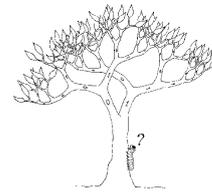


2. Alguns Problemas Elementares da Geometria Computacional

António Leslie Bajuelos
Departamento de Matemática
Universidade de Aveiro

Mestrado em Matemática e Aplicações

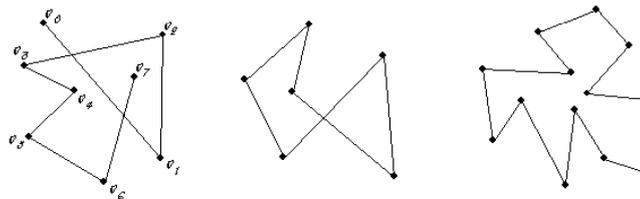


1

Preliminares



- Uma **curva poligonal** (ou **cadeia poligonal**) é uma sequência finita $v_0, e_0, v_1, \dots, e_{n-2}, v_{n-1}$, onde
 - v_0, \dots, v_{n-1} são pontos de \mathbb{R}^2 e
 - e_i é um segmento de recta com extremidades v_i e v_{i+1} ($i = 0, \dots, n-2$), de forma que, os segmentos de recta tenham dois a dois, um extremo em comum e não existam dois segmentos com o mesmo extremo na mesma recta, ou seja, tenham três pontos não colineares.
- Os pontos v_0, \dots, v_{n-1} também são designados **vértices** e os segmentos de recta e_0, \dots, e_{n-2} , **arestas**

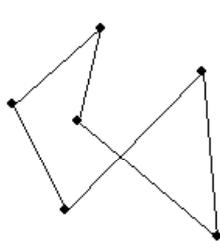


2

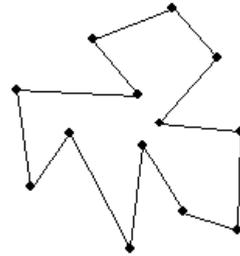
Preliminares



- Uma **curva poligonal** é **fechada** se o último ponto da sequência é igual ao primeiro, ou seja, $v_0 = v_{n-1}$.
- Uma **curva poligonal** diz-se **simples** se dados dois segmentos não consecutivos, estes não se intersectam, isto significa que o segmento e_i só intersecta (possivelmente) o segmento e_{i+1} no ponto v_{i+1} ($i = 0, \dots, n-2$).



Fechada não simples

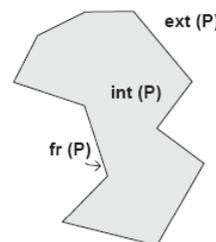
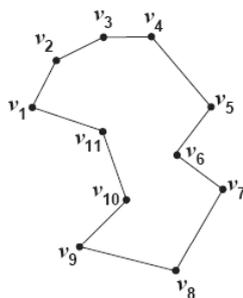


Fechada simples

Preliminares



- **Teorema de Jordan:** Toda a curva plana fechada simples, divide o plano em duas regiões (o **interior** e o **exterior** da curva)
- **Polígono simples:** conjunto dos pontos da **região interior** reunidos com os pontos da **cadeia poligonal simples fechada**

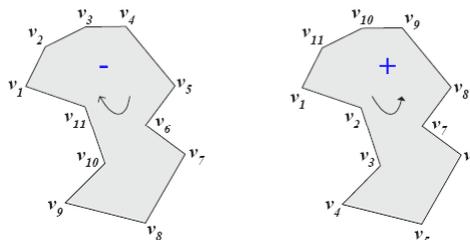


- Denotamos o interior de P por **int(P)**, o exterior de P por **ext(P)** e a fronteira de P por **fr(P)**.

Preliminares



- Um **polígono simples** P fica perfeitamente delimitado por :
 - o conjunto de pontos formado pelos **vértices ordenados**, quando se percorre a fronteira de P e
 - uma **orientação** que nos indica onde se irá situar o $\text{int}(P)$
- Orientação **negativa (horária ou CW)** – o $\text{int}(P)$ P fica à direita de qualquer aresta
- Orientação **positiva (anti-horária ou CCW)** – o $\text{int}(P)$ fica à esquerda de qualquer aresta



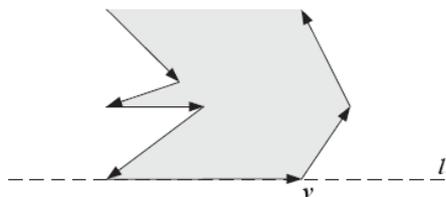
Por norma suporemos sempre que o polígono simples está orientado positivamente

5

Preliminares



- Um vértice de um polígono diz-se **convexo** se a amplitude do ângulo, pertencente ao seu interior, formado por duas arestas que lhe são incidentes for menor ou igual a π . Caso contrário o vértice diz-se **côncavo** ou **reflexo**
- **Lema: (Meister)** *Qualquer polígono P , tem pelo menos um vértice estritamente convexo.*
 - **Prova:** Seja P um polígono simples. Se percorrermos a fronteira de P , no sentido positivo, quando encontramos um vértice estritamente convexo, temos que virar à esquerda e num vértice estritamente côncavo viramos à direita. Seja v o vértice de P com ordenada (y) mínima e abscissa (x) máxima. Seja l a recta horizontal passando sobre v . A aresta seguinte a v , que lhe está incidente, está acima de l (ver figura). Logo, deveremos virar à esquerda em v . Portanto, v é um vértice estritamente convexo.

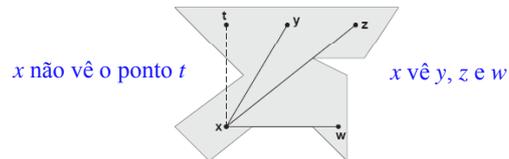


6

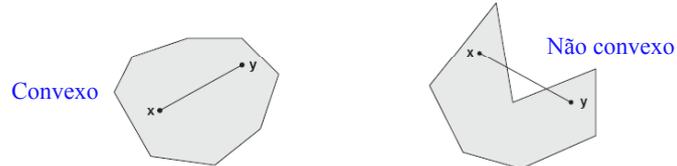
Preliminares



- **Visibilidade:** dois pontos x e y , num polígono simples P são visíveis se o segmento de recta $xy \notin \text{ext}(P)$



- **Polígono convexo:** se para todo $x, y \in P$, o segmento de recta $xy \subset P$.



- **Teorema:** Um polígono é convexo sse não tem vértices côncavos

Preliminares



- **Polígono estrelado:**
 - Se existe pelo menos um ponto $x \in P$ tal que para todo ponto $y \in P$ o segmento $xy \subset P$
 - ou**
 - Se existir pelo menos um ponto do qual é possível ver todo o polígono



Polígonos estrelados e os seus núcleos

Polígonos não estrelados

Preliminares



- **Teorema:** o $\text{Ker}(P)$ é um conjunto convexo
 - **Prova:** pela definição de $\text{Ker}(P)$

- **Teorema:** Um polígono P é convexo sse $\text{Ker}(P) = P$
 - **Prova:** Exercício

- **Teorema:** (Krasnosel'ski) Um conjunto S de \mathbb{R}^2 é estrelado sse $\forall x, y, z \in S, \exists w \in S$ tal que w vê x, y e z

- **Teorema:** Um polígono P é estrelado sse qualquer terno de vértices convexos é visto por pelo menos um ponto de P
 - **Prova:** deduz-se facilmente da prova do teorema de Krasnosel'ski

Problema N° 1: Ponto em Polígono



- **Enunciado:** *Dado um polígono simples P no plano e um ponto q do plano, localizar q em relação a P , isto é, decidir se q está no interior de P , no exterior de P , ou na fronteira de P .*

- Duas aplicações:
 - **Sistemas de Informação Geográfica (SIG ou GIS)**
 - **Computação Gráfica** - cada que utilizamos o rato para seleccionar um objecto na ecrã do computador.

Problema N° 1: Ponto em Polígono



- Parece um problema muito difícil de resolver!!!



11

Problema N° 1: Ponto em Polígono



- Mão não assim é tão difícil

- **Princípio fundamental:**

- para determinar se um ponto $q(x_q, y_q)$, está ou não dentro de um polígono P , consiste em traçar, a partir de q , uma **semi-recta** em uma direcção qualquer.
- Esta **semi-recta** estará **alternando** dentro e fora do polígono em questão, mudando de estado nos pontos de intersecção com a fronteira de P ($fr(P)$)

M Shimrat, "Algorithm 112, Position of Point Relative to Polygon",
Comm. ACM 5(8), Aug 1962, p 434.

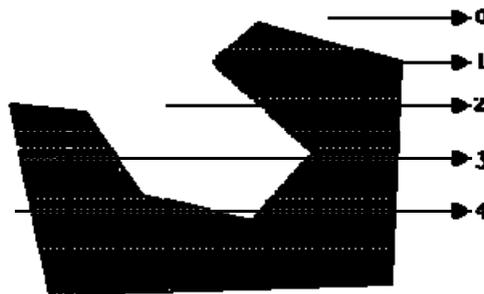
12

Problema N° 1: Ponto em Polígono



■ Resumindo as ideias do algoritmo PinP

- Se o **número de intersecções** for **ímpar**, o ponto está **dentro (in)** do polígono P
- Se o **número de intersecções** for **par**, o ponto está **fora (out)** de P



13

Problema N° 1: Ponto em Polígono



■ Esboço do algoritmo PinP

```
int crossings = 0
for (each edge of P)
    if (ray down from (x,y) crosses edge)
        crossings ++;
if (crossings is odd)
    return (inside);
else
    return (outside);
```

| | | |
|-------|---|-----|
| Par | → | OUT |
| Ímpar | → | IN |

■ Complexidade : $O(n)$

■ Para mais informação consultar a página web:

http://softsurfer.com/Archive/algorithm_0103/algorithm_0103.htm

14

Problema N° 1: Ponto em Polígono



- Por conveniência, adopta-se em geral **uma semi-recta paralela ao eixo dos x** , passando por Q e se estendendo para a direita.
- A contagem do **número de intersecções** pode ser feita com facilidade, verificando quantas **arestas** (com pelo menos um extremo a esquerda de Q ($x \geq x_q$)) de P têm um ponto extremo **acima** e outro **abaixo** da coordenada y_q do ponto Q .

Par → OUT
Impar → IN

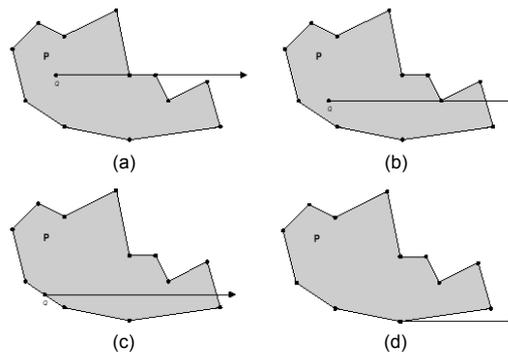
15

Problema N° 1: Ponto em Polígono



- A maior dificuldade está no tratamento de **casos degenerados** como:
 - (a) a semi-recta **passa por uma aresta** do polígono
 - (b) a semi-recta **passa por um vértice**
 - (c) o ponto Q **está sobre fr(P)**
 - (d) o ponto Q **coincide com um vértice**

Par → OUT
Impar → IN

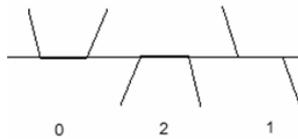


16

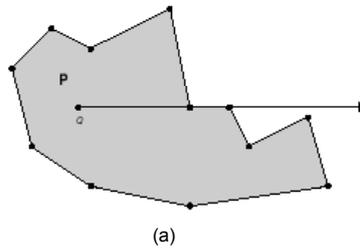
Problema N° 1: Ponto em Polígono



(a) Se a semi-recta **passa por uma aresta de P**, então o número de intersecções fica definido da seguinte forma:



Par → OUT
Ímpar → IN



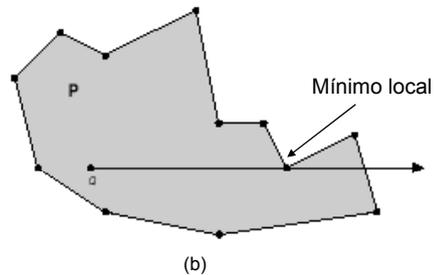
17

Problema N° 1: Ponto em Polígono



(b) Se a semi-recta **passa por um vértice**, a intersecção **NÃO** deve ser considerada se o vértice é **máximo** (ou **mínimo**) local

Par → OUT
Ímpar → IN



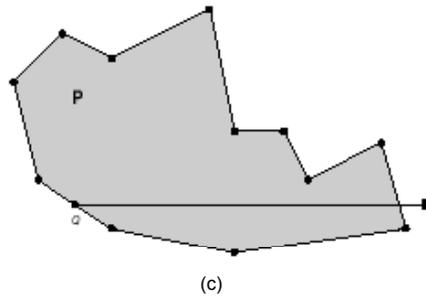
18

Problema N° 1: Ponto em Polígono



(c) Se o ponto Q pertence à $fr(P)$, então ...

Par → OUT
Ímpar → IN



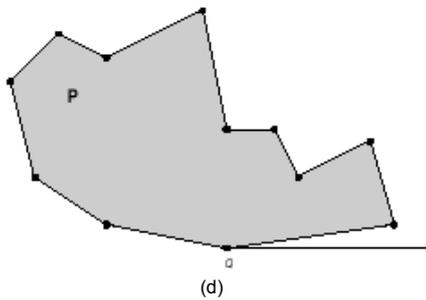
19

Problema N° 1: Ponto em Polígono



(d) Se o ponto Q coincide com um vértice de P , então ...

Par → OUT
Ímpar → IN

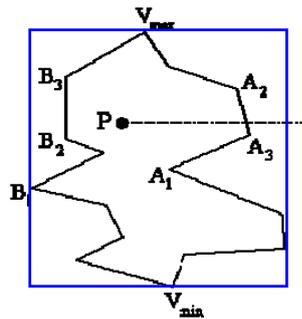


20

Problema N° 1: Ponto em Polígono



- Acelerando o algoritmo...
 - Teste de teste de rejeição rápida (PinR):
 - Comparar a posição do ponto Q com relação ao **rectângulo envolvente mínimo do polígono** (sem buracos), considerando que este tenha sido previamente determinado e armazenado.



21

Problema N° 1: Ponto em Polígono



- O teste **PinR** tem complexidade $O(1)$ e pode representar um ganho no desempenho importante.

Função PinR (Ponto Q, Ponto A, Ponto B): booleano

Início

Ponto C, D;

$C.x = \min(A.x, B.x)$; $C.y = \min(A.y, B.y)$;

$D.x = \max(A.x, B.x)$; $D.y = \max(A.y, B.y)$;

Retorne $((Q.x \geq C.x) \ \& \ (Q.x \leq D.x) \ \& \ (Q.y \geq C.y) \ \& \ (Q.y \leq D.y))$;

Fim

Nota: A e B são vértices (não adjacentes) do rectângulo R

22

Problema Nº 1: Ponto em Polígono



■ PinR em PinP

Função PinP (Ponto Q, Polígono P): booleano

Início

inteiro i, num_inter=0;

Ponto C, D;

Se (not(PinR(Q, A, B))) Então Retorne falso;

Para i=0 até i<P.numVertices Faça

Início

C = P.dP[i];

D = P.dP[i+1];

Se (C.y ≠ D.y) Então

Início

Calcular intersecção;

Se (intersecção for à direita de Q) Então

num_inter = num_inter+1;

Fim

Fim

Retorne ((num_inter mod 2 <> 0);

Fim

23

Problema Nº 1: Ponto em Polígono



A convexidade facilita ou não a localização dum ponto em relação a um polígono?

Sim!



24

Problema N° 1: Ponto em Polígono (convexo)



□ Preliminares:

- Três pontos são **colineares** se eles pertencem a uma mesma recta.
- Em geometria cartesiana, prova-se que três $p_0=(x_0, y_0)$, $p_1=(x_1, y_1)$ e $p_2=(x_2, y_2)$ são **colineares** sse:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

25

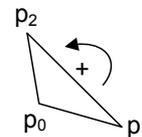
Problema N° 1: Ponto em Polígono (convexo)



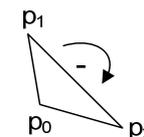
□ Preliminares:

- Verifica-se que se esses três pontos não são colineares, o **sinal desse mesmo determinante** é precisamente a orientação do triângulo, determinado por esses três pontos

$$\Delta(p_0, p_1, p_2) = \text{sgn} \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} > 0, \text{ orientação positiva}$$



$$\Delta(p_0, p_1, p_2) = \text{sgn} \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} < 0, \text{ orientação negativa}$$

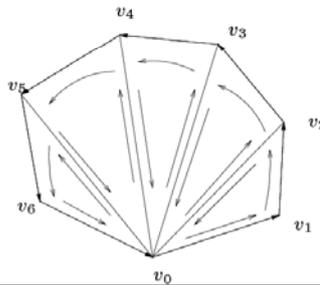


26

Problema Nº 1: Ponto em Polígono (convexo)



- **Convexidade facilita a localização de pontos**
 - Vejamos agora como podemos determinar em **tempo sublinear** ($< O(n)$) se um ponto dado está a no interior ou exterior de um **polígono convexo**
 - Considere um **polígono convexo** $P = (p_0, p_1, \dots, p_n)$
 - Um polígono simples $P = (p_0, p_1, \dots, p_n)$ e chamado **polígono convexo** sse $\Delta(p_i, p_{i+1}, p_{i+2}) = +1$, para todo $i, 0 \leq i \leq n-1$
 - Chamamos o **lado positivo** de um polígono convexo de interior do polígono e o **lado negativo** de exterior.



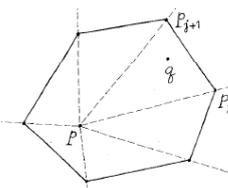
27

Problema Nº 1: Ponto em Polígono (convexo)



Esboço do algoritmo que decide se um ponto q está no interior ou exterior de P

- Seja p um ponto no interior de P . Para cada vértice p_i de P , considere o segmento passando por p_i ligando p a um ponto no infinito na direcção do vector $(p_i - p)$.
- Desta forma o plano fica **dividido em n triângulos** todos tendo p como vértice comum.
- Chamemos de T_i o triângulo limitado pelos segmentos determinados por pp_i , pp_{i+1} e $p_i p_{i+1}$. Como **estes triângulos estão ordenados circularmente em torno de p** pela própria sequência dos vértices de P dada, podemos **determinar por pesquisa binária** qual o triângulo dentro do qual o ponto de consulta q está.
- Finalmente:
Se q está dentro de um triângulo T_j então q estará no interior de P sse q estiver do lado positivo da recta determinada pelo segmento $p_i p_{j+1}$



28

Problema N° 1: Ponto em Polígono (convexo)



Algoritmo PinPConv(q, P)

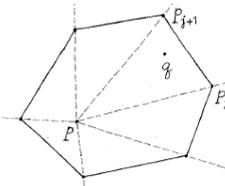
□ Dado um **polígono convexo** P e um ponto q , devolve o lado de P em que q se encontra.

1. Seja p o **baricentro** de algum triângulo formado por vértices de P .

2. Como a ordem dos vértices (p_0, p_1, \dots, p_n) de P estabelecem uma **ordem cíclica** para as rectas pp_i , determinar por **pesquisa binária** o índice j ($0 \leq j \leq n-1$) tal que:

$$\Delta(p, p_{j+1}, q) < 0 \ \&\& \ \Delta(p, p_j, q) \geq 0$$

3. Devolver o sinal de $\Delta(p_j, p_{j+1}, q)$ (+ in; - out)



Complexidade:

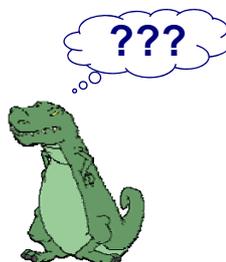
Os passos **1** e **3** tomam tempo constante. A busca feita no passo **2** toma tempo logarítmico. Portanto, este algoritmo toma tempo total $O(\log n)$

29

Problema N°1: Ponto em Polígono (estrelado)



Será possível generalizar o algoritmo PinPConv para polígonos estrelados quando se conhece algum ponto do seu núcleo?



30

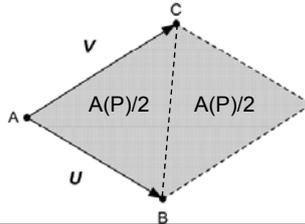
Problema N° 2: Área de Polígonos



- **Objectivo:** estudo de algoritmos para o cálculo de áreas de polígonos simples.

(1) Área (A) de um triângulo T(A, B, C) -

- A área de um triângulo é igual a metade do produto entre sua base e sua altura.
- Sabe-se que a norma do vector $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$, denotada por: $|\mathbf{U} \times \mathbf{V}| = |\mathbf{U}||\mathbf{V}|\text{sen}(\theta)$ e que $|\mathbf{U} \times \mathbf{V}|$ é igual a área do paralelogramo com lados U e V, onde θ é o ângulo do vector U ao V.
- $|\mathbf{U} \times \mathbf{V}|$ é igual a duas vezes a área do triângulo definido por eles.



31

Problema N° 2: Área de Polígonos



- O **produto vectorial** pode ser calculado a partir do seguinte determinante:

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_U & y_U & z_U \\ x_V & y_V & z_V \end{vmatrix} = (y_U z_V - z_U y_V) \hat{i} + (z_U x_V - x_U z_V) \hat{j} + (x_U y_V - y_U x_V) \hat{k}$$

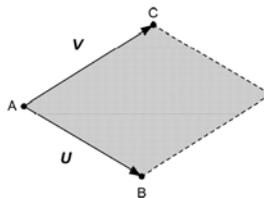
onde \hat{i}, \hat{j} e \hat{k} são os vectores unitários nas direcções x, y e z respectivamente.

- Como se está tratando de vectores bidimensionais temos $Z_U = Z_V = 0$ e, portanto a área A do triângulo T:

$$A(T) = 1/2(\mathbf{X}_U \mathbf{Y}_V - \mathbf{Y}_U \mathbf{X}_V)$$

- Mas na realidade, $\mathbf{U} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$, e $\mathbf{V} = \mathbf{C} - \mathbf{A}$ Portanto, a expressão acima pode ser reescrita como

$$A(T) = 1/2(\mathbf{X}_A \mathbf{Y}_B - \mathbf{Y}_A \mathbf{X}_B + \mathbf{Y}_A \mathbf{X}_C - \mathbf{X}_A \mathbf{Y}_C + \mathbf{X}_B \mathbf{Y}_C - \mathbf{Y}_B \mathbf{X}_C)$$



32

Problema Nº 2: Área de Polígonos

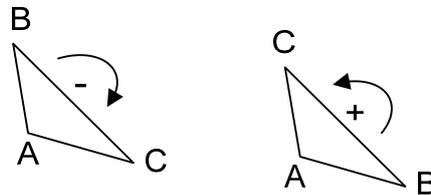


- A área do triângulo pode ser calculada pela expressão

$$A(T) = 1/2(X_A Y_B - Y_A X_B + Y_A X_C - X_A Y_C + X_B Y_C - Y_B X_C)$$

será:

- **positiva** se os vértices A, B e C formarem um circuito em **sentido anti-horário (CCW)**
- **negativa** se formarem um circuito no **sentido horário (CW)**
- a área será **exactamente zero** se os três vértices estiverem **alinhados**



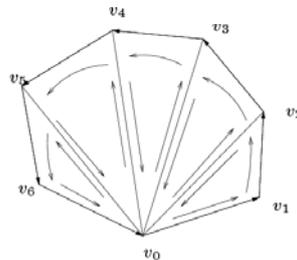
33

Problema Nº 2: Área de Polígonos



(2) Área de um Polígono Convexo

- Para calcularmos a área de um **polígono convexo** P com vértices v_0, v_1, \dots, v_{n-1} , podemos primeiro **triangular** P e depois somar as áreas de cada um dos triângulos.



- Então a área sinalizada $A(P)$ de um polígono convexo é dada por:
$$A(P) = A(v_0, v_1, v_2) + A(v_0, v_2, v_3) + \dots + A(v_0, v_{n-1}, v_n)$$
onde os índices são tomados por módulo n
- **É de esperar que a área sinalizada de P não dependa da triangulação**

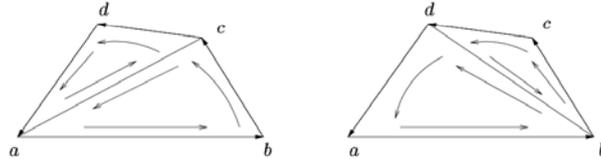
34

Problema Nº 2: Área de Polígonos



□ Área de um Polígono Convexo

- Consideremos um quadrilátero convexo $Q = (a, b, c, d)$. Existem duas triangulações distintas de Q .



- Agora temos que

$$\mathcal{A}(Q) = \mathcal{A}(a, b, c) + \mathcal{A}(a, c, d) = \mathcal{A}(d, a, b) + \mathcal{A}(d, b, c).$$

Se $a = (a_x, a_y), b = (b_x, b_y), c = (c_x, c_y), d = (d_x, d_y)$ então

$$2\mathcal{A}(Q) = a_x b_y - a_y b_x + a_y c_x - a_x c_y + b_x c_y - b_y c_x + a_x c_y - a_y c_x + a_y d_x - a_x d_y + c_x d_y - d_x c_y.$$

- Vemos que vários termos aparecem em $\mathcal{A}(a, b, c)$ e em $\mathcal{A}(a, c, d)$ com sinais trocados pelo que podemos perceber que termos correspondentes à diagonal ac se cancelam

35

Problema Nº 2: Área de Polígonos



□ Área de um Polígono Convexo

- Assim generalizando teremos dois termos por aresta do polígono e nenhum termo por diagonal.
- Portanto se $P = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$ é um **polígono convexo**, onde $v_i = (x_i, y_i)$ ($i = 0, \dots, n-1$), então a área sinalizada $\mathcal{A}(P)$ de P satisfaz,

$$\mathcal{A}(P) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1})$$

onde os índices são tomados por módulo n

36

Problema N° 2: Área de Polígonos



Este resultado pode ser generalizada para polígonos simples arbitrários?

Sim!



37

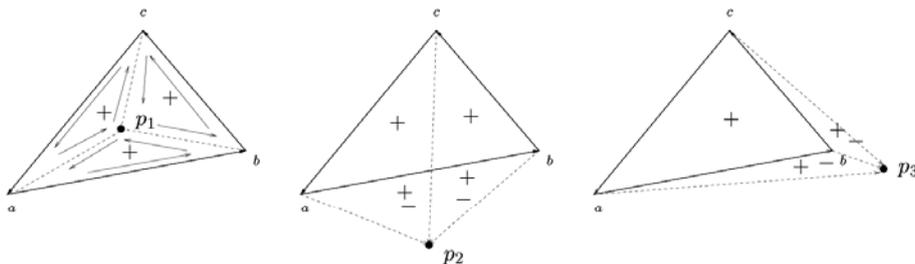
Problema N° 2: Área de Polígonos



(3) Teorema da Área de Polígonos

- Seja $T(a, b, c)$ um triângulo com vértices orientados positivamente. Seja p um **ponto arbitrário** do plano. Afirmamos que:

$$A(T) = A(p, a, b) + A(p, b, c) + A(p, c, a)$$



Lema 1: Seja $T(a, b, c)$ um triângulo orientado positivamente e p um ponto qualquer do plano. Então

$$A(T) = A(p, a, b) + A(p, b, c) + A(p, c, a)$$

38

Problema Nº 2: Área de Polígonos



□ Teorema da Área de Polígonos

Teorema: Seja $P = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$ um polígono simples com vértices orientados positivamente e seja p um ponto qualquer do plano. Então

$$(1) \quad A(P) = A(p, v_0, v_1) + A(p, v_1, v_2) + \dots + A(p, v_{n-1}, v_0)$$

ademais, se $v_i = (x_i, y_i)$ ($i = 0, \dots, n-1$), então

$$(2) \quad A(P) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1})$$

39

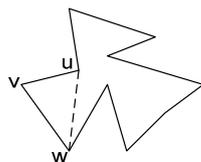
Problema Nº 2: Área de Polígonos



□ Teorema da Área de Polígonos

■ Para provar este Teorema vamos precisar do seguinte:

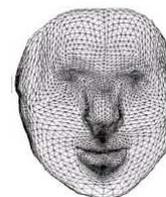
- Uma **diagonal** de um polígono P e um segmento de recta entre dois vértices de P que se vêem claramente.
- Diremos que 3 vértices consecutivos u , v , e w de um polígono formam uma **orelha** se o segmento de recta uw é uma diagonal
- A **decomposição** de um polígono P em *triângulos* por colocação do maior número possível de **diagonais** que duas a duas, não se intersectam designa-se por **triangulação de um polígono P** .



uw é um diagonal



Triangulação de um polígono



40

Problema N° 2: Área de Polígonos



□ Teorema da Área de Polígonos

■ **Teorema:** (Meister's Two Ears Theorem) - *Todo polígono com pelo menos 4 vértices possui pelo menos duas orelhas que não se sobrepõem.*



■ **Teorema** (Triangulação vs orelhas) - *Seja P um polígono com pelo menos 4 vértices e T uma triangulação de P . Então pelo menos dois triângulos de T formam orelhas de P*

Prova: (será estudada posteriormente...)

41

Problema N° 2: Área de Polígonos



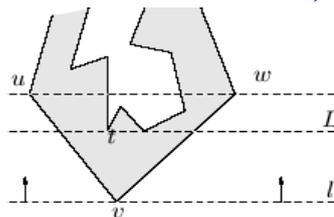
■ Teorema da Área de Polígonos

Lema: (Meister, 1975) - *Todo polígono com pelo menos 4 vértices possui uma diagonal.*

Prova:

Seja P um polígono com $n \geq 4$ vértices e seja v um vértice convexo de P . Sejam u e w vértices adjacentes de v . Então se uw é uma **diagonal** \rightarrow não há o que provar. Logo, suponhamos que uw não é uma diagonal de P , ou seja $uw \not\subset P$.

Como $n \geq 4 \rightarrow \Delta(v, u, w)$ contém pelos menos um vértice de P distinto de v, u e w . Seja t um vértice ($t \in \Delta(v, u, w)$) mais próximo de v . Logo, t é o primeiro vértice de P atingindo quando movemos a recta l na direcção uw .



42

Problema Nº 2: Área de Polígonos

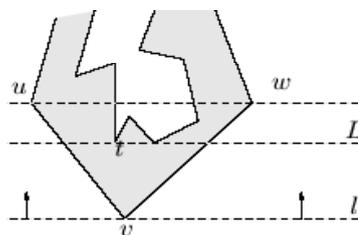


■ Teorema da Área de Polígonos

Lema: (Meister, 1975) - *Todo polígono com pelo menos 4 vértices possui uma diagonal.*

Prova: (continuação)

Afirmamos que vt é uma diagonal de P . De facto, seja L a recta passando por t e paralela a uw . Notemos que a intersecção do semi-plano determinado por L contendo o vértice v com o $\Delta(v, u, w)$ é um triângulo que não contém nenhum ponto de $\text{fr}(P)$ no seu interior. Logo, o vértice v vê t claramente. Portanto, vt é uma diagonal de P . ♦



43

Problema Nº 2: Área de Polígonos



□ Teorema da Área de Polígonos

Prova (do teorema da área de polígonos):

Por indução no número de vértices de P .

Se P tem três vértices então o resultado segue do **Lema 1**

Suponhamos que (1) é verdadeira para polígonos com até $n-1$ vértices, $n \geq 4$, e suponhamos que P é um polígono com n vértices.

Pelo **Teorema das duas Orelhas de Meister** temos que P tem uma orelha. Vamos renumerar os vértices de P , se necessário de tal forma que os vértices v_{n-2}, v_{n-1}, v_0 formem uma orelha (i.e. um triângulo) designado por E . Seja P' o polígono resultante de P após a remoção de E . Pela hipótese de indução temos que:

$$A(P') = A(p, v_0, v_1) + A(p, v_1, v_2) + \dots + A(p, v_{n-1}, v_0)$$

Ademais pelo **Lema 1** temos que

$$A(E) = A(p, v_{n-2}, v_{n-1}) + A(p, v_{n-1}, v_0) + A(p, v_0, v_{n-2})$$

Então temos que: $A(P) = A(P') + A(E)$

$$A(P) = A(p, v_0, v_1) + \dots + A(p, v_{n-3}, v_{n-2}) + A(p, v_{n-2}, v_0) + A(p, v_{n-2}, v_{n-1}) + A(p, v_{n-1}, v_0) + A(p, v_0, v_{n-2})$$

Portanto, como $A(p, v_0, v_{n-2}) = -A(p, v_{n-2}, v_0)$ temos que a equação (1) se verifica.

A equação (2) pode ser obtida através da simples expansão dos termos em (1) ♦

44

Problema Nº 3: Centróide de um Polígono



- O centro de gravidade ou centro de massa, mais conhecido como **centróide** de um polígono pode ser obtido da seguinte forma:
 - **Particionar o polígono em triângulo**
 - **Calcular a média ponderada dos centros de gravidade dos triângulos usando suas áreas como peso**
- O centro de gravidade de cada triângulo é simplesmente a média das coordenadas de seus vértices, ou seja, para um $T(A, B, C)$:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \text{ e } y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

- **Dificuldade:** é preciso implementar um algoritmo de triangulação de polígonos.

45

Problema Nº 3: Centróide de um Polígono



- Nessa estratégia os **centróides** dos triângulos são combinados usando um processo de média ponderada pela área.



- O **centróide de um polígono** formado por dois triângulos T_1 e T_2 , cujos centróides são, respectivamente, (x_{G1}, y_{G1}) e (x_{G2}, y_{G2}) é o ponto (x_G, y_G) , onde

$$x_G = \frac{x_{G1}A(T_1) + x_{G2}A(T_2)}{A(T_1) + A(T_2)} \text{ e } y_G = \frac{y_{G1}A(T_1) + y_{G2}A(T_2)}{A(T_1) + A(T_2)}$$

- Então o **centróide do polígono** pode ser determinado de maneira incremental, adicionando um triângulo e seu centróide por vez e calculando as coordenadas do centróide do conjunto.

46

Problema Nº 3: Centróide de um Polígono



■ Uma estratégia mais simples:

- O mesmo processo de média ponderada pela área pode ser usado, considerando todos os triângulos formados entre um ponto fixo, por exemplo $(0, 0)$, e cada par de vértices sucessivos, (v_i, v_{i+1}) .
- Então aplicando os resultados do teorema da área de polígonos e a fórmula para determinar o **centróide** de um polígono obtemos que:

$$x_c = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} + x_i) \times (x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1})}{3A(P)} \quad y_c = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (y_{i+1} + y_i) \times (x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1})}{3A(P)}$$

$$A(P) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1})$$

- **Atenção:** Utilizando este método para calcular o centróide de um polígono não é preciso determinar a triangulação do polígono e a sua complexidade é $O(n)$

47

Problema Nº 3: Centróide de um Polígono



■ Algumas observações:

- Apesar da simplicidade do processo, **não existe garantia de que o centróide será um ponto pertencente ao polígono.**
- Caso seja necessário encontrar um ponto interno a um polígono simples dado, pode-se utilizar um processo que busca precisamente identificar rapidamente uma diagonal do polígono (O'Rourke, 1998).
- O **centróide** pode ser determinado também por outros métodos:
 - como o centro do retângulo envolvente mínimo ou,
 - como o centro de um círculo inscrito ou circunscrito ao polígono.

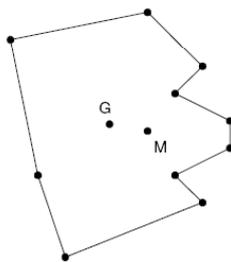
48

Problema Nº 3: Centróide de um Polígono



■ Algumas observações:

- Nos **GIS** (*Geographics Information Systems*) para determinar utilizam frequentemente o seguinte método: obter a média aritmética (**M**) das coordenadas x e y dos vértices do polígono.
- Este método é muito simples, mas a existência de alguma concentração de vértices em uma região do polígono causa um deslocamento indesejável do **centróide**.



O **centróide G**, é calculado pela média ponderada das áreas dos triângulo,
O **centróide M** é calculado pela média aritmética das coordenadas dos vértices do polígono.

49

Problema Nº 3: Centróide de um Polígono



■ Algoritmo de O'Rourke, 1998:

- Identificar um vértice convexo v_i (por exemplo, o vértice inferior mais à direita).
- Para cada outro vértice v_j do polígono verificar:
 - se v_j estiver dentro do $T(v_{i-1}, v_i, v_{i+1})$, então
 - calcular a distância (euclidiana) $d(v_i, v_j)$
 - armazenar v_j em q se esta distância for um novo mínimo
- Se algum ponto interior a $T(v_{i-1}, v_i, v_{i+1})$, for encontrado, então
 - o ponto médio do segmento qv_i é interior ao polígono; senão,
 - o ponto médio do segmento $v_{i-1}v_{i+1}$ é interior ao polígono.

50

Material Complementar

- O **Teorema de Pick** e o cálculo da área de polígonos:

<http://cmup.fc.up.pt/cmup/pick/pick2.html>

- Outros recursos

- Polygon Area and Centroid**

<http://www.efg2.com/Lab/Graphics/PolygonArea.htm>