

Conteúdo

Introdução	ix
I Conceitos e Resultados Gerais	1
1 Linguagem Matemática e Lógica Informal	3
1.1 Sistemas matemáticos	3
1.2 Noção de conjunto	6
1.3 Linguagem proposicional	7
1.4 Operações sobre conjuntos	11
1.5 União e intersecção generalizadas e quantificadores	14
1.6 Relações	16
1.6.1 Relações de ordem	19
1.6.2 Relações de equivalência	20
1.6.3 Funções	22
1.7 Cardinalidade	26
1.8 Algumas notas históricas	31
1.9 Exercícios.	33
2 Contextos e Estratégias de Demonstração	37
2.1 Estratégias de demonstração da implicação	37
2.1.1 Prova directa	37
2.1.2 Demonstração por contraposição	39
2.1.3 Demonstração por redução ao absurdo	40
2.2 Princípio de indução	41
2.3 Princípio da gaiola dos pombos	49
2.4 Exercícios.	51
II Combinatória	55
3 Princípios de Enumeração Combinatória	57
3.1 Princípio da bijecção	57
3.2 Princípios da adição e da multiplicação	60
3.3 Princípio de inclusão-exclusão	64
3.4 Exercícios	68

4	Agrupamentos e Identidades Combinatórias	71
4.1	Arranjos com repetição	71
4.2	Arranjos e combinações simples	72
4.3	Combinações e permutações com repetição	77
4.4	Permutações	81
4.5	Identidades combinatórias	85
4.6	Exercícios	90
5	Recorrência e Funções Geradoras	93
5.1	Dependências recursivas simples	93
5.2	Equações de recorrência homogêneas	95
5.3	Equações de recorrência lineares não homogêneas	102
5.4	Equações de recorrência não lineares	106
5.5	Funções geradoras	109
5.5.1	Séries formais de potências	110
5.5.2	Funções geradoras ordinária e exponencial	115
5.6	Equações de recorrência e funções geradoras	118
5.7	Funções geradoras de várias variáveis	123
5.8	Exercícios	124
6	Números Combinatórios	127
6.1	Factoriais e números binomiais	127
6.2	Números de Fibonacci e o número de ouro	130
6.3	Números de Stirling	136
6.4	Números de Euler	141
6.5	Números de Bell	144
6.6	Números de Catalan	145
6.7	Exercícios	150
III	Abordagens Algébricas da Combinatória	153
7	Conjuntos Parcialmente Ordenados e Reticulados	155
7.1	Conjuntos ordenados – definições básicas	155
7.2	Funções entre conjuntos parcialmente ordenados	158
7.3	Reticulados	161
7.3.1	Definições e conceitos básicos	162
7.3.2	Subreticulados e isomorfismos	164
7.3.3	Reticulados distributivos	167
7.3.4	Representação de reticulados distributivos	170
7.3.5	Topologias finitas e reticulados	171
7.4	Cadeias e anticadeias	180
7.5	Relações de ordem fraca, intervalar e semi-transitivas	185
7.6	Teorema da inversão de Möbius	189
7.7	Conjuntos extremais	194
7.8	Exercícios	197

8	Divisibilidade e Aritmética Modular	201
8.1	Algoritmo de Euclides	202
8.2	Funções de Euler e de Möbius	204
8.3	Relações de congruência	208
8.4	Equações e polinômios em corpos finitos	212
8.5	Corpos de Galois	216
8.6	Quadrados latinos e quadrados mágicos	225
8.7	Exercícios	233
9	Designs Combinatórios e Geometrias Finitas	237
9.1	Designs combinatórios	237
9.2	Planos projectivos e afins	244
9.3	Quadrados latinos e planos afins e projectivos	254
9.4	Espaços projectivos	259
9.5	Matrizes de Hadamard	263
9.6	Exercícios	267
10	Álgebras de Boole	271
10.1	Definições e resultados básicos	271
10.2	Cálculo proposicional e circuitos lógicos	277
10.3	Átomos e isomorfismos	285
10.4	Funções booleanas	289
10.5	Mapas de Karnaugh	293
10.6	Exercícios	300
11	Grupos Finitos e Enumeração de Pólya	305
11.1	Introdução aos grupos finitos	305
11.2	Lema de Burnside	310
11.3	Teorema de Pólya	314
11.4	Grupo diedral	319
11.5	Exercícios.	321
IV	Teoria dos Grafos e Algoritmos	327
12	Conceitos e Resultados Fundamentais	329
12.1	Grafos orientados e não orientados	329
12.2	Representações de grafos em computador	333
12.3	Isomorfismos, grafos etiquetados e não etiquetados	335
12.4	Conceitos métricos	336
12.5	Grafos e subgrafos particulares	338
12.6	Exemplos de enumeração de grafos simples	341
12.7	Sequências de graus de vértices	343
12.8	Algoritmos de pesquisa em grafos	347
12.9	Exercícios	350
13	Conexidade	357
13.1	Grafos Conexos	357
13.2	Determinação de componentes conexas	361
13.3	Algoritmo de fusão de vértices	362
13.4	Grafos orientados fortemente conexos	369

13.5	Algoritmo de Leifman	371
13.6	Exercícios	375
14	Caminhos	379
14.1	Relações entre diâmetro, cintura e número de vértices	379
14.2	Pesquisa em largura em grafos sem custos nas arestas	385
14.3	Custos não negativos – algoritmo de Dijkstra	387
14.4	Custos arbitrários – algoritmo de Bellman-Ford	392
14.5	Algoritmo de Floyd	394
14.6	Exercícios	397
15	Árvores	401
15.1	Árvores e florestas	401
15.2	Número de árvores abrangentes	403
15.3	Geração de todas as árvores abrangentes	406
15.4	Código de Prüfer	410
15.5	Árvores abrangentes de custo mínimo	413
15.5.1	Algoritmo de Kruskal	413
15.5.2	Algoritmo de Prim	416
15.6	Exercícios	418
16	Fluxos em Redes	423
16.1	Fluxo máximo em redes	423
16.1.1	Teorema de Ford e Fulkerson	425
16.1.2	Algoritmo para o fluxo máximo	428
16.2	Fluxo de custo mínimo	432
16.2.1	Soluções básicas admissíveis	433
16.2.2	Método simplex para redes	437
16.3	Exercícios	444
17	Emparelhamentos	449
17.1	Emparelhamentos máximos e perfeitos	449
17.2	Emparelhamentos em grafos bipartidos	452
17.2.1	Sistemas de representantes distintos	454
17.2.2	Uma aplicação à partição mínima de cpos em cadeias	457
17.2.3	Problema de afectação de tarefas	460
17.2.4	Problema de afectação óptima de tarefas	463
17.3	Emparelhamentos em grafos arbitrários	468
17.4	Emparelhamentos em grafos com pesos nas arestas	473
17.5	Exercícios	476
18	Grafos de Euler e Grafos de Hamilton	479
18.1	Grafos de Euler	480
18.1.1	Algoritmos de Hierholtzer e de Fleury	483
18.1.2	Problema do carteiro chinês	485
18.2	Grafos de Hamilton	489
18.2.1	Código de Gray	493
18.2.2	Problema do caixeiro viajante	496
18.3	Exercícios	502

19 Independentes, Cliques e Colorações	507
19.1 Conjuntos independentes e cliques	507
19.2 Coloração de vértices	511
19.2.1 Uma aplicação das funções booleanas	518
19.2.2 Polinômios cromáticos	522
19.2.3 Colorações parciais e Sudoku	526
19.3 Coloração de arestas	533
19.3.1 Números de Ramsey para grafos simples	536
19.4 Exercícios	541
20 Grafos Planares e Generalizações	547
20.1 O ponto de vista topológico	547
20.1.1 Realização de grafos em superfícies orientáveis	548
20.1.2 Menores e menores topológicos	550
20.2 Grafos planares	553
20.2.1 Propriedades dos grafos planares	554
20.2.2 Teorema de Kuratowski	556
20.2.3 Dualidade em grafos e digrafos planares	559
20.2.4 Grafos platônicos	562
20.3 Grafos com genus positivo	564
20.3.1 Fórmula de Euler generalizada	565
20.3.2 Grafos g -platônicos	567
20.4 Mapas e colorações	568
20.4.1 Teorema das quatro cores	569
20.4.2 Colorações em superfícies de genus positivo	574
20.4.3 Conjecturas de Hadwiger e Hajós	576
20.5 Exercícios	578
Apêndices	583
A Notação Assimptótica	585
A.1 Notação "O-grande" (\mathcal{O})	585
A.2 A notação "o-pequeno" (\mathcal{o})	588
A.3 Outras notações assimptóticas	589
A.4 Teorema da recorrência universal	591
A.5 Exercícios	593
B Notação	597
Bibliografia	601
Índice	607