

Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática
Análise Matemática IV - 2002/03

FOLHA PRÁTICA N.º 4 - EQUAÇÕES COM DERIVADAS PARCIAIS DE
SEGUNDA ORDEM - EQUAÇÃO DE CALOR E EQUAÇÃO DE LAPLACE

1. Resolva (formalmente) os problemas

$$(a) \quad u_t = K u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L;$$

$$(b) \quad u_t = K u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$u_x(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L.$$

Encontre as soluções exactas nos casos:

$$(a) \quad L = \pi, \quad f(x) = \sin x \sin 3x;$$

$$(b) \quad L = 5\pi/2, \quad g(x) = 2 \cos x.$$

2. Transforme o problema com condições de fronteira não homogéneas

$$u_t = K u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = h_0(t), \quad u(L, t) = h_1(t), \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < L;$$

num outro em que as condições de fronteira sejam homogéneas, e aplique a transformação nos casos:

$$(a) \quad h_0(t) = \alpha, \quad h_1(t) = \beta;$$

$$(b) \quad h_0(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t, \quad h_1(t) = \beta_1 + \beta_2 t;$$

$$(c) \quad h_0(t) = e^{-t}, \quad h_1(t) = 0.$$

3. Resolva o problema

$$u_t = u_{xx} + \sin(2\pi x), \quad 0 < x < 2\pi, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = u(2\pi, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < L.$$

4. Resolva, formalmente, o problema de Dirichlet para a equação de Laplace, $\delta u = 0$, no rectângulo $R =]-a, a[\times]-b, b[$ com condições de fronteira:

$$u(x, -b) = u(x, b) = 0, x \in [-a, a],$$

$$u(-a, y) = g_0(y), u(a, y) = -g_0(y), y \in [-b, b],$$

$$\text{onde } g_0(b) = g_0(-b) = 0.$$

5. Encontre uma função harmónica que tomava valores

$$u(1, 1) = 3, u(-1, -1) = -1, u(1, -1) = u(-1, 1) = -1.$$

6. (a) Determine relações entre as constantes a, b, c , de modo que $u(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ seja harmónica.

(b) Mesma questão para a função $u(x, y) = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$.

7. Mostre que se $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ for harmónica, então as funções definidas a seguir também são harmónicas:

$$v(x, y) = u(x - a, y - b); \quad w(x, y) = u(\lambda x, -\lambda y);$$

$$z(x, y) = u(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y),$$

onde $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ é uma matriz ortogonal.

8. Resolva o problema de Dirichlet para o rectângulo $R =]0, a[\times]0, b[$ com dados de fronteira

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = b, \quad u(0, y) = u(a, y) = y.$$

9. Resolva o problema de Dirichlet para o anel

$$D = \{(r, \varphi) : r \in]1, 2[, \varphi \in [-\pi, \pi[\},$$

$$\text{com dados de fronteira } v(1, \varphi) = \cos \varphi, v(2, \varphi) = \cos 2\varphi.$$