FISICA ESTATISTICA (2002/2003)

Professor: José Fernando Mendes

Folha 3 : Probabilidades

Folha 3 - Sistema isolado. Sistema canónico

1. Considere um gás formado por N particulas iguais (massa m), encerradas num volume, V. Suponha que as particulas são pontuais, livres, formando um sistema isolado com energia E_0.
1.1 Mostre que a densidade de estados é dada por:

$$\mathbf{\Sigma}\ (E_0) = V^N\ \frac{(2\pi m E_0)^{3N/2}}{\Gamma(\frac{3N}{2})}\ \frac{3N}{2E_0} \tag{1}$$

1.2 Usando a relação,

$$\log \mathbf{\Sigma}\ (E_0) \approx \log Z(\beta) + \beta E_0 - \frac{1}{2}\log(2\pi B) \tag{2}$$

mostrar que o resultado anterior é reproduzido no limite dos grandes números ($N \gg 1$).
1.3 Designe por $\Sigma\ (E_0, \vec{P}_0)\delta E_0 \delta \vec{P}_0$ a medida do "volume" do espaço de fase compreendiso pelas regiões

$$E_0 \leq H \leq E_0 + \delta E_0 \qquad\qquad \vec{P}_0 \leq \vec{P} \leq \vec{P}_0 + \delta \vec{P}_0.$$

Mostrar que, <u>exactamente</u> se tem:

$$\mathbf{\Sigma}\ (E_0, \vec{P}_0) = V^N\ \frac{(2\pi m E_0')^{3(N-1)/2}}{\Gamma(\frac{3(N-1)}{2})}\ \frac{3(N-1)}{2E_0' N^{3/2}} \tag{3}$$

onde, $E_0' = E_0 - \frac{\vec{P}_0^2}{2mN}$.
1.4 Conclua que a distribuição de probabilidades da quantidade de movimento total é dada por,

$$\mathbf{P}(\vec{P}) = \frac{N-1}{N}\ \frac{\Gamma(\frac{3(N-1)}{2})}{\Gamma(\frac{3N}{2})}\ \frac{1}{(2\pi m N E_0)^{3/2}}\ \left[1 - \frac{\vec{P}^2}{2mNE_0}\right]^{(3N-5)/2} \tag{4}$$

No limite $N \gg 1$ obtenha:

$$\mathbf{P}(\vec{P}) \simeq \left(\frac{3}{4\pi m E_0}\right)^{3/2} e^{-\frac{3\vec{P}^2}{4mE_0}} \tag{5}$$

desde que $|\vec{P}| \ll \sqrt{mNE_0}$.
1.5 Obtenha o resultado anterior, uando as expressões desenvolvidas nas aulas teóricas (atenda a que cada particula se pode considerar uma pequena componente do sistema).
1.6 Admitamos agora que o recipiente que contem o gás é um cubo de aresta L (volume, $V = L^3$). Tomemos o seu centro como sendo a origem das coordenadas. Mostrar que a distribuição de probabilidades para o centro de massa é dado por:

$$\mathbf{P}(\vec{R}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{k} e^{i\vec{k}.\vec{R}} \left(\frac{\sin(k_x L/2N)}{k_x L/2N}\right)^N \left(\frac{\sin(k_y L/2N)}{k_y L/2N}\right)^N \left(\frac{\sin(k_z L/2N)}{k_z L/2N}\right)^N \tag{6}$$

Sugestão : relacionar com o movimento aleatório a $3d$.
No limite $N \gg 1$, obtenha:

$$\mathbf{P}(\vec{R}) \simeq \frac{(6N/\pi)^{3/2}}{V}\ e^{-\frac{6\vec{R}^2 N}{V^{2/3}}} \tag{7}$$

e conclua que $\langle \vec{R}^2 \rangle = \frac{V^{2/3}}{4N}$.

2. Considere um conjunto de N moléculas diatómicas de momento dipolar electrico $\vec{\mu}$, contidas num recipiente de volume V. Admita que a este sistema é aplicado um campo electrico externo uniforme, $\vec{E}$.
2.1 Mostrar que a polarização P é dada por:

$$P = \frac{N}{V}\left[\coth(\beta\mu E) - \frac{1}{\beta\mu E}\right] \tag{8}$$

2.2 Mostre que no limite $|\beta\mu E| \ll 1$ a constante dielectrica do gás é dada por:

$$\epsilon = 1 + 4\pi\frac{N\beta\mu^2}{3V} \tag{9}$$

(Nota: não tenha em linha de conta a polarização induzida nas moléculas. E considere que o campo electrico que actua nas moleculas é somente o campo externo.)

3. Considere uma coluna de gás (perfeito) encerrada num recipiente cilindrico (area da base, S; altura, h) colocado na vetical da Terra (aceleraç ão da gravidade, g). Sendo m a massa de cada partícula, N o número de particulas e E_0 a energia do sistema, mostrar que.
3.1 A probabilidade de encontrar uma particula a altura z (a menos de dz) é:

$$n(z)dz = \frac{N}{h}\, e^{-\beta mgz}\frac{\beta mgz}{1 - e^{-\beta mgh}}dz \tag{10}$$

onde β é determinado por:

$$\frac{1}{\beta}\left[\frac{3}{2} + \left\{1 - \frac{\beta mgh}{e^{+\beta mgh} - 1}\right\}\right] = \frac{E_0}{N} \tag{11}$$

3.2 O centro de massa da coluna de gás apresenta flutuaç ões em torno do valor médio:

$$\langle Z \rangle = \frac{1}{\beta mg}\left[1 - \frac{\beta mgh}{e^{\beta mgh} - 1}\right] \tag{12}$$

e dispersão em torno do valor médio:

$$\langle (Z - \langle Z \rangle)^2 \rangle = \frac{1}{N(\beta mg)^2}\left[\frac{2}{3} + \frac{1}{F}\right]^{-1} \tag{13}$$

onde $F = 1 - \left[\frac{\beta mgh}{e^{\beta mgh} - 1}\right]^2$