FISICA ESTATISTICA (2002/2003)

Professor: José Fernando Mendes

Folha 5 - Sistemas Grande Canónico e Quñticos

1. Os níveis de energia de um oscilador harmónico, de frequência w, unidimensional, são dados por:

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\ \hbar w \tag{1}$$

1.1 Mostre que a função de partição é

$$Z = \frac{e^{-\beta\hbar w/2}}{1 - e^{-\beta\hbar w/2}} = \frac{1}{2\sinh(\beta\hbar w/2)} \tag{2}$$

1.2 Mostre que a energia média do oscilador é

$$< E >= \frac{\hbar w/2}{\tanh(\beta\hbar w/2)} \tag{3}$$

Considere os limites de baixas e altas temperaturas; neste ultimo, determine a correcção de ordem mais baixa ao calor especifico clássico.
1.3 Mostre que a entropia se pode escrever como:

$$\frac{S}{k_B} = (1+ < n >) \log(1+ < n >)- < n > \log < n > \tag{4}$$

2. O hidrogénio atómico pode existir sob duas formas: o ortohidrogénio e o parahidrogénio. No primeiro caso os spins do electrão e protão são antiparalelos, formando um estado de energia Δ (singlecto, $S = 0$); no segundo caso, os spins adicionam-se (paralelos), originando tres estados de igual energia (triplecto, $S = 1$) nula.
2.1 Mostre que a probabilidade de encontrar um atomo num estado parahidrogénio é:

$$prob = (3 + e^{-\beta\Delta})^{-1} \tag{5}$$

2.2 Se for aplicado um campo magnético fraco B, o ortohidrogénio mantem a sua energia Δ, enquanto os tres estados para se separam, adquirindo energia $E = -\mu BM$ ($M = -1, 0, 1$), e μ é o momento magnético atómico.
Mostre que o momento magnético médio, por átomo é

$$\mathcal{M} = \mu \frac{2\sinh(\beta\mu B)}{1 + e^{-\beta\Delta} + 2\cosh(\beta\mu B)} \tag{6}$$

3. Considere um sistema de N spins, localizados, indistinguiveis, submetidos a um campo magnético uniforme B. Cada spin pode ter duas orientaç ões relativamente ao campo magnético: paralelo (energia $= -\mu B$) e antiparalelo (energia $= \mu B$).
3.1 Sabendo que a energia do sistema é E (com $|E| \leq N\mu B$), mostre que a entropia do sistema é dada por

$$\frac{S}{k_B} = -N \left[\frac{1+m}{2} \log(\frac{1+m}{2}) + \frac{1-m}{2} \log(\frac{1-m}{2})\right] \tag{7}$$

onde $m(E) = -\frac{E}{N\mu B}$.
3.2 Admitindo, agora, que o sistema anterior se encontra em equilibrio térmico com uma fonte de calor (temperatura T), mostre que o valor de equilíbrio de m é

$$< m >= \tanh(\beta\mu B) \tag{8}$$

com flutuações caracterizadas por:

$$< m^2 > - < m >^2 = \frac{1 - < m >^2}{N} \tag{9}$$

3.3 Sendo o momento magnético (M) igual a soma dos momentos magnéticos individuais, obtenha a equaç ão de estado:

$$M = N\mu \tanh(\beta\mu B) \tag{10}$$

A magnetização é o momento magnético por unidade de volume. Se o sistema tiver volume V, mostre que a susceptibilidade magnética é

$$\chi = \frac{N}{V}\beta\mu^2[1 - \tanh^2(\beta\mu B)] \propto < m^2 > - < m >^2 \tag{11}$$

4. Um gás ideal, constituido por N partículas idênticas de massa m, está contido num recipiente, de volume V, a temperatura T.
4.1 Determinar o potencial químico do sistema.
4.2 Considere agora, um gás (ideal) de N atomos (idênticos aos anteriores) movendo-se livremente sobre uma superfície de area A. Para a mesma energia cinetica, uma partícula na superfície tem uma energia decrescida de ϵ_0 relativamente a outra movendo-se livremente no espaço tridimensional. Calcular o potencial quimico do gás bidimensional.
4.3 Usando as condições de equilibrio entre os dois sistemas anteriores, determine o numero médio (n') de partículas absorvidas pela superfície, por unidade de area, quando a pressão do gás circundante é p.

5. Um sistema é constituído por dois fermiões (spin 1/2, momento magnético μ) os quais podem ocupar 4 orbitais, com energias 0 e ϵ (cada uma destas energias com degenerescência 2 devido

ao spin). O sistema enco ntra-se em equilibrio a temperatura T.
5.1 Calcule a função de partição do sistema.
5.2 Mostre que a energia térmica do sitema é dada por:

$$U = 2\epsilon \frac{2e^{\beta\epsilon} + e^{2\beta\epsilon}}{1 + 4e^{\beta\epsilon} + e^{2\beta\epsilon}} \tag{12}$$

5.3 Aplicando-se um campo magnético B, a degenerescência é levantada (efeito Zeeman). Mostre que, a temperatura nula, a magnetizaç ão é:

$$M = 2\mu \quad se \quad \epsilon < 2\mu B \tag{13}$$

$$M = 0 \quad se \quad \epsilon > 2\mu B \tag{14}$$

$$M = \mu \quad se \quad \epsilon = 2\mu B \tag{15}$$

5.4 Mostre que a susceptibilidade magnética [$\chi = \delta M/\delta B)$] em campo nulo é dada por:

$$\chi = 8\mu^2\beta \frac{e^{-\beta}}{1 + 4e^{-\beta\epsilon} + e^{-2\beta\epsilon}} \tag{16}$$

6. Considere um sistema constituído por dois bosões, cada um com spin, $S = 1$ e momento magnético μ, situados num campo magnético uniforme B, em equilíbrio com uma fonte de calor (temperatura, T).
6.1 Calcule a função de partição do sistema.
6.2 Mostre que o número médio de bosões na orbital de mais baixa energia é dada por:

$$< n_1 > = \frac{2\ e^{\beta\mu B} + e^{\beta\mu B} + 1}{2\ [\cosh(2\beta\mu B) + \cosh(\beta\mu B) + 1]} \tag{17}$$

Verifique que para $T = \infty$, é,

$$< n_1^2 > - < n_1 >^2 = \frac{5}{9} \tag{18}$$

6.3 Mostre que o momento magnético médio do sistema é:

$$\mathcal{M} \;=\; \mu < S > = \; \mu \; \tanh(\beta\mu B) \; \frac{4\cosh(\beta\mu B) + 1}{2\cosh(\beta\mu B) + 1} \tag{19}$$

7. Magnões são excitações ferromagnéticas que obdecem a distribuiç ão de Planck. Cada excitação é caracterizada pelo vector de onda $\vec{k}$ e pela relaç ão de dispersão

$$\epsilon(\vec{k}) = \hbar D \vec{k}^2 \tag{20}$$

(D é designada por "rigidez" da excitação)
7.1 Supondo que o magneto ocupa um volume V e está em equilíbrio a temperatura T,mostre que a densidade volumica de energia é dada por:

$$\frac{U}{V} \approx \alpha_1 \frac{\hbar D}{4\pi^2} \left(\frac{k_B T}{\hbar D} \right) \tag{21}$$

onde $\alpha_1 = \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x - 1} dx \approx 1.6$
7.2 O momento magnético M, por ião magnético, é dado por:

$$\frac{M}{M(0)} = 1 - \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}} n_{\vec{k}} \tag{22}$$

onde $M(0)$ é o momento saturado (a $T = 0$), N é o número de iões magnéticos e $n_{\vec{k}}$ é o número médio de magnões $\vec{k}$. Mostre que, a temperatura T, é:

$$\frac{M}{M(0)} = 1 - \frac{\alpha_2}{4\pi^2 n} \left(\frac{k_B T}{\hbar D} \right)^{3/2} \tag{23}$$

onde $n = N/V$ e $\alpha_2 = \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{e^x - 1} dx \approx 2.06$.
Conclua que o conceito de magnão só tem sentido para $T < T_c$ onde

$$k_B T_c \approx \hbar D \left(\frac{4\pi^2 n}{\alpha_2} \right)^{2/3} \tag{24}$$