FISICA ESTATISTICA (2002/2003)

Professor: José Fernando Mendes

Folha 2 : Dinâmica no espaço de fase

1. Uma partícula de massa m move-se num campo de forças cujo potencial é V. Escreva em coordenadas rectangulares e esféricas:
1.1 O hamiltoniano da partícula.
1.2 As equações de Hamilton.

2. Mostre que o volume de uma esfera de raio R num espaço N dimensional é dado por:

$$V_N(R) = \frac{\pi^{N/2} R^N}{(N/2)!} \tag{1}$$

3. Considere o seguinte modelo simplificado para uma reacção de fissão nuclear em cadeia. Um núcleo desintegra-se quandpcaptura um neutrão. sendo U o número de núcleos e n o número de neutrões no volume de reacção, a taxa de deacaimento deve ser proporcional a U e n:

$$\frac{dU}{dt} = -k_1 U(t) n(t) \tag{2}$$

Cada desintegração liberta um certo número de neutrões. Alguns são capturados por outros núcleos, absorvidos por moderadores ou escapam-se do reactor. Mas podemos supor que , em média, por cada desintegração, α meutrões ficam disponiveis para novas reacções. Assim,

$$\frac{dn}{dt} = -k_1 U(t) n(t) + \alpha \left(-\frac{dU}{dt} \right) = -k_1 (1-\alpha) U(T) n(t) \tag{3}$$

Estas equações descrevem um sistema dinâmico com um espaço de fase (U, n) (ambas positivas por natureza).
3.1 Estude as trajectórias no espaço de fase para diferentes valores de α.
3.2 Mostre que as trajectórias são linhas rectas.
3.3 Mostre que os estados esatcionários ou têm $U = 0$ ou $n = 0$ excepto se $\alpha = 1$.

4. Consideremos uma partícula livre (massa m) que se move no seguemento $[0, L]$ segundo o eixo dos x, com energia E_0.
4.1 Mostre que a "superficie" equienergética é constituída pelos segmentos de recta: $\{p = \pm p_0, x \in [0, L]\}$ onde $p_0 = \sqrt{2mE_0}$.
4.2 Considereando o domínio $D(E_0) = \{(x, p) \in \Gamma : H \leq E_0\}$, mostre que a sua medida é $\Omega(E_0) = 2L\sqrt{2mE_0}$. Mostre que a medida invariante da "superficie" equienergética é:

$$\Sigma(E_0) = L \left(\frac{2m}{E_0} \right)^{1/2} = T \tag{4}$$

(T é o período do movimento).
4.3 Integrando as equações do movimento, deduza que a distribuição de probabilidades da posição é $P(x) = 1/L$. Obtenha este resultado efectuando quer "médias no tempo" quer "médias de fase" (neste caso, suponha que a energia se encontra em $[E_0, E_0 + \delta E]$.

5. Considere um oscilador harmónico unidimensional (massa m e constante de força mw^2). Seja E_0 a energia total do oscilador.

5.1 Mostre que o hamiltoniano é dado por,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m w^2 x^2 \tag{5}$$

5.2 Mostre que a superficie equienergetica $H = E_0$ no espaço de fase é uma elipse (com semi eixos dados respectivamente por $\sqrt{\frac{2E_0}{mw^2}}$ e $\sqrt{2mE_0}$).
5.3 Deduza que a densidade de estados do sistema é dada por,

$$\Sigma(E_0) = \frac{2\pi}{w} = T \tag{6}$$

5.4 Integre as equações do movimento, supondo que, para $t = 0$, o ponto de fase do oscilador é (x, p). Relacione explicitamente as coordenadas (x', p') do ponto de fase no instante t com (x, p). Mostre que o elemento de volume $d\mu = dx\ dp$ é invarinate, isto é, $dx\ dp = dx\ dp$ (teorema do Liouville).
5.5 Efectuando, média no tempo, deduza que a distribuição de probabilidades da posição x é,

$$P(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}} \tag{7}$$

com $A = \sqrt{\frac{2E_0}{mw^2}}$ (amplitude do movimento).
5.6 Obter o resultado anterior efectuando a "média de fase", considerando neste caso qua a enegia está compreendida entre E_0 e $E_0 + \delta E$.
5.7 Suponha agora que a equação do movimento é dada por,

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + w_0^2 x = 0. \tag{8}$$

Verifique que neste caso o elemento de volume $dx\ dp$ se contrai, ao longo do tempo, como $e^{-2\gamma t}$. Qual a justificação geometrica? Porque falha o teorema de Liouville?