum se e só se existe um círculo que contém p e q e tal que todos os demais geradores são exteriores a este círculo.

Prova:

Os polígonos $V(p)$ e $V(q)$ possuem arestas comuns se existirem pontos que são equidistantes a p e a q e além disso estão mais próximos de p e q do que outro par de geradores qualquer.

Isto implica que $V(p)$ e $V(q)$ têm uma aresta comum se e só se existe um círculo que contém p e q e exclui todos os demais geradores (considere-se um círculo $C(x)$ em que x é um ponto interior da aresta partilhada por $V(p)$ e $V(q)$ e com raio $d(x,p) = d(x,q)$). ♦

19

Propriedades dos Diagramas de Voronoi

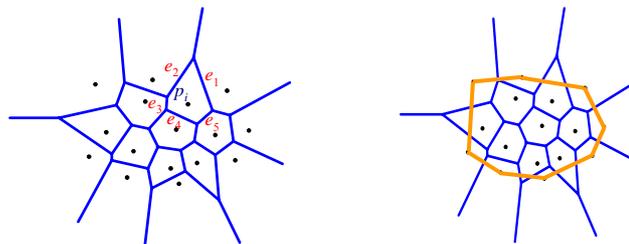


Teorema 4: A região de Voronoi, $V(p_i)$, é limitada sse p_i pertence ao interior do invólucro convexo de S ($\text{conv}(S)$).

Prova:

← (procurar na literatura da disciplina)

→ Suponhamos que $V(p_i)$ é limitada e sejam e_1, e_2, \dots, e_k ($k \geq 3$) as arestas de $V(p_i)$ listadas em sentido anti-horário. Cada aresta e_j ($j = 1, \dots, k$) por definição está contida em alguma mediatriz de um segmento $p_i'p_i''$, onde $p_i' \in S$. Assim tem-se que p_i é um ponto no interior do $\text{conv}(p_1', p_2', \dots, p_k')$. ♦



20

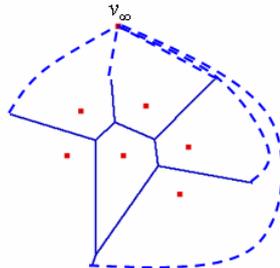


Propriedades dos Diagramas de Voronoi

Teorema 5: Um diagrama com n ($n > 2$) geradores não tem mais de $2n-5$ vértices e $3n-6$ arestas.

Prova: Sabe-se que, para qualquer grafo planar conexo com m_r -regiões, m_v -vértices e m_e -arestas: $m_v - m_e + m_r = 2$ - Fórmula de Euler (1)

No entanto, não podemos aplicar esta fórmula directamente a $\text{Vor}(S)$, porque $\text{Vor}(S)$ tem arestas “semi-infinitas” pelo que não é propriamente um grafo. Para remediar a situação acrescenta-se um vértice v_∞ “no infinito” ao conjunto dos vértices e considera-se que todas as arestas semi-infinitas de $\text{Vor}(S)$ estão ligadas a este vértice:

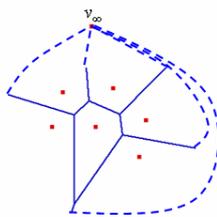


21



Propriedades dos Diagramas de Voronoi

Prova (Teorema 5, cont...): $m_v - m_e + m_r = 2$ (1)



Obtém-se assim, um grafo planar conexo ao qual podemos aplicar a Fórmula de Euler (1). Considere-se n_v o número de vértices, n_e o número de arestas e n o número de sítios de $\text{Vor}(S)$. Então: $(n_v + 1) - n_e + n = 2$ (2)

Cada aresta no grafo aumentado tem exactamente dois vértices, então se adicionarmos o grau de todos os vértices obtemos o dobro do número de arestas, uma vez que o grau de um vértice corresponde ao número de arestas que nele incidem. Como cada vértice, incluindo o v_∞ , tem, no mínimo, grau três pelo **Teorema 1** então tem-se que: $2n_e \geq 3(n_v + 1)$ (3) e obtemos

$$(n_v + 1) \leq \frac{2}{3}n_e \Leftrightarrow n_e \geq \frac{3}{2}(n_v + 1) \quad (4) \quad \text{Juntando (2) e (4) obtemos que:}$$

$$\frac{2}{3}n_e - n_e \geq 2 - n \Leftrightarrow 2n_e - 3n_e \geq 6 - 3n \Leftrightarrow n_e \leq 3n - 6$$

$$(n_v - 1) - \frac{3}{2}(n_v + 1) \geq 2 - n \Leftrightarrow 2(n_v + 1) - 3(n_v + 1) \geq 4 - 2n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n_v + 1 \leq 2n - 4 \Leftrightarrow n_v \leq 2n - 5 \quad \blacklozenge$$

22

Algoritmos para a construção de um DV



Método N° 1

- Seja $S = \{p_1, \dots, p_n\}$ o conjunto de pontos geradores e $DV = \{V(p_1), \dots, V(p_n)\}$ o **Diagrama de Voronoi**. Então um DV é o processo de gerar os $V(p_i)$ através de S .
- O **1° método** trata o problema de uma forma muito simples, recorrendo a uma das definições de **Diagrama de Voronoi** que se baseia na intersecção de semi-planos:

O polígono de Voronoi, associado ao gerador p_i , é a intersecção de todos os semi-planos delimitados pelas mediatrizes aos segmentos de recta entre p_i e os outros geradores.

De acordo com esta definição constrói-se os *polígonos de Voronoi*, um por um, obtendo o seguinte método:

23

Algoritmos para a construção de um DV (cont...)



Método N° 1 (cont...)

Entrada: n geradores p_1, \dots, p_n

Saída: Diagrama de Voronoi $V = \{V(p_1), \dots, V(p_n)\}$

Passo 1: Para cada i , com $i=1, \dots, n$, gerar $n-1$ semi-planos $H(p_i, p_j)$, $1 \leq j \leq n$, $i \neq j$ e construir a sua intersecção, que origina $V(p_i)$

Passo 2: Devolver $\{V(p_1), \dots, V(p_n)\}$ como saída e parar

24

Algoritmos para a construção de um DV



Método N°1 (cont...)

Eficiência:

- Construir um semi-plano $H(p_i, p_j)$ para dois pontos dados requer um gasto de tempo constante. Consequentemente, para cada p_i , o tempo necessário para construir $n-1$ semi-planos é $O(n)$.
- A intersecção de semi-planos seria processada do seguinte modo:
 - *intersectar dois semi-planos obtendo-se um polígono com dois lados;*
 - *intersectar este polígono com o terceiro semi-plano e assim sucessivamente.*
- No k -ésimo passo temos a intersecção do k -ésimo polígono (que no pior dos casos terá k -ésimos lados) com um novo semi-plano o que requer um tempo, pelo menos, proporcional a k (pois temos que verificar a intersecção, do novo semi-plano, com os k lados do polígono).

25

Algoritmos para a construção de um DV



Método N°1 (cont...)

Eficiência (cont...):

- Sendo assim, construir a intersecção de $n-1$ semi-planos requer um tempo proporcional a:

$$1 + 2 + \dots + (n-1) \rightarrow O(n^2)$$

Repetindo o processo para todos os geradores, obtemos o total de tempo requerido por este método que é $O(n^3)$

- Ao se utilizar uma técnica mais sofisticada, consegue-se diminuir o tempo de obtenção das intersecções até $O(n \log n)$, obtendo-se, assim, uma complexidade, para o método, na ordem de $O(n^2 \log n)$

26

Algoritmos para a construção de um DV

Método N° 2 (incremental)

Começar com a construção do **Diagrama de Voronoi** para dois ou três geradores e depois ir adicionando novos geradores, um de cada vez.

PASO $i + 1$

A partir do DV para os i pontos (DV_i) se adiciona o ponto p_{i+1} e actualiza-se o DV_i ($\rightarrow DV_{i+1}$) da seguinte forma:

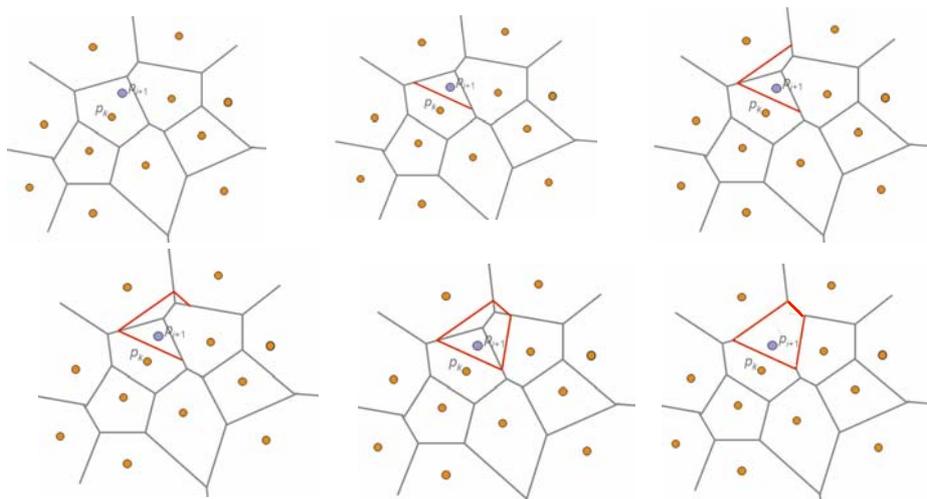
1. Localizar o ponto p_{i+1} em DV_i . Seja $V(p_k)$ a região de DV_i que contém o ponto p_{i+1}
2. Determinar as mediatrizes entre p_{i+1} e p_k , e entre p_{i+1} e os geradores cuja fronteira é intersectada pelas sucessivas mediatrizes
3. Eliminar as porções das arestas e vértices contidas na região $V(p_{i+1})$

Complexidade: $O(n^2)$

27

Algoritmos para a construção de um DV

Método N° 2 (incremental)



Applet: <http://www.cs.cornell.edu/Info/People/chew/Delaunay.html>

28

Algoritmos para a construção de um DV



Método N° 3 (divisão e conquista)

1. **Dividir** o conjunto S em dois subconjuntos S_1 e S_2 de aproximadamente o mesmo tamanho.
2. Determinar recursivamente (**conquistar**) $\text{Vor}(S_1)$ e $\text{Vor}(S_2)$
3. **Combinar** $\text{Vor}(S_1)$ e $\text{Vor}(S_2)$ e determinar $\text{Vor}(S)$

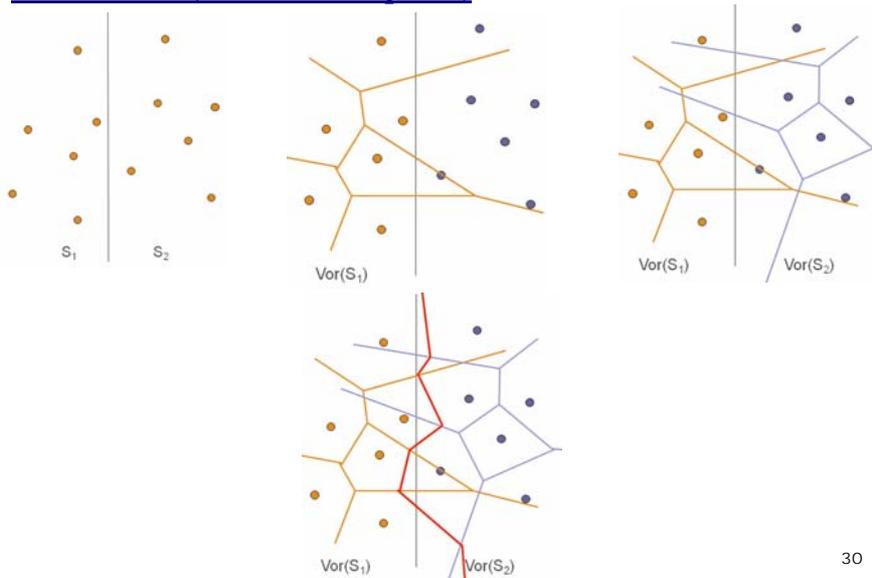
No pior dos casos, este método, tem um gasto temporal na ordem de $O(n \log n)$ o que é muito bom. No entanto, foi provado por Ohya (1984) que, em média, é também $O(n \log n)$

29

Algoritmos para a construção de um DV



Método N° 3 (divisão e conquista)



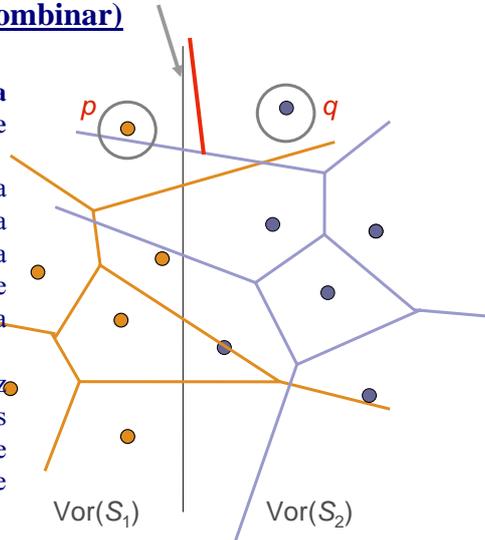
30

Algoritmos para a construção de um DV

Método N° 3 (Fase Combinar)

I. Determinar a cadeia divisória entre $\text{Vor}(S_1)$ e $\text{Vor}(S_2)$

1. Começar por uma linha divisória vertical que chega desde o infinito e cruza a primeira região (superior) de Voronoi do conjunto S_1 e a primeira (superior) de S_2
2. Determinar a mediatriz entre os geradores das regiões superiores de Voronoi dos conjuntos S_1 e S_2



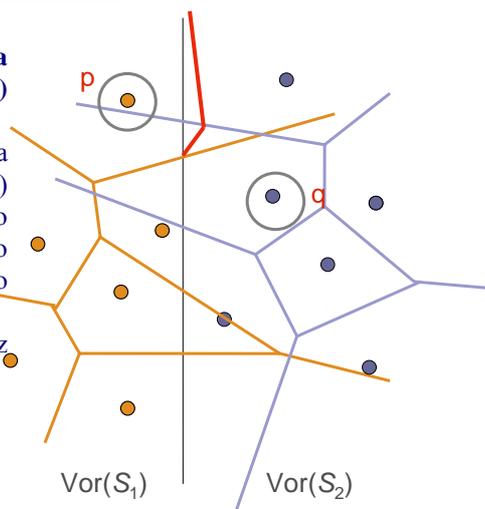
31

Algoritmos para a construção de um DV

Método N° 3 (Fase Combinar)

I. Determinar a cadeia divisória entre $\text{Vor}(S_1)$ e $\text{Vor}(S_2)$

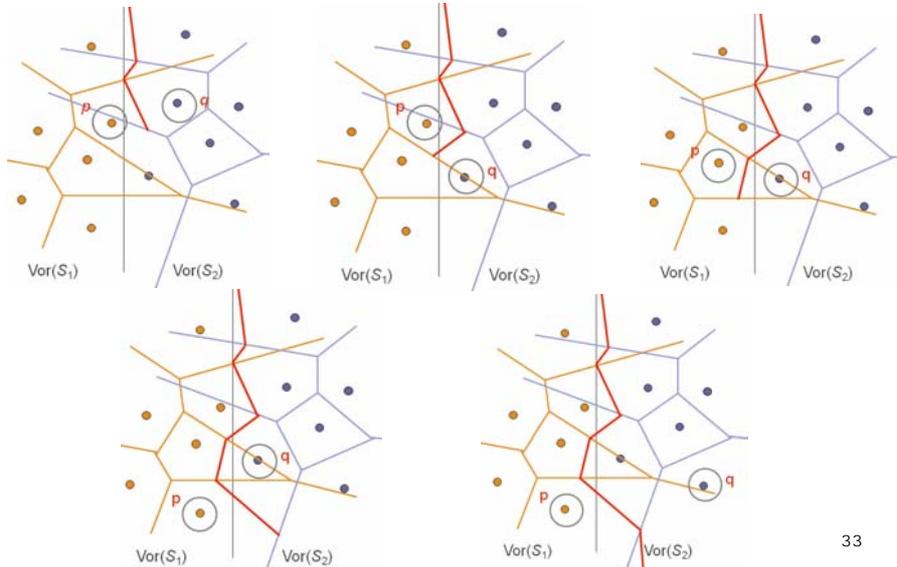
3. Se a mediatriz intersecta uma aresta do $\text{Vor}(S_2)$ então actualiza-se o ponto q , em caso contrário actualiza-se o ponto p .
4. Determinar a mediatriz entre os geradores p e q



32

Algoritmos para a construção de um DV

Método N° 3 (divisão e conquista)



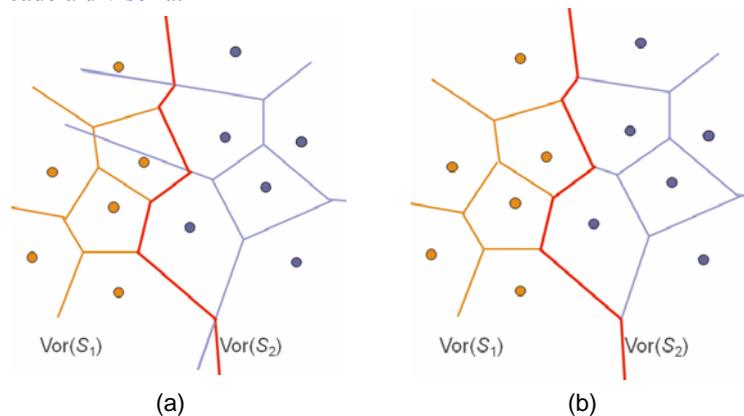
33

Algoritmos para a construção de um DV

Método N° 3 (divisão e conquista)



- II. (a) Remover as arestas e vértices de Voronoi de $Vor(S_1)$ à direita da cadeia divisória.
(b) Remover as arestas e vértices de Voronoi de $Vor(S_2)$ à esquerda da cadeia divisória.



34

Algoritmos para a construção de um DV



Método N° 4

- O 4º método, que foi apresentado por *Fortune* (1986/87), é o chamado *Método de Varrimento*.
- A estratégia utilizada é a de percorrer o plano, onde se encontram os geradores, com uma linha de varrimento (*sweep line*), que pode percorrer o plano horizontal ou verticalmente.
- Enquanto o plano é percorrido, pela linha de varrimento, vai sendo armazenada a informação relativa à intersecção dessa linha com certos pontos no plano – os geradores.
- A complexidade do algoritmo apresentado por *Fortune* é $O(n \log n)$
- Pode consultar os detalhes sobre o **Algoritmo de Fortune** em: <http://www.dma.fi.upm.es/mabellanas/voronoi/voronoi/voronoi.html#3.3>
- Applet JAVA do **Algoritmo de Fortune**:
<http://www.diku.dk/hjemmesider/studerende/duff/Fortune/>

<http://www.youtube.com/watch?v=dqRA-6Fi6wk>

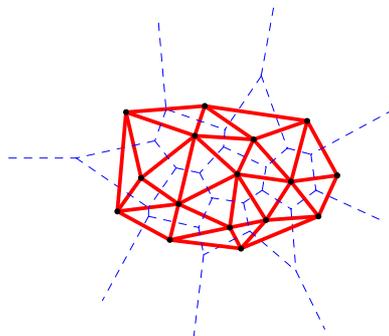
35

Triangulação de Delaunay



Definição:

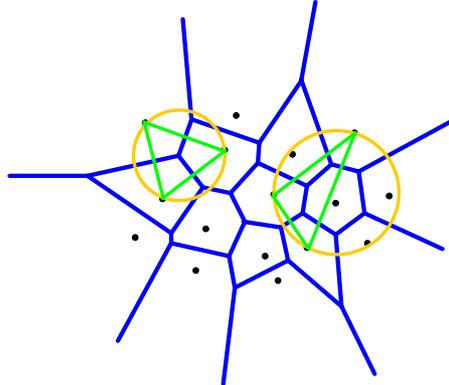
- Considere-se um **Diagrama de Voronoi**, $Vor(S)$.
- Se ligarmos todos os pares de pontos (geradores) cujos Polígonos de Voronoi partilham uma aresta, obtemos um grafo.
- Se este grafo consistir apenas em triângulos, a este grafo dá-se o nome de **Triangulação de Delaunay** e será denotado por $TD(S)$.
- A cada um dos triângulos chama-se **face** da **Triangulação de Delaunay**
- **O $TD(S)$ é o grafo dual do $DV(S)$**



36

Triangulação de Delaunay

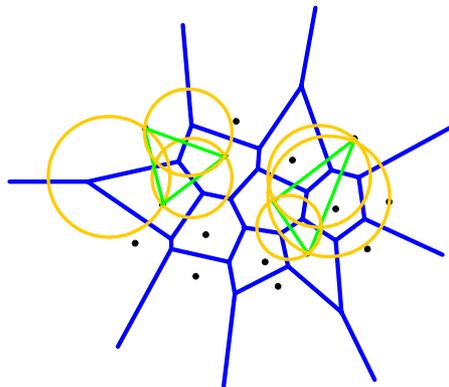
Teorema 1: Três pontos p_i , p_j e p_k de S são vértices da mesma face da **Triangulação de Delaunay** de S se e só se o círculo definido por estes pontos não contiver qualquer outro ponto de S .



37

Triangulação de Delaunay

Teorema 2: Dois pontos p_i e p_j de S formam uma aresta de $DT(S)$ se e só se existe um círculo que contém p_i e p_j na sua fronteira e não contém qualquer outro ponto de S .



38