Sobre o Teorema das Quatro Cores

Domingos Moreira Cardoso
Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Um dos mais velhos problemas relacionados com a teoria dos grafos diz respeito à **coloração de mapas**. Com este problema pretende-se saber qual o menor número de cores necessárias para pintar um mapa de forma que não existam países, com fronteira comum, pintados da mesma côr. Um modo de modelar este problema consiste na construção de um grafo com tantos vértices quantos os países do mapa a colorir e ligar (com uma aresta) cada par de vértices aos quais correspondam países com fronteira comum. Tais grafos designam-se por grafos planares e apresentam a particularidade de se poderem representar numa folha de papel à custa de linhas (as arestas) e pontos (os vértices) sem que existam arestas cruzadas, i. e, arestas que se intersectem. Nestas condições teremos que atribuir cores aos vértices de modo que não existam vértices adjacentes (i. e, ligados por uma aresta) com a mesma côr. Mais geralmente, designa-se por coloração dos vértices de um grafo, G (denotando-se por V(G) e E(G), respectivamente, o conjunto dos vértices e o conjunto das arestas de G), toda a função $\varphi:V(G)\rightarrow C$ (onde $C=\{1, \ldots ,p\}$ identifica um conjunto finito de cores) sobrejectiva tal que $\varphi(x)\neq\varphi(y)$ se $\{x,y\}\in E(G)$. Se $|C|=p$, então diz-se que o grafo G é p-colorável e no caso de p ser a menor das cardinalidades para as quais existe $\varphi:V(G)\rightarrow C$ definindo uma coloração, diz-se que o número cromático de G, que se denota por $\chi(G)$, é igual a p. Consequentemente, $\chi(G)$ corresponde ao menor número de cores a atribuir aos vértices de G de tal modo que não existam vértices adjacentes com a mesma côr.

Desde muito cedo se conjecturou que 4 cores bastariam para resolver o problema da coloração dos vértices de grafos planares. O cartógrafo inglês Francis Guthrie, já em 1852, reclamava a suficiência de 4 cores para distinguir os países num mapa plano e foi precisamente nesse ano (1852) que A. de Morgan, numa carta que enviou a W. R. Hamilton, afirmou ter tomado conhecimento do problema das 4 cores através de um seu aluno, Frederick Guthrie (irmão de Francis Guthrie e que, na altura, era estudante de Matemática em Cambridge). Em 1878, numa comunicação apresentada na "London Mathematical Society", Cayley referiu-se ao problema das 4 cores como sendo um problema em aberto. Um ano mais tarde Kempe propôs uma pretensa solução que veio a ser refutada em 1890 por Heawood no seu primeiro trabalho escrito onde,

adicionalmente, apresentou a prova da suficiência de cinco cores para a coloração dos vértices de grafos planares.

Nos grafos, as sequências de vértices e arestas da forma $x_1,\{x_1,x_2\},x_2,\{x_2,x_3\},\ldots,x_{k-1},\{x_{k-1},x_k\},x_k$ designam-se por trajectos quando não existem arestas repetidas e por caminhos quando não existem vértices repetidos [1]. Os trajectos fechados (com extremos coincidentes) designam-se por circuitos e os trajectos fechados cujos únicos vértices repetidos são os vértices inicial e final designam-se por ciclos. Um grafo diz-se conexo se existe um caminho entre quaisquer dois dos seus vértices. Num grafo conexo planar, G, a região ilimitada (exterior ao grafo) e as regiões limitadas por um ciclo que não contêm outros ciclos, para além do que constitui a sua fronteira, designam-se por faces do grafo e o conjunto destas faces denota-se por F(G). Leonhard Euler (1707-1783) estabeleceu a fórmula (que hoje tem o seu nome) que relaciona o número de vértices, arestas e faces de um grafo conexo planar G, $|F(G)|=E(G)|-|V(G)|+2$. Designa-se por triangulação do plano todo o grafo conexo planar cujas faces têm como fronteira ciclos triangulares (i. e, ciclos com três aresta). Uma triangulação do plano, G, também se designa por grafo planar maximal, dado que, nestes grafos, $|E(G)|=3|V(G)|-6$ e (conforme decorre da fórmula de Euler para grafos conexos planares) qualquer grafo conexo planar apresenta um número de arestas não superior a $3|V(G)|-6$.

Para se provar o teorema das quatro cores é suficiente provar que qualquer grafo planar maximal (triangulação do plano) tem número cromático igual a 4.

Nos "Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1878-80" Tait, provou que "se G é uma triangulação do plano, então $\chi(G)\leq 4$ sse as arestas de G podem ser etiquetadas com três etiquetas de tal forma que na fronteira de cada face existam três etiquetas distintas". Por sua vez, Heawood, em 1898, provou os seguintes resultados:

1. "Sendo G uma triangulação do plano, $\chi(G)\leq 4$ sse as faces de G podem ser etiquetadas com +1 e -1, de tal forma que em qualquer vértice a soma das etiquetas de todas as faces que lhe são contíguas seja igual a zero módulo 3";

2. "Sendo G uma triangulação do plano, $\chi(G)\leq 3$ sse todos os vértices têm grau par".

Do teorema de Konig (1916), onde se afirma que um grafo tem número cromático igual a 2 sse não tem circuitos de comprimento impar, decorre que $\chi(G)\geq 3$ sse G contém um circuito de comprimento impar.

---

[1] As sequências de vértices e arestas em que existem vértices e arestas repetidas designam-se por passeios.

Uma conjectura que pretende generalizar o teorema das quatro cores é a famosa conjectura de Hadwiger (1943) que se pode formular nos seguintes termos:

> Seja *G* uma classe de grafos fechada relativamente à operação de eliminação de vértices e/ou arestas e à operação de contracção de arestas, com eventual remoção das arestas paralelas e lacetes (arestas cujos extremos incidem no mesmo vértice) produzidos por estas operações. Então, $\max\{\chi(G): G \in G\}=k$, onde k é o número de vértices do maior grafo completo (i. e, grafo em que todos os vértices são adjacentes entre si) de *G* , entendendo-se por maior grafo o que contém maior número de vértices.

Dirac (1952) provou esta conjectura para k=3 e, para k=4, conforme foi provado por Wagner em 1937, ela é equivalente ao teorema das quatro cores.

Wagner, na sua tese de doutoramento, publicada em 1935, atacou o problema das 4 cores de um modo não topológico, classificando uma classe de grafos, *G*, idêntica à anteriormente referida mas sem conter qualquer grafo completo com 5 vértices, com o objectivo de mostrar, de um modo abstracto, que todos os grafos desta classe admitiriam uma coloração dos vértices com 4 cores (e, como esta classe de grafos inclui os grafos planares, adicionalmente, provaria o teoream das quatro cores). Embora Wagner não tenha conseguido atingir o seu principal objectivo, os resultados que obteve foram de grande importância e influenciaram, fortemente, o aparecimento da conjectura de Hadwiger.

Um outro resultado com implicações profundas em teoria dos grafos e topologia é o obtido por Grotzsch (1959), onde se afirma que "se G é um grafo planar que não contém triângulos, então $\chi(G)\leq 3$".

A prova da suficiência de quatro cores para a coloração dos vértices de grafos planares, só muito recentemente (1976) foi efectuada por Kenneth Appel e Wolfgang Hakem para as triangulações do plano e, consequentemente, para todos os grafos planares.

> **Teorema** (Appel e Haken, 1977 e Appel, Haken e Koch, 1977)
> Existe um conjunto C de 1482 configurações tais que (a) qualquer triangulação do plano contém um elemento de C e (b) qualquer grafo planar que contenha um elemento de C admite uma coloração dos seus

vértices com 4 cores a qual pode ser obtida a partir da coloração com 4 cores de triangulações "mais pequenas".

A prova de (a) foi baseada na fórmula de Euler e num procedimento, bastante elaborado, de verificação exaustiva, por computador, das 1482 configurações gráficas. A prova de (b) decorre de um resultado obtido por Bernhart (1947) tendo em conta certas propriedades dos elementos do conjunto C. A publicação desta prova, em (Appel e Haken, 1977) e (Appel, Haken e Hock, 1977), causou alguma polémica não só pelo facto da verificação exaustiva das diferentes configurações recorrer ao computador, mas também pela sua extensão e ausência de detalhes. Appel e Haken, em 1989, publicaram uma segunda versão desta demonstração onde respondem a várias críticas, até então levandas, e corrigem algumas falhas detectadas na primeira versão. Mais recentemente (1994) Robertson, Sanders, Seymour e Thomas apresentaram uma prova semelhante com a utilização de um menor número de configurações (menos de 700), mas ainda com recurso à verificação por computador.

Talvez não tenha sido ainda colocada uma pedra sobre o teorema das quatro cores, que constitui o vértice de uma pirâmide de resultados com inúmeras implicações em muitos problemas de natureza combinatória, sendo espectável que novas simplificações e diferentes abordagens da demosntração deste teorema, acabem, mais cedo ou mais tarde, por surgir. Para os interessados no estudo dos problemas de coloração de grafos existem excelentes publicações que lhe são completamente dedicadas e outras que contêm alguns capítulos onde este tema é analisado com profundidade. No primeiro caso pode referir-se o livro de Jensen e Toft (1995) (onde se apresentam mais de 200 problemas em aberto) e o de Saaty e Kainen (1986). No segundo propõem-se os livros de Bollobás (1978) (particularmente o seu capítulo 5) e o de Diestel (1997) (com especial destaque para os capítulos 5 e 8). Nesta linha, sugere-se ainda a leitura do capítulo sobre colorações, estáveis e grafos perfeitos da responsabilidade de Toft (1995) no volume I de "Handbook of Combinatorics" editado por Grahm, Grotschel e Lovász.

Referências

Appel K., W. Haken (1977). "Every planar map is four colorable. Part I: Discharging". *Ilinois J. Math.* 21, 429-490.

Appel K., W. Haken, J. Kock (1977). "Every planar map is four colorable. Part II: Reducibility". *Ilinois J. Math.* 21, 491-567.

Appel K., W. Haken (1989). "Every Planar Graph Map is Four Colorable". *American Mathematical Society*.

Bernhart A. (1947). "Six rings in minimal five color maps". *Amer. J. Math.* 69, 391-412.

Bollobás, B. (1978). *Extremal Graph Theory*. Academic Press.

Dirac, G. A. (1952). “A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs”. *J. London Math. Soc.* 27, 85-92.
Diestel, R. (1997). *Graph Theory*. Springer.
Grotzsch, H. (1959). “Ein Dreifarbensatz fur dreikreisfreie Netz auf der Kugel”. *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg Math.Nat. Reihe* 8, 109-120.
Hadwiger, H. (1943). “Uber eine Klassifikation der Streckenkomplex”. *Vierteljschr. Naturforsch. Ges. Zurich* 88, 133-142.
Heawood, P.J. (1890). “Map colour theorem”. *Quart. J. Pure Math.* 24, 332-338.
Heawood, P.J. (1898). “On the four-colour map theorem”. *Quart. J. Pure Math.* 29, 270-285.
Jensen, T. R., B. Toft (1995). *Graph Coloring Problems*. John Wiley & Sons.
Konig, D. (1916). “Uber Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre”. *Math. Ann.* 77, 453-465.
Robertson, N., D.P. Saunders, D. Seymour, R. Thomas (1994). “The four-colour theorem,” *J. Comb. Theory* B 70.
Saaty T., P. Kainen (1986). *The Four Color Problem. Assents and Conquest*. Dover Publications.
Toft (1995). “Colouring, stable sets and Perfect Garphs”. *Handbook of Combinatorics*, vol I (ed. R. L. Grahm, M. Grotschel e L. Lovász), North-Holland, 233-288.
Wagner, K. (1937) “Uber eine Eigenschaft der ebenn Komplexe”. *Math. Ann.* 114, 570-590.