FISICA ESTATISTICA (2002/2003)

Professor: José Fernando Mendes

Folha 1 - Probabilidades

1. No jogo da roleta Russa, é inserida uma bala num dos orificios do tambor da pistola, ficando os outros cinco vazios. O tambor é posto a girar e depois de encostada a pistola à cabeça disparada.
1.1 Qual é a probabilidade de contnuar vivo ao fim de N disparos?
1.2 Qual é a probabilidade de sobreviver $N-1$ vezes e morrer na seguinte?
1.3 Qual é o número médio de vezes que um jogador joga?

2. A distribuição binomial, $W(n)$,

$$W(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} \tag{1}$$

dá-nos a probabilidade de um dado acontecimento caracterizado por uma probabilidade p ocorrer n vezes em N tentativas.
Calcular:
2.1 O valor médio de $n = \langle n \rangle = \sum_{n=0}^{N} nW(n)$.
2.2 $\langle n^2 \rangle = \sum_{n=0}^{N} n^2 W(n)$.
2.3 O valor da dispersão, $\Delta n = \sqrt{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}$.
Sugestão : Considere a função ,

$$F(x,y) = \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!(N-n)!} x^n y^{N-n} \tag{2}$$

e note que, por exemplo, $\left[x \frac{\partial F}{\partial x}\right]_{x=p, y=1-p} = \langle n \rangle$.
2.4 Considere o limite $N \gg 1$, e mostre que neste caso, $\frac{\Delta n}{\langle n \rangle} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$ e que a distribuição tem um pico agudo para $n = \langle n \rangle$.
2.5 Faça um desenvolvimento em série junto do pico da distribuição e mostre que $W(n)$ tende assimptoticamente para uma *gaussiana*, isto é, $W(n) \simeq Ae^{-(n-B)^2/2\sigma^2}$. Determine A, B e σ.
Sugestão : Use a fórmula de Stirling; $\log n! \simeq n \log n - n$.
2.6 Considere agora o caso $p \ll 1$ e $n \ll N$, mostre que $W(n)$ se reduz á distribuição de *Poisson*; $W(n) \simeq \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$.

3. Suponha que a densidade de probabilidade para a velocidade v de um carro, é dada por,

$$\rho(v) = Ave^{-v/v_0} \tag{3}$$

onde $0 \leq v \leq \infty$ e A e v_0 são constantes positivas. Mais propriamente, $\rho(v)dv$ dá-nos a probabilidade de um carro ter a velocidade entre v e $v + dv$.
3.1 Determine A em termos de v_0.
3.2 Qual é o valor médio da velocidade.
3.3 Qual é a velocidade mais provável, isto é, aquela para a qual a probabilidade é máxima. Compare

com o valor anterior.
3.4 Qual é a probabilidade de um carro ter velocidade superior a três vezes a velocidade média.

4. A probabilidade de encontrar n fotões de uma dada frequência num recipiente o qual se encontra em equilíbrio térmico com as suas paredes, é,

$$P_n = (1-\alpha)\alpha^n \tag{4}$$

onde $0 \leq \alpha \leq 1$ e é uma função da frequência , do volume e da temperatura das paredes.
4.1 Qual é o número médio de fotões com esta frequência .
4.2 Mostre que:

$$\frac{\langle \Delta n \rangle_{rms}}{\langle n \rangle} = \left(1 + \frac{1}{\langle n \rangle}\right)^{1/2} \tag{5}$$

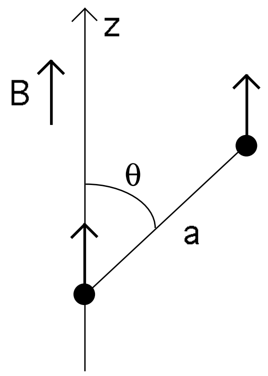
5. Considere um gás de N_0 moléculas não interactuantes contidas num recipiente de volume V_0. Consideremos agora uma porção V de volume ($V < V_0$) e seja N o número de moléculas nele contidas.
5.1 Qual é o número médio de moléculas contidas em V.
5.2 Encontrar a disperção relativa $\langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle / \langle N \rangle^2$ do número de moléculas contidas em V. Que acontece no limite $V \ll V_0$.
5.3 Que valor deve tomar a dispersão quando $V \uparrow V_0$. Confrontar com a resposta anterior.

6. Considere as variáveis independentes, x_1 e x_2 com uma distribuição uniforme no intervalo $[-L/2, L/2]$ que correspondem à posição de duas partículas identicas. Designado por $x = (x_1 + x_2)/2$ a abcissa do centro de massa, calcule:
6.1 Os valores médios, $\langle x_1^2 \rangle$ e $\langle x^2 \rangle$.
6.2 Mostre que a densidade de probabilidade da variável x é dada por,

$$w(x) = \begin{cases} \frac{2}{L} - \frac{4|x|}{L^2}, & |x| \leq \frac{L}{2}, \\ \\ 0, & |x| > \frac{L}{2}. \end{cases} \tag{6}$$

6.3 Considere agora um conjunto de N partículas do mesmo tipo, e designe por X a coordenada do centro de massa.
6.3.1 Calcule $\langle X \rangle$.
6.3.2 Mostre que $\langle X^2 \rangle^{1/2} = \frac{L}{\sqrt{12N}}$.
6.3.3 Indique a forma da densidade de probabilidade para a variável X, justificando.

7. Considere uma amostra policristalina de $CaSO_4.2H_2O$ num campo magnético externo $\vec{B}$ (segundo o eixo dos z). O campo magnético interno (também na direcção do eixo z) produzido na posição ocupada por um protão da molécula H_2O, pelo protão vizinho é dado por $\pm\mu(3\cos^2\theta - 1)/3$, onde o sinal + corresponde ao caso em que o spin do protão vizinho aponta na direcão do campo e $-$ no caso contrário.
Também, μ é o momento magnético do protão e a é a distância entre os dois protões , enquanto θ representa o ângulo entre a linha que une os dois protões e o eixo z. Nesta amostra de critais orientados ao acaso, o protão vizinho tem probabilidade uniforme de se localizar na superfície duma esfera de raio a centrada no protão dado.
7.1 Qual é a probabilidade $W(b)\, db$ do campo interno b se situar entre $(b, b+db)$ quando o spin do protão vizinho está orientado segundo $\vec{B}$.
7.2 Qual é a probabilidade $W(b)\, db$, se o spin do protão vizinho tem igual probabilidade de se orientar



paralela ou anti-paralelamente ao campo $\vec{B}$.