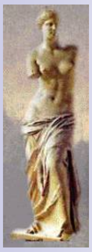
6. O Problema da Galeria de Arte

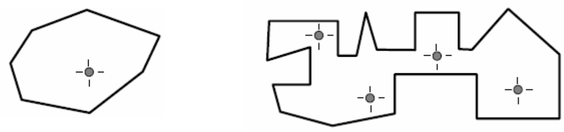


António Leslie Bajuelos
Departamento de Matemática
Universidade de Aveiro

Mestrado em Matemática e Aplicações

Introdução

- Hoje em dia as salas dos novos museus não têm em geral formas regulares o que origina problemas interessantes de **iluminação** e **vigilância**
- É obvio que se a planta do museu for um polígono convexo, então uma única fonte de iluminação (um único guarda) bastaria para iluminar (vigiar) toda a sala
- Mas, a irregularidade impede esta solução económica!!!



- Tem sentido estudar o seguinte problema:

Minimizar o número de luzes/guardas que são necessários para iluminar/vigiar a sala dum museu.

Um par de problemas...

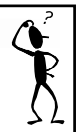
- **Problema de *Hadwiger***
  - Quantos reflectores se necessitam para iluminar o contorno exterior de una figura plana, compacta e convexa?
    - Boltyanski provou em 1960 que três reflectores são sempre suficientes.
- **Problema de *Strauss***
  - Pensemos agora numa sala quais paredes são espelhos.
    1) Será certo que basta colocar só uma fonte de luz em qualquer ponto da sala para que esta fique totalmente iluminada?
    2) Existirá sempre um ponto com essa propriedade?
  - Em 1995 Tokarsky provou que a resposta à primeira questão é negativa.
  - A resposta à segunda questão continua em aberto….

O problema clássico da Galeria de Arte

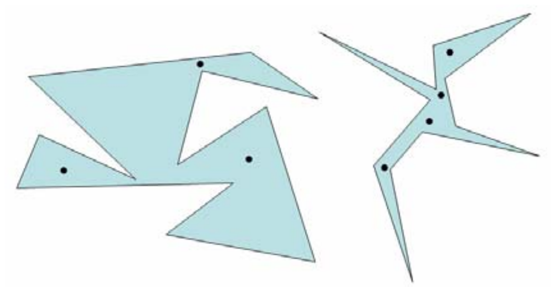
- Em 1973, numa conferência de Matemática, Victor Klee propôs a Vasek Chvátal o seguinte problema:

Quantos guardas são suficientes para guardar/vigiar o interior de uma sala de uma galeria de arte com n paredes?

O problema clássico da Galeria de Arte



- **Atenção:** Repare-se que não é dada uma única informação sobre a estrutura do polígono, sabemos apenas que tem n vértices.

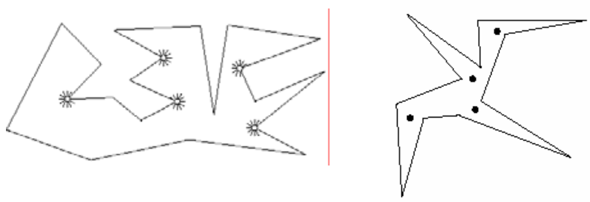


Polígonos com 12 arestas $\Rightarrow$ 3 ou 4 guardas?

O resultado principal

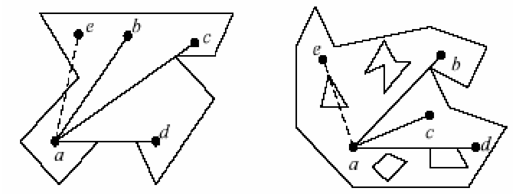
- **Teorema da Galeria de Arte** (Chvátal´s Art Gallery Theorem ou Watchman Theorem):

  Teorema: **(Chvátal, 1975)** $\lfloor n/3 \rfloor$ ***guardas são ocasionalmente necessários e sempre suficientes para cobrir uma sala com*** n ***paredes***



Formalizando

- **Visibilidade:**
  - Dado dois pontos *p* e *q* dum polígono *P*, diz-se que **p é visível de q** se o *segmento de recta* que une *p* e *q* está totalmente contido em *P*.
  - O conceito de visibilidade num polígono com buracos é idêntico ao conceito de visibilidade num polígono simples. Para isso basta considerar que o interior dos buracos pertence ao exterior do polígono

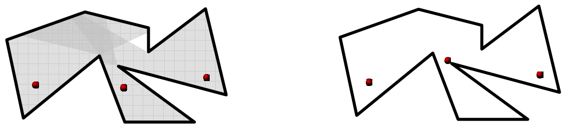


Formalizando

- **Termo iluminar ou guardar**
  - Uma colecção *F* de pontos de *P* **ilumina ou guarda** *P*, se todo o ponto $u \in P$ é **visível** de um ponto $p \in F$.
  - **Observações:**
    - O termo **iluminar** surge da colocação duma **fonte de luz**, que emite luz em todas as direcções (360º) e incide em cada elemento de *F*, assim, *P* é totalmente iluminado.
    - O termo **guardar** surge da colocação de um **guarda** estacionário em cada elemento de *F*, então todo o *P* é guardado.

Formalizando

- **O que procuramos?**
  - No contexto do problema da **Galeria de Arte** será preciso determinar:
    - **Quantos** guardas são suficientes para vigiar totalmente o polígono *P*?
    - **Onde** dever ser estes guardas colocados?



  - Obviamente que colocando um guarda em cada vértice de P este ficará totalmente vigiado, mas o que queremos aqui é **optimizar** o processo da vigilância

Formalizando

- **Problema No. 1:** Seja P um polígono com n vértices. Determinar o número mínimo de guardas estacionários, em função de n, que são suficientes para se vigiar P.
- Se denotarmos por:
  - **g(P)** o menor número de guardas necessários para cobrirmos um polígono P e por
  - **G(n)** o menor número de guardas necessários para cobrirmos um polígono com n vértices, então temos que:

$$G(n) = \max\{\, g(P) \mid P \text{ é um polígono com } n \text{ vértices} \,\}$$

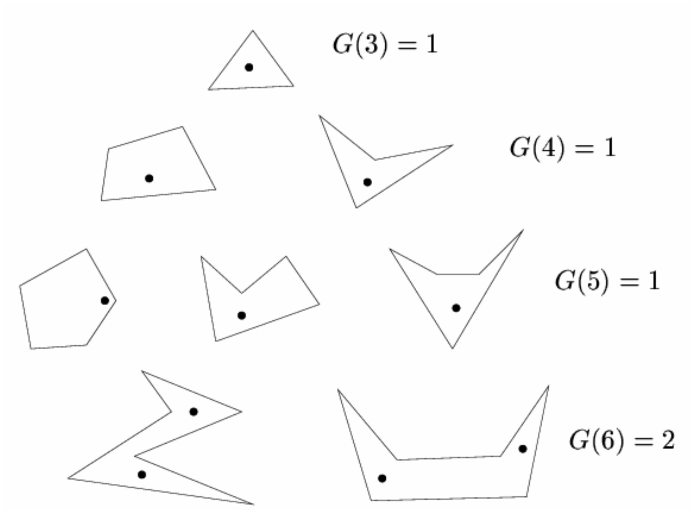
Problema No.1 ≡ Determinar G(n)

Observações gerais

- Exploração Empírica
  - No mínimo, 1 guarda é sempre necessário: $1 \leq G(n)$
  - Para n = 4, pode haver no máximo um vértice reflexo ($|r|$=1), mas mesmo assim $G(4) = 1$
  - Para n = 5, $|r|$ pode ser 0, 1 ou 2. Fazendo alguns exercícios podemos constatar que $G(5) = 1$
  - Existem polígonos com 6 vértices que necessitam de 2 guardas para serem cobertos

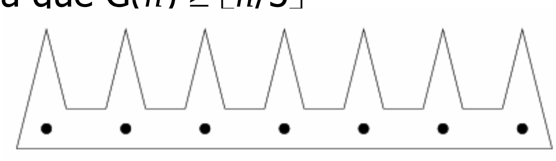
Como o número de guardas (necessários para cobrir um polígono) cresce em função no número de vértices do polígono?

Exploração Empírica



A necessidade dos $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas

- O polígono do tipo pente (*comb polygon*) mostra que $G(n) \geq \lfloor n/3 \rfloor$



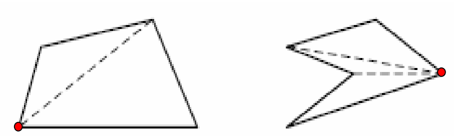
$\lfloor n/3 \rfloor$ guardas são ocasionalmente necessários para cobrir uma sala com n paredes

Teorema de *Chvátal* (1975)

Teorema: (***Chvátal***, **1975**) ***$\lfloor n/3 \rfloor$ guardas são ocasionalmente necessários e sempre suficientes para cobrir uma sala com n paredes***

Prova: (Esboço)

- **Definição:** define-se por leque (*fan*) de *P*, um vértice (o centro do leque) que é partilhado por todos os seus triângulos.

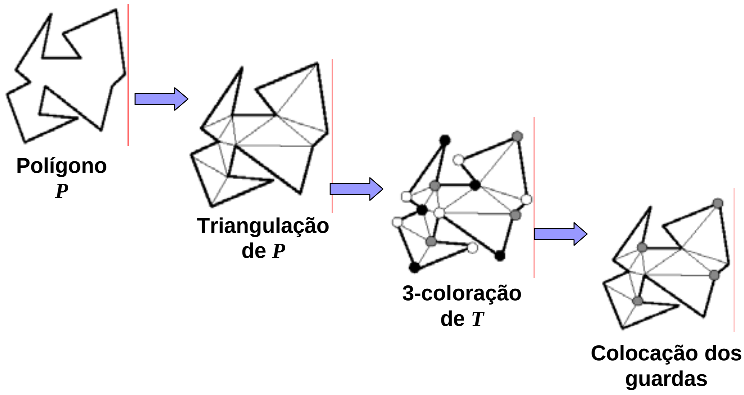


- **Hipótese da indução:** Seja P um polígono com n lados, qualquer triangulação de P pode ser particionada em $g \leq \lfloor n/3 \rfloor$ leques.
- A seguir, Chvátal retira de forma adequada partes do polígono (analisa 15 casos em total!) Desse modo reduz o número de vértices, o que permite a aplicação da hipótese da indução. A prova fica concluída ao colocarmos um guarda no centro de cada leque.

(versão completa, J. O'Rourke, Art Gallery Theorems and Algorithms)

A prova de *Fisk* (1978)

- Em 1978, **Fisk** apresentou uma prova muito simples deste resultado baseada em dois conceitos fundamentais: triangulação e coloração dos vértices dum grafo.
- As ideias de **Fisk**: consideremos um polígono simples P com n vértices e observemos graficamente os seguintes passos:



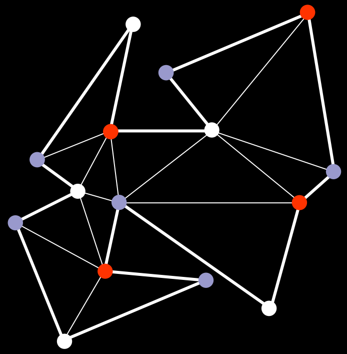
A prova de *Fisk* (1978)

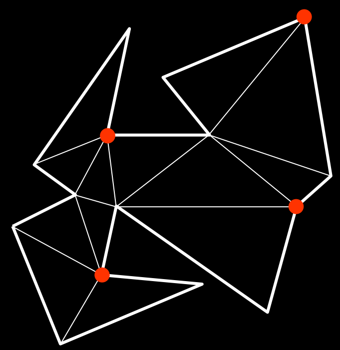
Suficiência:

- Todo polígono simples admite pelo menos uma **triangulação**. Seja T uma *triangulação* de P.
- Sabemos que se G_T - grafo associado a uma triangulação T de um polígono P, então G_T admite uma **3-coloração**.
- Considere uma tal *3-coloração.* Seja n_i o número de vértices de P colorados com a cor i, ($i \in \{1, 2, 3\}$).
- Evidentemente $n = n_1 + n_2 + n_3$ e como cada triângulo tem um vértice de cada cor e todo ponto de P está em algum dos triângulos, **podemos vigiar o polígono *P*, colocando guardas em todos os vértices da mesma cor**
- Seleccionemos então a cor menos utilizada:

$$n \geq 3*\min(n_1, n_2, n_3) \rightarrow \mathbf{\min(n_1, n_2, n_3)} \leq \lfloor n/3 \rfloor$$

Problema da Galeria de Arte





Como colocar os $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas?

- A ideia da prova de Fisk permitiu que Avis e Toussaint (1981) desenvolvessem um algoritmo para definir a posição dos $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas (focos) num qualquer polígono simples.

procedure **DECOMPOSE**(P)*

Step 1: Obtain a triangulation T of P

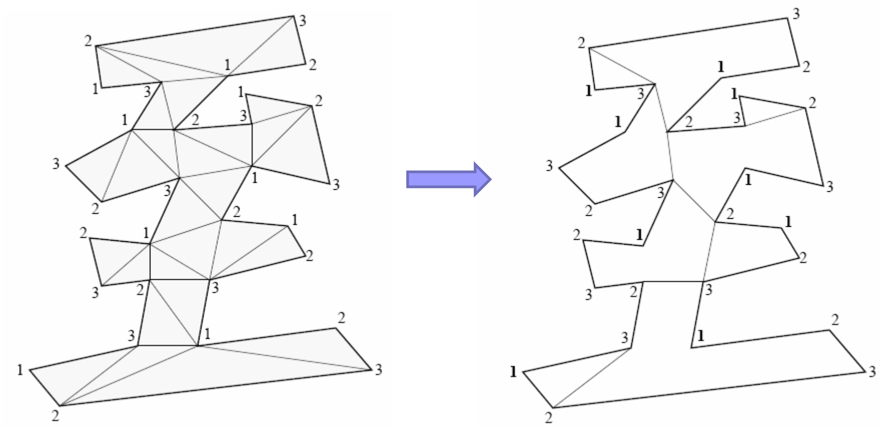
Step 2: Color the vertices of T with colors {1, 2, 3}

Step 3: Select a color arbitrarily and output each vertex with the chosen color together with a list of all adjacent vertices in T. If a decomposition with at most $\lfloor n/3 \rfloor$ star polygons is desired, then the color with the minimum number of vertices should be chosen

* versão original

Como colocar os $\lfloor n / 3 \rfloor$ guardas?

- Exemplo do algoritmo **DECOMPOSE(*P*)**



A complexidade do DECOMPOSE(*P*)

procedure **DECOMPOSE**(*P*)

Step 1: Obtain a triangulation *T* of *P*

na altura, mediante o algoritmo de Garey* → $O(n \log n)$

Step 2: Color the vertices of T with colors {1, 2, 3}.

utilizando uma técnica de dividir para conquistar → $O(n \log n)$

Step 3: Select a color arbitrarily and output each vertex with the chosen color together with a list of all adjacent vertices.

é realizado em $O(n)$

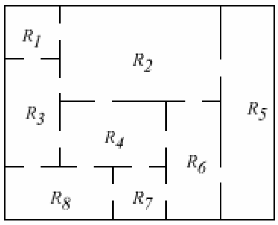
⇓

Complexidade do algoritmo → $O(n \log n)$

* M. Garey, D. Johnson, F. Preparata and R. Tarjan, *Triangulating a simple polygon*, *Inf. Process. Lett.* 7, 175-179 (1978).

Galerias com salas rectangulares

- No teorema clássico, uma galeria de arte é vista como um polígono simples.
- Tradicionalmente uma galeria de arte apresenta uma construção rectangular subdividida em salas rectangulares.
- Assuma-se que qualquer duas salas adjacentes têm uma porta em comum.



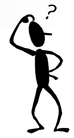
Quantos guardas estacionários são necessários para vigiar todas as salas desta galeria?

Galerias com salas rectangulares

- Considera-se que se um guarda for colocado numa porta este poderia vigiar em simultâneo duas salas.
- Em 1994, J. *Czyzowicz, E. Rivera-Campo, N. Santoro, J. Urrutia e J. Saks,* provaram que:

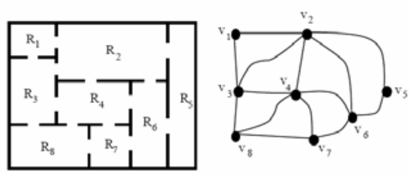
<u>Teorema:</u> Qualquer galeria de arte rectangular com n salas pode ser vigiada com exactamente $\lceil n/2 \rceil$ guardas estacionários.

Galerias com salas rectangulares

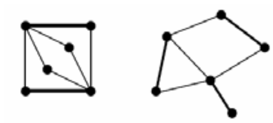


Prova: (Esboço)

- Associa-se à galeria o seu grafo dual – G



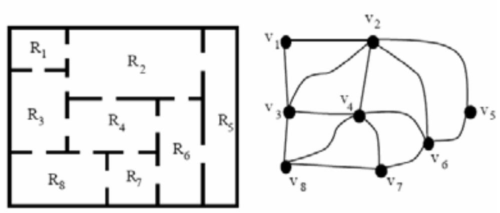
- Prova-se que se o grafo dual tiver um número par de vértices então admite um emparelhamento perfeito M.
  - **Def.** Dado um grafo G, um **emparelhamento** M de G é um subconjunto de arestas de G, tal que quaisquer duas arestas de M não têm vértices comuns. Um emparelhamento M de G diz-se **perfeito** se a cada vértice de G incidir uma aresta de M.



Emparelhamento | Emparelhamento perfeito

Galerias com salas rectangulares

- Prova: (Esboço)
  - Escolha-se, usando M, $\lceil n/2 \rceil$ pontos da seguinte forma: para cada $[v_i, v_j]$ de G em M fixe-se um guarda na porta partilhada por R_i e R_j.
  - O caso em que G tem um número impar de vértices, o resultado segue-se subdividindo uma das salas em duas. ♦

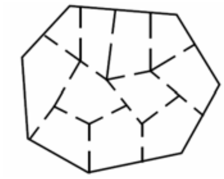


Galerias com salas não rectangulares

- A arquitectura mais moderna promove a imaginação e, consequentemente, as mais recentes e futuras Galerias de Arte, provavelmente, não são nem serão rectangulares!
- Assim sendo, também é interessante fazer o estudo de Galerias de Arte não rectangulares
- Por exemplo:
  - Pretende-se fazer o estudo de problemas que envolvam **Galerias de Arte** em edifícios convexos, estes que são subdivididos em **salas convexas**

Galerias com salas não rectangulares

- Parta-se do princípio que se duas salas partilham duma mesma parede, então existe uma porta que as liga.



Teorema: (*Urrutia*) ***Qualquer galeria de arte convexa com n salas, pode ser vigiada no máximo por $\lfloor 2n/3 \rfloor$ guardas estacionários.***

Guardas em polígonos com ângulos > π

- Uma questão:

  Será possível estabelecer alguma relação entre o número de vértices reflexos dum polígono (r) e o número de guardas necessários para que P fique totalmente vigiado?

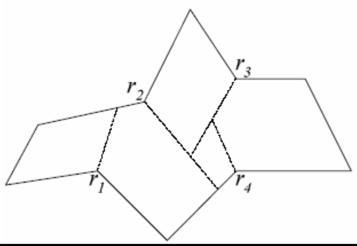
- A resposta:

  Teorema: (*Urrutia*) ***Seja P um polígono com r vértices reflexos ($r \geq 1$). Então r guardas são sempre suficientes e ocasionalmente necessários para vigiar P.***

Guardas em polígonos com ângulos > π

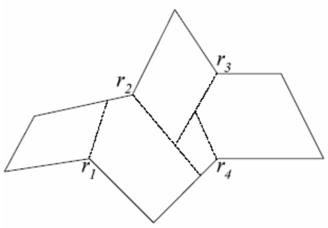
Prova: (esboço)

- ***Lema:*** *Qualquer polígono P com r vértices reflexos, pode ser dividido no máximo em (r+1) polígonos convexos com interiores disjuntos dois a dois.*
- Prova:
  - Seja $\{r_1, r_2, \ldots, r_r\}$ o conjunto dos ângulos reflexos de P.
  - Para $i = 1, 2, \ldots, r$ tracemos um segmento de recta com origem no vértice r_i, de forma a bissectar o ângulo interno que lhe corresponde em P, e extremo num ponto da fronteira de P ou noutro segmento já traçado, (ver figura).
  - Utilizando um simples mecanismo de indução podemos então provar que estes segmentos de recta dividem P em r+1 polígonos convexos. ♦

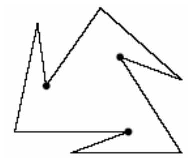


Guardas em polígonos com ângulos > π

- Prova: (esboço)
  - Prove-se primeiro que *r* guardas são suficientes.
    - Particione-se *P* utilizando o Lema anterior.
    - Repare-se que cada um dos polígonos convexos obtidos pela partição, contêm pelo menos um vértice reflexo de *P* (ver figura (a)).
    - Colocando um guarda em cada um dos vértices reflexos *P* ficará totalmente vigiado.
    - A figura (b) ilustra um polígono em que são necessários *r* guardas. ♦



(a)



(b)

Voltando ao problema clássico

- O **Teorema da Galeria de Arte** nos da uma solução de natureza **combinatória** já que responde à generalidade dos polígonos com n lados
- Não obstante é obvio que **não todos os polígonos com n lados requerem de $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas para ser vigiados**
- Tem sentido colocar o seguinte problema algorítmico:
  - **Dado um polígono P, determinar:**
    - **o menor número de guardas que são necessários para o vigiar.**
    - **onde e que devem ser estes guardas colocados**
- Uma variante de deste problema é o conhecido problema da Minimização de Guardas em Vértices (**Minimum Vertex Guard Problem - MVG**)

NP – difícil!

- Em 1983, *O'Rourke* e *Supowit* demonstraram que o MVG – *problem* é **NP-difícil** para polígonos com buracos, quer se considerasse guardas colocados em vértices, em pontos quaisquer, ou em arestas.
- Mais tarde (em 1986), *Lee* e *Lin* mostraram que para polígonos sem buracos, os mesmos problemas são da mesma complexidade algorítmica: **NP-difícil**.
- Segundo *Urrutia* (2000) – "tem sido quase negligenciada na resolução deste tipo de problemas: o desenvolvimento de algoritmos que produzam soluções aproximadas"

Algoritmos de aproximação para o MVG

- Um dos algoritmos de aproximação de **MVG** mais conhecidos é um algoritmo proposto por *Ghosh* (1987).
- **Algoritmo de *Ghosh***
  - algoritmo guloso (*greedy).*
  - determina em $O(n^5 \log n)$ o conjunto de guardas localizados em vértices, cuja cardinalidade é no máximo $O(\ln n)$ vezes o número mínimo necessário.
- Recentemente, *Eidenbenz* (2002) propôs alguns algoritmos de aproximação e heurísticas para diversas variações de problemas de vigilância de de terrenos. O seu trabalho pode ser visto como uma extensão do de *Ghosh*.
- Outros resultados:
  - Efrat A.; Har-Peled S.: *Locating guards in art galleries*, 2002.
  - Tomas A.P. Bajuelos A.L., Marques F., *Approximation Algorithms to Minimum Vertex Cover Problems on Polygons and Terrains*, 2003.
  - Canales S., Métodos Heuristicos en Problemas Geométricos: Visibilidad, Iluminación y Vigilancia, Ph. D. Thesis, 2004.

O Algoritmo de Ghosh

- O algoritmo de *Ghosh* começa por decompor o polígono *P* num conjunto de componentes convexas.
  - **A partição que toma é a resultante da extensão de todas as diagonais do polígono.**
- Esta partição é natural e tem uma propriedade importante, que é ser determinada também pelas restrições decorrentes das obstruções de visibilidade.
- O polígono fica partido em componentes convexas e a partição satisfaz a condição designada por – **Não cobertura por secções** (NCPS).
- Como o polígono também se encontra dividido em componentes convexas e estas por sua vez são ou totalmente visíveis ou totalmente invisíveis de um vértice *v*, então o **polígono de visibilidade** de um determinado vértice é composto por um conjunto de componentes convexas de *P*.
- O problema de encontrar o número mínimo de polígonos de visibilidade que cobrem *P* acaba por ser equivalente a um problema de cobertura mínima de conjuntos onde cada polígono de visibilidade é um conjunto e as componentes convexas são os elementos desse conjunto.

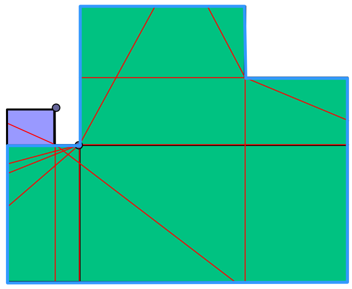
O Algoritmo de Ghosh

```
AlgGhosh(𝒫)
    C ← DetCompCon(𝒫)
    N ← {1, 2, ..., n}
    Q ← ∅
    para cada i ← 1 ate n
        𝒱_{v_i} ← DetPolVis(𝒫, v_i)
        F_i ← DetCompConV(𝒱_{v_i}, C)
    enquanto |C| ≠ ∅
        j ← ProcMCon(F)
        Q ← Q ∪ {j}
        N ← N\{j}
        para cada i ∈ N
            F_i ← F_i\F_j
            C ← C\F_j
    retorna(Q)
```

- DetCompCon(*P*): determina a partição do polígono *P*.
- DetPolVis(*P*, v_i): determina o polígono de visibilidade do vértice v_i
- DetCompConV(V_{vi}, *C*): determina as peças que estão contidas no polígono de visibilidade de v_i
- ProcMCon(*F*): determina o maior conjunto em *F*, que corresponde ao conjunto actual de peças

O Algoritmo de Ghosh

- Partição do polígono
  - Peças totalmente visíveis
- Polígono de visibilidade
  - Composição em peças
- Vértices que vêem mais peças ainda não visíveis são guardados.



A estratégia de Ghosh para determinar uma aproximação do óptimo é <u>ir sucessivamente iluminando os vértices que vêem mais peças, das ainda não iluminadas</u>

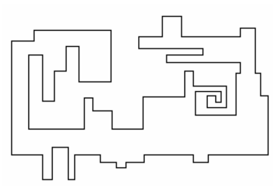
Voltando de novo ao problema original

- Após conhecer a resposta ao problema colocado por *Klee*, surgem de modo imediato múltiplas questões novas, por exemplo:
  - O que sucede se o objecto a vigiar é um tipo especial de polígono (ortogonal, monótono, etc.)?
  - O que sucede se, em lugar de vigiar, pretendemos iluminar um polígono utilizando reflectores[1] ou vértices-reflectores?
  - O que sucede se permitimos que os guardas patrulhem por segmentos?

[1]**reflector** (*floodlight*) - fonte de luz com um ângulo restrito de iluminação α, (α < 360º), localizada num ponto *p* do plano chamado "apex"

Variantes do problema da GA

- O que sucede se o objecto a vigiar é um tipo especial de polígono (ortogonal, monótono, etc.)?



Teorema **(*Kahn, Klawe, Kleitman*, 1983) –**

Dado um polígono ortogonal com n vértices existe então uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/4 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.

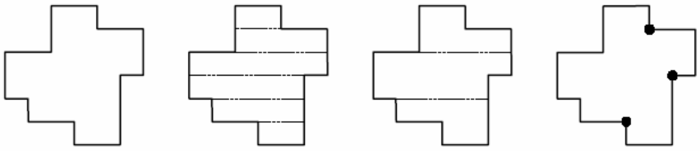
Polígonos ortogonais vs PGA

- Os polígonos ortogonais, têm interesse especial para este tipo de problemas, até pelo facto da maior parte dos edifícios serem ortogonais
- *Edelsbrunner* et al (1984) desenvolveram um algoritmo que em tempo $O(n \log n)$ coloca $\lfloor n/4 \rfloor$ guardas em vértices de um polígono ortogonal, os quais o vigiam totalmente
- Tal foi conseguido utilizando uma decomposição de *P* em polígonos ortogonais em forma de *L*
- *Sack* e *Toussaint* (1988) demonstraram que a colocação dos $\lfloor n/4 \rfloor$ guardas em polígonos ortogonais monótonos pode ser feita em $O(n)$, enquanto o problema pode ser resolvido para polígonos ortogonais arbitrários em $O(n \log \log n)$

Em 1995 foi provado que o MVG para problemas ortogonais é também NP-difícil!

Polígonos ortogonais vs PGA

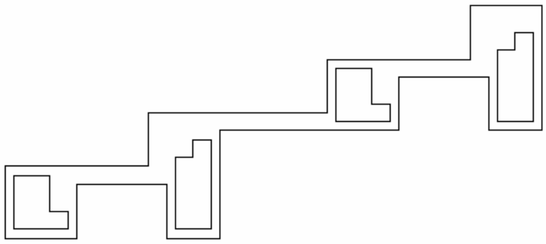
- *O'Rourke* provou que $n = 2r + 4$ então $\lfloor n/4 \rfloor = \lfloor r/2 \rfloor + 1$
- Um algoritmo para a colocação dos $\lfloor r/2 \rfloor + 1$ guardas num PO.
  - Se r for par adicionar um vértice reflexo.
  - Varrer o polígono para encontrar todos os cortes horizontais.
  - Percorrer a fronteira, rotulando a paridade dos cortes.
  - Particionar o polígono em cada corte horizontal ímpar.
  - Para cada peça resultante, alternar a localização dos guardas entre os vértice reflexos.
  - Remover o vértice reflexo extra, se introduzido no primeiro passo.



Guardas em PO com buracos

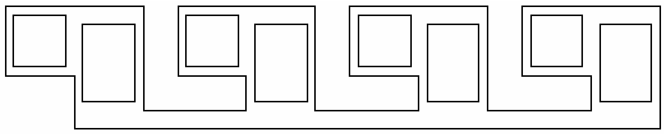
- Considera-se que um polígono ortogonal com buracos é um polígono ortogonal com buracos ortogonais.
- **Teorema:** ***(Hoffman, 1990) Para vigiar um polígono ortogonal com n vértices e h buracos, são sempre suficientes*** $\lfloor n/4 \rfloor$ ***guardas em pontos.***
- O teorema não válido para guardas em vértices.

  Exemplo:



Guardas em PO com buracos

- Só conjecturas!
  - **Conjectura:** (***Shermer***) *Qualquer polígono com n vértices e h buracos pode ser sempre vigiado por* $\lfloor (n+h)/3 \rfloor$ *guardas em vértices.*
  - **Conjectura:** (***Shermer***) *São suficientes* $\lfloor (n+h)/4 \rfloor$ *guardas em vértices para vigiar qualquer polígono ortogonal com* n *vértices e* h *buracos.*
  - **Conjectura:** (***Hoffman***) *São suficientes* $\lfloor 2n/7 \rfloor$ *guardas em vértices para vigiar qualquer polígono ortogonal com* n *vértices e* h *buracos.*



Nota: A Conjectura de *Hoffman* não contradiz a de *Shermer*, pois os polígonos de *Hoffman* têm $n = 14k$ vértices e $h = 2k$ buracos e, para esta escolha particular, tem-se que $\lfloor (n+h)/4 \rfloor = \lfloor 2n/7 \rfloor$

Outras Variantes do problema da GA

- O que sucede se, em lugar de vigiar, pretendemos iluminar um polígono utilizando reflectores ou vértices-reflectores?

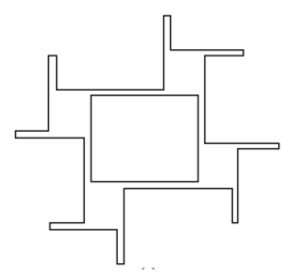
	Point floodlights				Vertex floodlights			
	Majorante		Complexidade		Majorante		Complexidade	
π- floodlights	Conjectura	Teorema		Geral	Conjectura	Teorema		Geral
Polígono Simples (n Vértices)	$< \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$	$< \left\lceil \frac{2(n-3)}{5} \right\rceil$	O(n)	O(NP)	$\le \left\lfloor \frac{3n-3}{5} \right\rfloor$		O(n)	O(NP)

- **Open Problem:** *How many* π***-floodlights*** *are always sufficient to illuminate any polygon of* n *vertices, with at most one floodlight placed at each vertex?*

  (http://cs.smith.edu/~orourke/TOPP/P23.html#Problem.23)

Outras Variantes do problema da GA

- O que sucede se pretendemos iluminar um polígono ortogonal com buracos, utilizando π-vértices-reflectores?



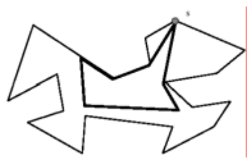
Teorema (*Urrutia*, 1995) –

> ***Todo polígono ortogonal com n vértices e h buracos pode ser sempre iluminado com $\lfloor (3n+4(h-1))/8 \rfloor$ π-reflectores colocados nos vértices de P.***

Outras Variantes do problema da GA

- Qual o caminho que deverá seguir um guarda durante a sua vigilância nocturna? i.e.:

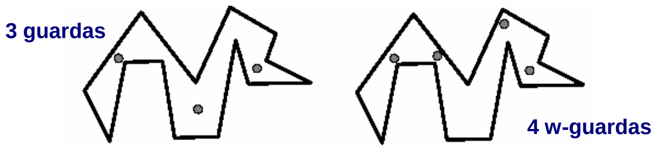
  Dado um polígono *P*, determinar o caminho fechado *C*, de cumprimento mínimo, tal que cada ponto de *P* seja visível desde algum ponto de *C*



- O que se sabe do problema
  - Se especificamos qual o ponto de partida (e chegada) do guarda, *Chin* e *Ntafos* (1991) desenvolveram algoritmos eficientes para resolver este problema.
  - Se NÃO se conhece o ponto de partida a resolução algorítmica do problema *continua em aberto!*

Outras Variantes do problema da GA

- Se os ladrões neutralizam um dos guardas que vigiam uma das salas da galeria de arte, então poderiam trabalhar tranquilamente na zona controlada exclusivamente por esse guarda.
- Por tanto é interessante exigir que cada guarda seja vigiado por pelo menos outro guarda. Assim temos o problema dos denominados guardas vigiados (**w-guardas**)



- *Gregório Hernández* no seu trabalho (1994) provou que $\lfloor 2n/5 \rfloor$ **w-guardas** são sempre suficientes e por vezes necessários para vigiar um polígono de n vértices