Barreira Autoconcordante no Cone dos Quadrados de uma Álgebra de Jordan Euclidiana

Luís A. Vieira (lvieira@fe.up.pt)
Faculdade de Engenharia, Departamento de Emngenharia Civil
Secção de Matemática e Física, R. Dr. Roberto Frias, 4200-465 Porto, Portugal

Domingos M. Cardoso (dcardoso@mat.ua.pt)
Universidade de Aveiro, Departamento de Matemática, 3810-193 Aveiro, Portugal

Outubro de 2000

Abstract. Neste relatório demonstra-se que sobre o cone dos quadrados, Q, de uma álgebra de Jordan euclidiana, V, com caracteristica r existe uma barreira r–normal, a saber $F(x) = -\log\det x$. Prova-se ainda que o número de Caratheodory de Q, $k(Q)$, coincide com a característica, r, da álgebra de Jordan euclidiana, V. Como consequência, dado que todo o cone dos quadrados de uma álgebra de Jordan euclidiana é um cone simétrico e o parâmetro óptimo de uma barreira normal sobre um cone simétrico é igual ao número de Caratheodory, conclui-se que o parâmetro óptimo da barreira $F(x)$ é igual à característica da álgebra.

Keywords: Jordan Algebras, Selfconcordant Barriers, Interior Point Methods.

1. Introdução

Ao longo deste relatório vamos considerar $(V, |)$ como sendo um e.v. real euclidiano de dimensão finita, n, e $(V, \circ)$ como sendo uma álgebra de Jordan euclidiana associada com característica, $r = r(V)$, e elemento unidade $\mathbf{e}$. Esta àlgebra de Jordan também se denotará, simplesmente, por V. Considerar-se-à ainda que Q denota o cone dos quadrados de V, i.e., $Q = \{x^2 : x \in V\}$. O interior deste cone, que denotaremos por $int(Q)$, é um cone simétrico, i.e., é um cone próprio (ou seja, tal que $\bar{Q} \cap (-\bar{Q}) = \{0\}$, onde $\bar{Q}$ denota a aderência de Q), convexo, homógeneo, autodual, aberto e com interior não vazio.
Em vez do produto interno original utilizar-se-á o produto interno definido por $< x, y >= \mathrm{tr}(x \circ y)$, onde $\mathrm{tr}(x)$ denota a forma estudada em (Faraut and Korányi, 1994). Note-se que quando a álgebra de Jordan euclidiana é irredutível este produto interno, $< x, y >= \mathrm{tr}(x \circ y)$, é equivalente ao produto interno definido no e.v., V, no sentido em que existe uma constante $\tau \in I\!R^+$ tal que $< x, y >= \tau(x|y)$.
Este relatório divide-se em três partes. Na primeira estudam-se as propriedades da barreira $F(x) = -\log(\det(x))$, definida no cone dos quadrados da álgebra, segundo uma via puramente algébrica. Na segunda parte relaciona-se a característica da álgebra de Jordan com o número de Carathéodory do respectivo cone dos quadrados e tiram-se conclusões acerca do parâmetro óptimo (no sentido de (Guler, 1995)) da barreira F. Finalmente, na última parte, que designamos apêndice, faz-se um resumo dos principais conceitos e resultados

sobre álgebras de Jordan, álgebras de Jordan euclidianas, cone dos quadrados e sobre álgebras de Jordan euclidianas redutíveis e irredutíveis.

2. Construção de uma Barreira sobre um Cone Simétrico

Ao longo desta secção vamos considerar a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rcl} F : int(Q) & \rightarrow & I\!R \\ x & \rightarrow & F(x), \end{array}$$

onde $F(x) = -\log(\det(x))$ e $det(x)$ é a aplicação clássica definida nas álgebras de Jordan, a qual pode ser consultada em (Vieira e Cardoso, 2000-(a)).
Com facilidade se verifica que esta função, F, admite derivadas de ordem arbitária. Com efeito, uma vez que $\det(x)$ é um polinómio de grau r, nas coordenadas de x numa base fixa de V, então $F(x)$ é uma função infinitamente diferenciável em todos os pontos x tais que $\det(x) > 0$. Logo, uma vez que no cone dos quadrados, Q, $\forall x \in int(Q)$ $det(x) > 0$, conclui-se o pretendido.

TEOREMA 2.1. *Para a função, F, $\forall x \in int(Q)$ verifica-se que*

$$\nabla F(x) = -x^{-1}.$$

Proof. Tendo em conta que a aplicação $x \rightarrow \det(x)$ é um polinómio nas coordenadas de x, conclui-se que a aplicação

$$\begin{array}{rcl} int(Q) & \rightarrow & I\!R \\ x & \rightarrow & \log(\det(x)), \end{array}$$

é diferenciável no seu domínio e que o seu gradiente é

$$\nabla log(\det(x)) = \frac{\nabla \det(x)}{\det(x)}.$$

Vamos começar por provar que $\forall x \in V$

$$\det(\lambda e - x) = \lambda^r - a_1(x)\lambda^{r-1} + \cdots + (-1)^r a_r(x). \tag{1}$$

Como o conjunto dos elementos regulares é denso em V, basta-nos provar (1) para um elemento regular arbitrário $x \in V$.
Seja x um elemento regular de V. Então $\lambda e - x$ é também regular, uma vez que, sendo r a característica de x, r é o menor número natural tal que o conjunto $\{e, x, \cdots, x^r\}$ é linearmente dependente e o subespaço gerado por $S = \{e, x, \cdots, x^{r-1}\}$ coincide com o subespaço gerado por

$$B = \{e, \lambda e - x, \cdots, (\lambda e - x)^{r-1}\}.$$

Logo se S é um conjunto linearmente independente então B é também linearmente independente. Por outro lado, como $(\lambda e - x)^r$ é um elemento do

subespaço gerado por S conclui-se que é também um elemento do subespaço gerado por B, o que completa a prova de que a caracteristica de $\lambda e - x$ é igual a r.
Provemos agora que

$$\det(\lambda e - x) \ = \ p(x,\lambda) = \lambda^r - a_1(x)\lambda^{r-1} + \cdots + (-1)^r a_r(x), \tag{2}$$

onde $p(x,\lambda)$ é o polinómio característico associado a $x \in V$ que pode ser consultado em (Vieira e Cardoso, 2000-(a)). Considere-se o operador $L_0(\lambda e - x)$ que denota a restrição do operador $L(\lambda e - x)$ [1] ao subespaço vectorial real gerado por

$$B = \{e, \lambda e - x, \cdots, (\lambda e - x)^{r-1}\}.$$

Tendo em conta que, conforme já se referiu, o subespaço gerado por S é igual ao subespaço gerado por B e ainda que o determinante do operador linear $L_0(\lambda e - x)$ não depende da base, por facilidade de cálculo, em vez de B vamos considerar a base $S = \{e, x, \cdots, x^{r-1}\}$. Por outro lado, uma vez que $\det(\lambda e - x) = \mathrm{Det}(L_0(\lambda e - x))$ [2], basta-nos calcular $\mathrm{Det}(L_0(\lambda e - x))$.
Procedendo-se ao cálculo da matriz da aplicação linear $L_0(\lambda e - x)$ na base

$$\{e, x, x^2, \cdots, x^{r-1}\}$$

obtém-se

$$(\lambda e - x)x^i \ = \ \lambda x^i - x^{i+1}, \ \text{para } i = 0, \cdots, r-2,$$

onde x^0 denota a unidade da álgebra, **e**, e, para $i = r-1$, tendo em conta que x^r é combinação linear de $e, x, \cdots, x^{r-1}$, vem

$$\begin{aligned}(\lambda e - x)x^{r-1} &= \lambda x^{r-1} - x^r \\ &= \lambda x^{r-1} - (a_1(x)x^{r-1} - a_2(x)x^{r-2} + \cdots - (-1)^r a_r(x)e)\end{aligned}$$

pelo que a matriz de $L_0(\lambda e - x)$ relativa à base S vem dada por

$$M_{L_0(\lambda e - x)} \ = \ \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & (-1)^r a_r(x) \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & (-1)^{r-1} a_{r-1}(x) \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & (-1)^{r-2} a_{r-2}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_2(x) \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda - a_1(x) \end{bmatrix}.$$

[1] Dado $x \in V$, o operador $L(x)$ é o operador linear de V em V qua a cada $y \in V$ associa o vector $L(x)y = x \circ y$.

[2] Note-se que $\det(x) = \mathrm{Det}(L_0(x)) = \mathrm{Det}(M_{L_0(x)})$, onde $M_{L_0(x)}$ denota a matriz do operador linear, $L_0(x)$, relativamente à base S, quando x é regular e o operador $L_0(x)$ representa a restrição do operador $L(x)$ à subálgebra real de V gerada por **e** e x. Ver prova em (Vieira e Cardoso, 2000-(a)).

Assim, a partir da multilinearidade do determinante, o determinante da matriz $M_{L_0(\lambda e - x)}$ vem dado por

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & (-1)^r a_r(x) \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & (-1)^{r-1} a_{r-1}(x) \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & (-1)^{r-2} a_{r-2}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_2(x) \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda - a_1(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & (-1)^r a_r(x) \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & (-1)^{r-1} a_{r-1}(x) \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & (-1)^{r-2} a_{r-2}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_2(x) \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & -a_1(x) \end{vmatrix},$$

donde vem que

$$\begin{aligned} \det(\lambda e - x) = \mathrm{Det}(L_0(\lambda e - x)) \ &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & (-1)^r a_r(x) \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & (-1)^{r-1} a_{r-1}(x) \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & (-1)^{r-3} a_{r-2}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_2(x) \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda - a_1(x) \end{vmatrix} \\ &= \lambda^r + (-a_1(x))\lambda^{r-1} + a_2(x)\lambda^{r-2} + \cdots + (-1)^r a_r(x), \end{aligned}$$

o que completa a prova de (2). Mas então, considerando $\lambda = 1$ e $x = -tu$ vem

$$\begin{aligned} \det(e + tu) &= \det(e - (-tu)) \\ &= 1 - a_1(-tu) + a_2(-tu) + \cdots + (-1)^r a_r(-tu) && (3) \\ &= 1 + t a_1(u) + t^2 a_2(u) + \cdots + t^r a_r(u), && (4) \end{aligned}$$

tendo em conta que a passagem de (3) para (4) se deve ao facto dos coeficientes $a_i(x)$, para $i = 1, \cdots, r$, serem funções homogéneas de grau i nas coordenadas de x numa base fixa de V (Vieira e Cardoso, 2000-(a)).
Logo a aplicação $t \to \det(e + tu)$ é derivável e a sua derivada, em $t = 0$, vem dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\det(e + tu))_{t=0} &= a_1(u) && (5) \\ &= \mathrm{tr}(u) && (6) \\ &= \mathrm{tr}(e \circ u) && (7) \\ &= < e, u >, && (8) \end{aligned}$$

onde a passagem de (5) para (6) é obtida por definição.
Assim, conclui-se que

$$\nabla \det e \ = \ e.$$

Como para todo $x \in int(Q)$ $\exists y \in V$ tal que $x = y^2$ vem que

$$\begin{aligned} x &= y^2 \\ &= 2y^2 - y^2 \\ &= 2y \circ y - y^2 \\ &= 2L(y)y - y^2 \circ e \\ &= 2L(y)(y \circ e) - L(y^2)e \\ &= 2L(y)(L(y)e) - L(y^2)e \\ &= (2L(y)L(y) - L(y^2))e \\ &= P(y)e. \end{aligned} \tag{9}$$

Logo, uma vez que $\det(P(y)u) = (\det y)^2 \det(u)$, [3] e $(\det y)^2 = \det(y^2)$ (ver (Faraut and Korányi, 1994)) proposição II.2.2, pag. 30) vem que

$$\begin{aligned} \det(P(y)u) &= (\det y)^2 \det(u) \\ &= \det(y^2)\det(u) \\ &= \det(x)\det(u). \end{aligned}$$

Mas então, como numa álgebra de Jordan de dimensão finita com elemento unidade, $P(y)$ é invertível sse y é invertível e, nesse caso, $P(y^{-1}) = P^{-1}(y)$ (ver (Faraut and Korányi, 1994), proposição II.3.1, pag. 32), obtém-se

$$\begin{aligned} \det(x + tu) &= \det(P(y)(e + tP^{-1}(y)u)) \\ &= \det(P(y)(e + tP(y^{-1})u)) \\ &= \det(x)\det(e + tP(y^{-1})u). \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} < \nabla \det(x), u > &= \frac{d}{dt}(\det(x + tu))_{t=0} \\ &= \det(x)\frac{d}{dt}(\det(e + tP(y^{-1})u) \\ &= \det(x) < e, P(y^{-1})u > \quad \text{(de acordo com (8))} \\ &= \det(x) < P(y^{-1})e, u > \quad \text{(porque } P(.) \text{ é autoadjunto)} \\ &= \det(x) < y^{-2}, u > \\ &= \det(x) < x^{-1}, u >, \end{aligned}$$

donde,

$$\nabla \det(x) = \det(x)x^{-1}.$$

[3] Este resultado, embora tenha sido obtido em (Faraut and Korányi, 1994), proposição III.4.2, pag. 52, para as álgebras de Jordan euclidianas simples, é também válido para qualquer álgebra de Jordan euclidiana, conforme se prova em (Vieira e Cardoso, 2000-(a)).

Consequentemente

$$\begin{aligned}\nabla \log \det(x) &= \frac{\nabla \det(x)}{\det(x)} \\ &= x^{-1}\end{aligned}$$

ou seja, $\nabla F(x) = -x^{-1}$. ∎

TEOREMA 2.2. *A função, F, é estritamente convexa.*

Proof. Vamos considerar como norma em V a norma, $||.||$, definida por $||x|| = \sqrt{\mathrm{tr}(x \circ x)}$. Considere-se o conjunto J definido por $J = \{x \in V : \det(x) \neq 0\}$. Note-se que J é um aberto pois é o complementar da imagem recíproca do conjunto fechado $\{0\}$ pela função polinomial nas cordenadas de x, $\det(x)$, (que, naturalmente, é uma função contínua).
Tendo em conta que $\forall x \in J$ são válidas as igualdades [4]

$$x \circ x^{-1} = e, \tag{10}$$

$$x^2 \circ x^{-1} = x, \tag{11}$$

então $\forall x \in J \ \ \forall h \in V$, dado que J é aberto, para t suficientemente pequeno $x + th \in J$ e, consequentemente,

$$(x + th) \circ (x + th)^{-1} = e.$$

Uma vez que $x \circ x^{-1} = e$, conclui-se que

$$(x + th) \circ (x + th)^{-1} = x \circ x^{-1}$$

e que

$$x \circ (x + th)^{-1} - x \circ x^{-1} + th \circ (x + th)^{-1} = 0.$$

Logo, dividindo a equação obtida por t, vem

$$\frac{x \circ (x + th)^{-1} - x \circ x^{-1}}{t} + h \circ (x + th)^{-1} = 0,$$

ou seja,

$$x \circ (\frac{(x + th)^{-1} - x^{-1}}{t}) + h \circ (x + th)^{-1} = 0.$$

Mas então

$$\lim_{t \to 0} x \circ (\frac{(x + th)^{-1} - x^{-1}}{t}) + \lim_{t \to 0} h \circ (x + th)^{-1} = 0,$$

[4] A igualdade (11) deve-se ao facto de x^{-1} pertencer à subálgebra real de V gerada por e e x, que é uma subálgebra de V associativa, pelo que $x^2 \circ x^{-1} = (x \circ x) \circ x^{-1} = x \circ (x \circ x^{-1}) = x \circ e = x$.

o que é equivalente [5] a

$$x \circ \lim_{t\to 0}(\frac{(x+th)^{-1}-x^{-1}}{t}) + h \circ \lim_{t\to 0}(x+th)^{-1} \ = \ 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x \circ \lim_{t\to 0}(\frac{(x+th)^{-1}-x^{-1}}{t}) + h \circ x^{-1} \ = \ 0.$$

Logo

$$x \circ (Dx^{-1}[h]) + x^{-1} \circ h = 0 \Leftrightarrow L(x)(Dx^{-1}[h]) + L(x^{-1})h = 0,$$

donde, uma vez que h é um vector arbitrário de V, vem que

$$L(x)Dx^{-1} + L(x^{-1}) \ = \ 0. \qquad (12)$$

Utilizando, agora, a igualdade (11) conclui-se que

$$(x+th)^2 \circ (x+th)^{-1} \ = \ x + th = x^2 \circ x^{-1} + th.$$

e ainda que

$$(x^2 + 2tx \circ h + t^2h^2) \circ (x+th)^{-1} \ = \ x^2 \circ x^{-1} + th.$$

Como consequência obtém-se

$$\begin{aligned} x^2 \circ (x+th)^{-1} + 2t(x \circ h) \circ (x+th)^{-1} + \\ +(t^2h^2) \circ (x+th)^{-1} \ = \ x^2 \circ x^{-1} + th \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} x^2 \circ (x+th)^{-1} - x^2 \circ x^{-1} + 2t(x \circ h) \circ (x+th)^{-1} + \\ +(t^2h^2) \circ (x+th)^{-1} \ = \ th. \end{aligned}$$

Dividindo por t vem

$$\begin{aligned} x^2 \circ \frac{(x+th)^{-1}-x^{-1}}{t} + 2(x \circ h) \circ (x+th)^{-1} + \\ +(th^2) \circ (x+th)^{-1} \ = \ h, \end{aligned}$$

[5] Note-se que $||x \circ y|| \leq M||y||$ implica que a aplicação

$$\begin{array}{ccc} V & \rightarrow & V \\ y & \rightarrow & x \circ y \end{array}$$

seja continua.

pelo que

$$x^2 \circ (\lim_{t\to 0} \frac{(x+th)^{-1} - x^{-1}}{t}) + \lim_{t\to 0} 2(x \circ h) \circ (x+th)^{-1} + \\ + \lim_{t\to 0}(th^2) \circ (x+th)^{-1} = h,$$

ou seja,

$$x^2 \circ (Dx^{-1}[h]) + 2x^{-1} \circ (x \circ h) = h$$

$$\Leftrightarrow$$

$$L(x^2)(Dx^{-1}[h]) + 2L(x^{-1})L(x)(h) = I(h),$$

pelo que

$$L(x^2)Dx^{-1} + 2L(x^{-1})L(x) = I. \tag{13}$$

Mas então multiplicando a equação (12) por $2L(x)$ e subtraindo-lhe (13) obtém-se

$$2L(x)L(x)Dx^{-1} - L(x^2)Dx^{-1} + 2L(x)L(x^{-1}) - 2L(x^{-1})L(x) = -I.$$

Mas como $L(x)$ e $L(x^{-1})$ comutam (ver (Faraut and Korányi, 1994), proposição II.1.2, pag. 27), então

$$(2L(x)L(x) - L(x^2))Dx^{-1} = -I,$$

ou seja,

$$P(x)Dx^{-1} = -I.$$

Logo vem que

$$Dx^{-1} = -P^{-1}(x) = -P(x^{-1}).$$

Assim provamos que se $x \in J$ então $Dx^{-1} = -P(x^{-1})$, donde, em particular, $\forall x \in \mathrm{int}(Q)$ $Dx^{-1} = -P^{-1}(x) = -P(x^{-1})$.
Sabendo que, de acordo com o teorema 2.1, $\forall x \in int(Q)$

$$DF(x)[h] = - < x^{-1}, h >,$$

o cálculo de $D^2F(x)[h,h]$, para $x \in int(Q)$, vem dado por

$$\begin{aligned} D^2F(x)[h,h] &= -\lim_{t\to 0} \frac{< (x+th)^{-1}, h > - < x^{-1}, h >}{t} \\ &= - < \lim_{t\to 0} \frac{(x+th)^{-1} - x^{-1}}{t}, h > \\ &= - < Dx^{-1}[h], h > \\ &= - < -P^{-1}(x)h, h > \\ &= < P(x^{-1})h, h > . \end{aligned}$$

Resta provar que $P(x^{-1})$ é um operador definido positivo. Para tal, tendo em conta que $\forall x \in \mathrm{int}(Q)$, existe um sistema de Jordan $S = \{c_1, \cdots, c_r\}$ tal que $x = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j c_j$, vamos dividir esta prova nas seguintes etapas:

3.1 Prova-se que
$$\forall j \in \{1, \cdots, r\} \;\; \lambda_j > 0. \tag{14}$$

3.2 Prova-se que, quer quando os λ's são todos iguais, quer quando existem pelo menos dois distintos, $P(x^{-1})$ é definido positivo, i.e., prova-se que

(3.2.1) se $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r$, então $P(x^{-1})$ é definido positivo;

(3.2.2) se $\exists \lambda_i, \lambda_j$ tais que $i \neq j$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$ então $P(x^{-1})$ é definido positivo.

Prova de 3.1. Seja $x \in \mathrm{int}(Q)$, pelo que, pelo teorema 4.11 em apêndice, $L(x)$ é um operador definido positivo de V em V. Sabendo que existe um sistema de Jordan $\{c_1, c_2, \cdots, c_r\}$ e que existem números reais, $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$, tais que $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i$, devido à decomposição de Pierce de V associada a este sistema de Jordan (ver teorema 4.10 em apêndice), podemos afirmar que os valores próprios de $L(x)$ são λ_i, para $i = 1, \cdots, r$ e ainda $\frac{\lambda_i + \lambda_j}{2}$, para $i, j = 1, \cdots, r$ tais que $i < j$ e $V_{ij} \neq \{0\}$. [6] Logo, sendo $L(x)$ um operador

[6] Observe-se, primeiramente, que (de acordo com a decomposição de Pierce associada ao sistema de Jordan $S = \{c_1, \cdots, c_r\}$) $V = \bigoplus_{1 \leq i < j \leq r} V_{ij}$.

Considerando os números naturais i, j tais que $1 \leq i < j \leq r$, $V_{ij} \neq \{0\}$ e $v \in V_{ij}$ então, por definição dos subespaços V_{ij}, $L(c_i)v = \frac{1}{2}v$ e $L(c_j)v = \frac{1}{2}v$. Por outro lado, pelo teorema 4.10 em apêndice, $\forall k \notin \{i, j\} \;\; L(c_k)v = 0$.
Logo $\forall v \in V_{ij}$ vem que

$$\begin{aligned} L(x)v &= L(\sum_{l=1}^{r} \lambda_l c_l)v \\ &= \sum_{l=1}^{r} \lambda_l L(c_l)v \\ &= \lambda_i L(c_i)v + \lambda_j L(c_j)v \\ &= \lambda_i \frac{1}{2}v + \lambda_j \frac{1}{2}v \\ &= \frac{\lambda_i + \lambda_j}{2} v, \end{aligned}$$

concluindo-se assim que a qualquer vector não nulo do subespaço invariante V_{ij} de $L(x)$ está associado o valor próprio $\frac{\lambda_i + \lambda_j}{2}$.

Seja s um número natural tal que $1 \leq s \leq r$ e seja $v \in V_{ss}$. Então, por definição de V_{ss}, vem que $L(c_s)v = v$ e, mais uma vez, pelo teorema 4.10, $\forall k \neq s \;\; L(c_k)v = 0$. Logo $\forall v \in V_{ss}$ vem que

$$L(x)v = \sum_{l=1}^{r} \lambda_l L(c_l)v$$

definido positivo, então todos os seus valores próprios são positivos e, consequentemente, $\lambda_i > 0 \ \ \forall i \in \{1, \cdots r\}$.

Prova de 3.2.

(3.2.1) Considerando que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = \lambda$, então

$$x = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j c_j = \lambda \sum_{j=1}^{r} c_j = \lambda e$$

e, consequentemente, $x^{-1} = \frac{1}{\lambda} e$. Mas então

$$\begin{aligned} < P(x^{-1})h, h > &= \ < (2L(x^{-1})L(x^{-1}) - L((x^{-1})^2))h, h > \\ &= \frac{1}{\lambda^2} < (2L(e)L(e) - L(e^2))h, h > \\ &= \frac{1}{\lambda^2} < L(e)h, h > \\ &= \frac{1}{\lambda^2} < h, h > > 0 \ \forall h \neq 0 \end{aligned}$$

(3.2.2) Supondo que $\exists \lambda_i, \lambda_j$ tais que $i \neq j$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$ então, agrupando os c_js com o mesmo λ_i, fazendo $d_i = \sum_{j \in I_i} c_j$, obtém-se um sistema completo de idempotentes ortogonais (não necessariamente primitivos) $\{d_1, \cdots, d_k\}$, para o qual $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i d_i$, com os λ_i's todos distintos.
Logo, conclui-se que $d_i \in \mathbb{R}[x] \quad \forall i \in \{1, \cdots, k\}$, [7] onde $\mathbb{R}[x]$ é a subálgebra real de V gerada por e e x, pelo que
$x^{-1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\lambda_i} d_i \in \mathbb{R}[x]$, uma vez que

$$(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\lambda_i} d_i) \circ (\sum_{i=1}^{k} \lambda_i d_i) = e$$

$$\begin{aligned} &= \lambda_s L(c_s) v \\ &= \lambda_s v, \end{aligned}$$

concluindo-se que, a qualquer vector não nulo do subespaço invariante V_{ss} de $L(x)$ está associado o valor próprio λ_s.

[7] Para provar tal afirmação, seja $T = \{c_1, \cdots, c_q\}$ um sistema completo de idempotentes ortogonais e seja $x = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j c_j$ com os λ_j's todos distintos. Então, dado um polinómio arbitrário p, verifica-se que
$p(x) = \sum_{j=1}^{q} p(\lambda_j) c_j$. Logo, considerando o polinómio particular $p_k(X) = \Pi_{i \neq k \wedge 1 \leq i \leq q}(X - \lambda_i)$, vem que

$$p_k(x) = \sum_{i=1}^{q} p_k(\lambda_i) c_i = p_k(\lambda_k) c_k,$$

uma vez que $p_k(\lambda_i) = 0 \ \ \forall i \neq k$. Logo $c_k = \frac{p_k(x)}{p_k(\lambda_k)}$, pelo que $c_k \in \mathbb{R}[x]$.

e $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\lambda_i} d_i \in I\!R[x]$.
Consequentemente, como (de acordo com (14)) $\frac{1}{\lambda_i} > 0 \;\; \forall i \in \{1, \cdots, k\}$, fazendo
$y = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} d_i$ vem que $x^{-1} = y^2$ e que

$$\begin{aligned} P(x^{-1}) &= P(y^2) && (15) \\ &= P(P(y)e) && (16) \\ &= P(y)P(e)P(y), && (17) \end{aligned}$$

ou seja, $P(x^{-1}) = P(y)P(y)$. [8] Logo, $\forall h \neq 0$

$$\begin{aligned} < P(x^{-1})h, h > &= < P(y)P(y)h, h > \\ &= < P(y)h, P(y)h > > 0. && (18) \end{aligned}$$

Observe-se que $P(y)h \neq 0 \; \forall h \neq 0$. Com efeito, sendo x^{-1} invertível, $P(x^{-1})$ é um operador invertível e como

$$P(x^{-1}) = P(y)P(y),$$

conclui-se que $P(y)$ é também invertível o que, consequentemente, implica o pretendido.
Completa-se assim a prova de que

$$\forall x \in \mathrm{int}(Q) \qquad D^2F(x)[h,h] > 0 \;\; \forall h \neq 0,$$

i.e., que F é estritamente convexa em $int(Q)$.

■

TEOREMA 2.3. *A função F é uma barreira, i.e.,*

$$\lim_{int(Q) \ni x \to \partial(Q)} F(x) = \infty,$$

onde $\partial(Q)$ denota a fronteira de Q.

Proof. Se $\bar{x} \in \partial(Q)$ então $L(\bar{x})$ é um operador semidefinido positivo que admite pelo menos um valor próprio nulo. Consequentemente, supondo $\bar{x} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i$ e sabendo que os valores próprios de $L(\bar{x})$ são λ_i, para $i = 1, \cdots, r$ e $\frac{\lambda_i + \lambda_j}{2}$, para $i, j = 1, \cdots, r$ tais que $i < j$ e $V_{ij} \neq \{0\}$, conclui-se que pelo menos um dos λ_i é nulo. Logo, dada uma sucessão $\{x^n\}_{n \in I\!N} \subset int(Q)$, convergente para $\bar{x}$, vem que

$$\lim_{x^n \to \bar{x}} (-\log\det x^n) = \infty.$$

■

[8] Note-se que a passagem de (15) para (16) decorre de (9) e a passagem de (16) para (17) decorre do teorema 4.4 em apêndice.

TEOREMA 2.4. *A função F é uma função 1–autoconcordante no sentido de (*Nesterov and Nemirovskii, 1994*).*

Proof. Seja V uma álgebra de Jordan euclidiana cujo produto interno é definido por $< x, y >= \mathrm{tr}(x \circ y)$ e considere-se a função

$$F(x) = -\log(\det(x)).$$

Tendo em conta os teoremas 2.1 e 2.2 vem que

$$\begin{aligned} DF(x)[h] &= < -x^{-1}, h > \\ D^2F(x)[h,h] &= < -(-P^{-1}(x))h, h > \\ &= < P^{-1}(x)h, h > . \end{aligned}$$

Assim, para $x \in \mathrm{int}(Q)$ tem-se

$$\begin{aligned} D^3F(x)[h,h,h] &= \frac{\partial}{\partial t} < P^{-1}(x+th)h, h > \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{< P^{-1}(x+th)h, h > - < P^{-1}(x)h, h >}{t} \\ &= < \lim_{t\to 0} \frac{P^{-1}(x+th)h - P^{-1}(x)h}{t}, h > \\ &= < \lim_{t\to 0} \frac{P^{-1}(P(x^{\frac{1}{2}})(e + tP^{-1}(x^{\frac{1}{2}})h))h - P^{-1}(x)h}{t}, h > \end{aligned}$$

Tendo em conta que em qualquer álgebra de Jordan euclidiana, V, $\forall x, y \in V$ se verifica a igualdade

$$P(P(y)x) = P(y)P(x)P(y),$$

vem que

$$\begin{aligned} D^3F(x)[h,h,h] &= < \lim_{t\to 0} \frac{P^{-1}(P(x^{\frac{1}{2}})(e + tP^{-1}(x^{\frac{1}{2}})h))h - P^{-1}(x)h}{t}, h > \\ &= < \lim_{t\to 0} \frac{\left(P\left(P(x^{\frac{1}{2}})(e + tP^{-1}(x^{\frac{1}{2}})h)\right)\right)^{-1} h - P^{-1}(x)h}{t}, h > \\ &= < \lim_{t\to 0} \frac{\left(P(x^{\frac{1}{2}})(P(e + tP^{-1}(x^{\frac{1}{2}})h)P(x^{\frac{1}{2}})\right)^{-1} h - P^{-1}(x)h}{t}, h > \\ &= < \lim_{t\to 0} \frac{P^{-\frac{1}{2}}(x)P^{-1}(e + tP^{-\frac{1}{2}}(x)h)P^{-\frac{1}{2}}(x)h - P^{-1}(x)h}{t}, h > . \end{aligned}$$

Desenvolvendo $P(e + tu)v$ obtém-se

$$\begin{aligned} P(e+tu)v &= (2L(e+tu)L(e+tu) - L(e+tu)^2)v \\ &= 2(L(e) + tL(u))((L(e) + tL(u))v) - L(e^2 + 2tu + t^2u^2)v \\ &= 2(L(e) + tL(u))(L(e)v + tL(u)v) - L(e^2)v - 2tL(u)v - t^2L(u^2)v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2(L(e)(L(e)v)) + 2tL(e)(L(u)v) + 2tL(u)(L(e)v) + 2t^2L(u)(L(u)v) - \\
&\quad -L(e^2)v - 2tL(u)v - t^2L(u^2)v \\
&= 2(L(e)(L(e)v)) + 2tL(e)(L(u)v) + 2tL(u)(L(e)v) + 2t^2L(u)(L(u)v) - \\
&\quad -L(e^2)v - 2tL(u)v - t^2L(u^2)v \\
&= 2I(Iv) + 2tI(L(u)v) + 2tL(u)(Iv) + 2t^2L(u)(L(u)v) - \\
&\quad -Iv - 2tL(u)v - t^2L(u^2)v \\
&= 2v + 2t(L(u)v) + 2tL(u)v + 2t^2L(u)(L(u)v) - \\
&- \ v - 2tL(u)v - t^2L(u^2)v \\
&= v + 2t(L(u)v) + t^2(2L(u)L(u) - L(u^2))v \\
&= (I + 2tL(u) + t^2(2L(u)L(u) - L(u^2)))v,
\end{aligned}$$

donde vem que

$$P(e+tu) \ = \ I + 2tL(u) + t^2(2L(u)L(u) - L(u^2)),$$

ou seja,

$$P(e+tu) \ = \ I - t(-2L(u) - t(\cdots)).$$

Mas então, para t suficientemente pequeno, vem

$$P^{-1}(e+tu) \ = \ I + t(-2L(u) - t(\cdots)) + t^2(\cdots),$$

donde, considerando $u = P^{-\frac{1}{2}}(x)h$, se obtém

$$P^{-1}(e+tP^{-\frac{1}{2}}(x)h) \ = \ I + t(-2L(P^{-\frac{1}{2}}(x)h) + t^2(\cdots).$$

Assim, conclui-se que

$$P^{-1}(e+tP^{-\frac{1}{2}}(x)h) \ = \ I - 2tL(P^{-\frac{1}{2}}(x)h) + t^2(\cdots)$$

e, consequentemente, que

$$\begin{aligned}
D^3F(x)[h,h,h] &= < \lim_{t\to 0} \frac{P^{-\frac{1}{2}}(x)P^{-1}(e+tP^{-\frac{1}{2}}(x)h)P^{-\frac{1}{2}}(x)h - P^{-1}(x)h}{t}, h > \\
&= < \lim_{t\to 0} \frac{P^{-\frac{1}{2}}(x)(I - 2tL(P^{-\frac{1}{2}}(x)h)P^{-\frac{1}{2}}(x)h + t^2P^{-\frac{1}{2}}(x)(\cdots)P^{-\frac{1}{2}}(x)h}{t}, h > - \\
&\quad - < \lim_{t\to 0} \frac{P^{-1}(x)h}{t}, h > \\
&= < \lim_{t\to 0} \frac{P^{-\frac{1}{2}}(x)(I)P^{-\frac{1}{2}}(x)h - P^{-1}(x)h}{t}, h > \\
&\quad - < \lim_{t\to 0} \frac{P^{-\frac{1}{2}}(x)(2tL(P^{-\frac{1}{2}}(x)h))P^{-\frac{1}{2}}(x)h}{t}, h > + \\
&\quad + < \lim_{t\to 0} \frac{P^{-\frac{1}{2}}(x)t^2(\cdots)P^{-\frac{1}{2}}(x)h}{t}, h >
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= < \lim_{t\to 0} \frac{P^{-\frac{1}{2}}(x)(I)P^{-\frac{1}{2}}(x)h - P^{-1}(x)h}{t}, h > - \\
&\quad - < P^{-\frac{1}{2}}(x)(2L(P^{-\frac{1}{2}}(x)h))P^{-\frac{1}{2}}(x)h, h > \\
&= < \lim_{t\to 0} \frac{P^{-\frac{1}{2}}(x)P^{-\frac{1}{2}}(x)h - P^{-1}(x)h}{t}, h > - \\
&\quad - < P^{-\frac{1}{2}}(x)(2L(P^{-\frac{1}{2}}(x)h))P^{-\frac{1}{2}}(x)h, h > \\
&= < \lim_{t\to 0} \frac{P^{-1}(x)h - P^{-1}(x)h}{t}, h > - \\
&\quad - < P^{-\frac{1}{2}}(x)(2L(P^{-\frac{1}{2}}(x)h))P^{-\frac{1}{2}}(x)h, h > \\
&= -2 < (L(P^{-\frac{1}{2}}(x)h))P^{-\frac{1}{2}}(x)h, P^{-\frac{1}{2}}(x)h > .
\end{aligned}
$$

Logo, aplicando desigualdade de Cauchy-Schwartz, obtém-se

$$
\begin{aligned}
|D^3F(x)[h,h,h]| &\le 2||(L(P^{-\frac{1}{2}}(x)h))P^{-\frac{1}{2}}(x)h||.||P^{-\frac{1}{2}}(x)h|| \\
! &\le 2||(L(P^{-\frac{1}{2}}(x)h))P^{-\frac{1}{2}}(x)h||. < P^{-\frac{1}{2}}(x)h, P^{-\frac{1}{2}}(x)h >^{\frac{1}{2}} \\
&\le 2||(L(P^{-\frac{1}{2}}(x)h))P^{-\frac{1}{2}}(x)h||. < P^{-\frac{1}{2}}(x)P^{-\frac{1}{2}}(x)h, h >^{\frac{1}{2}} \\
&\le 2||(L(P^{-\frac{1}{2}}(x)h))P^{-\frac{1}{2}}(x)h||. < P^{-1}(x)h, h >^{\frac{1}{2}} \\
&\le 2||(L(P^{-\frac{1}{2}}(x)h))P^{-\frac{1}{2}}(x)h||.D^2F(x)[h,h]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Majorando agora

$$||(L(P^{-\frac{1}{2}}(x)h))P^{-\frac{1}{2}}(x)h||.$$

vem

$$
\begin{aligned}
||(L(P^{-\frac{1}{2}}(x)h))P^{-\frac{1}{2}}(x)h|| &= ||(P^{-\frac{1}{2}}(x)h) \circ (P^{-\frac{1}{2}}(x)h)|| \\
&\le M||P^{-\frac{1}{2}}(x)h)||.||(P^{-\frac{1}{2}}(x)h)|| \\
&\le M||P^{-\frac{1}{2}}(x)h)||^2 \\
&\le MD^2F(x)[h,h].
\end{aligned}
$$

Segue-se a justificação do aparecimento da constante M.
Dado $x \in V$, a aplicação linear $L(x)$ é uma aplicação continua de V em V pelo que a função $g : V \to V$ tal que $g(y) = ||L(x)y||$ atinge um máximo na bola unitária. Logo existe $M_x \in I\!R^+$ tal que

$$||L(x)\frac{y}{||y||}|| \le M_x.$$

Mas então

$$||L(x)y|| \le M_x||y||$$

e, em particular, para $\frac{x}{||x||}$, existe $M_{\frac{x}{||x||}}$ tal que

$$||L(\frac{x}{||x||})y|| \le M_{\frac{x}{||x||}}||y||.$$

Como consequência

$$\begin{aligned}||x \circ y|| &= ||\frac{x}{||x||} \circ (||x||y)|| \\ &= ||L(\frac{x}{||x||})(||x||y)|| \\ &\leq M_{\frac{x}{||x||}} ||(||x||y)|| \\ &\leq M_{\frac{x}{||x||}} ||x|| \times ||y||\end{aligned}$$

donde vem que

$$\begin{aligned}|D^3F(x)[h,h,h]| &\leq 2M_{\frac{x}{||x||}} D^2F[h,h] D^2F[h,h]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2M_{\frac{x}{||x||}} D^2F[h,h]^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

Analisemos agora esta constante $M_{\frac{x}{||x||}}$.
Sendo $y \in V$ tal que $||y|| = 1$, uma vez que

$$M_{\frac{x}{||x||}} = \max\{||L(\frac{x}{||x||})y|| : y \in V \wedge ||y|| = 1\}$$

podemos majorar

$$||L(\frac{x}{||x||})y||$$

procedendo conforme a seguir se indica

$$\begin{aligned}||L(\frac{x}{||x||})y||^2 &= \operatorname{tr}\left((L(\frac{x}{||x||})y) \circ (L(\frac{x}{||x||})y)\right) \\ &= \operatorname{tr}\left((\frac{x}{||x||} \circ y) \circ (\frac{x}{||x||} \circ y)\right) \\ &= \operatorname{tr}\left((\frac{x}{||x||} \circ \frac{x}{||x||}) \circ (y \circ y)\right) \\ &= < (\frac{x}{||x||} \circ \frac{x}{||x||}), (y \circ y) > \\ &= < \frac{x \circ x}{||x||^2}||, (y \circ y) > \\ &= \frac{1}{||x||^2} < x \circ x, y \circ y > \\ &\leq \frac{1}{||x||^2} ||x \circ x||^{\frac{1}{2}} ||y \circ y||^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{||x||^2} (\operatorname{tr}((x \circ x) \circ (x \circ x)))^{\frac{1}{2}} (\operatorname{tr}((y \circ y) \circ (y \circ y)))^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Pelo teorema 4.8 em apêndice, existe um sistema de Jordan $\{c_1, \cdots, c_r\}$ e r números reais $\lambda_i, i = 1, \cdots, r$ tais que

$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i,$$

logo

$$\begin{aligned} x \circ x &= (\sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i) \circ (\sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2 c_i \end{aligned}$$

e, por conseguinte,

$$\begin{aligned} (x \circ x) \circ (x \circ x) &= (\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2 c_i) \circ (\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2 c_i) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^4 c_i \end{aligned}$$

Mas então

$$\begin{aligned} (\mathrm{tr}((x \circ x) \circ (x \circ x)))^{\frac{1}{2}} &= (\mathrm{tr}(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^4 c_i))^{\frac{1}{2}} \\ &= ((\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^4))^{\frac{1}{2}} \\ &\leq ((\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2)^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2 \\ &= \mathrm{tr}(x \circ x) \\ &= < x, x > \\ &= ||x||^2. \end{aligned}$$

Procedendo do mesmo modo para y obtém-se

$$\begin{aligned} (\mathrm{tr}((y \circ y) \circ (y \circ y)))^{\frac{1}{2}} &\leq ||y||^2 \\ &= 1, \end{aligned}$$

donde vem

$$\begin{aligned} ||L(\frac{x}{||x||})y||^2 \leq & \ \frac{1}{||x||^2}||x||^2 \\ \leq & \ 1 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$M^2_{\frac{x}{||x||}} \leq 1,$$

ou seja,

$$M_{\frac{x}{||x||}} \leq 1.$$

Logo, provamos que

$$|D^3F(x)[h,h,h]| \leq 2(D^2F(x)[h,h])^{\frac{3}{2}},$$

o que equivale a afirmar que F é uma função 1–autoconcordante no interior do cone dos quadrados de uma álgebra de Jordan euclidiana. ∎

TEOREMA 2.5. *A função F é r-logaritmicamente homogénea no sentido em que* $\forall t > 0$

$$F(tx) = F(x) - r\log(t).$$

Proof. A prova de que F é uma barreira r–logaritmicamente homogénea decorre, de modo imediato, das seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} F(tx) &= -\log(\det(tx)) \\ &= -\log(a_r(tx)) \qquad (19) \\ &= -log(t^r a_r(x)) \qquad (20) \\ &= -log(t^r \det(x)) \\ &= -\log(\det(x)) - log(t^r) \\ &= -\log(\det x) - r\log(t) \\ &= F(x) - r\log t. \end{aligned}$$

Observe-se que a passagem de (19) para (20) se obtém devido ao facto de $a_r(x)$ ser uma função polinomial homogénea de grau r nas coordenadas de x relativamente a uma base fixa de V. ∎

TEOREMA 2.6. *A função F é uma barreira ϑ–autoconcordante no sentido de (*Nesterov and Nemirovskii, 1994*)* [9]*, i.e.,*

$$\forall x \in int(Q) \;\; (DF(x)h)^2 \leq \vartheta D^2F(x)[h,h] \;\; \forall h \in V,$$

com $\vartheta \leq r$.

[9] Observe-se que, de acordo com (Nesterov and Nemirovskii, 1994), F é uma barreira ϑ-autoconcordante se é uma função 1–autoconcordante e se é uma barreira com parâmetro ϑ.

Proof. Embora esta prova decorra imediatamente dos teoremas 2.4 e 2.5, utilizando a proposição 2.3.4 e corolário 2.3.2 de (Nesterov and Nemirovskii, 1994), tendo em visto tornar este trabalho tanto quanto possível autocontido e com demonstrações fundamentadas no contexto da teoria das Álgebras de Jordan euclidianas, vamos proceder à respectiva demonstração por uma via puramente algébrica.
Comecemos por minorar a segunda derivada

$$\begin{aligned}
D^2F(x)[h,h] &= <(P^{-1}(x))h, h> \\
&= <P(x^{-1})h, h> \\
&= <(2L(x^{-1})L(x^{-1}) - L((x^{-1})^2))h, h> \\
&= <(2L(x^{-1})L(x^{-1}))h, h> - <L((x^{-1})^2)h, h> \\
&= <2L(x^{-1})L(x^{-1})h, h> - <L(x^{-1}\circ x^{-1})h, h> \\
&= 2<L(x^{-1})h, L(x^{-1})h> - <L(x^{-1}\circ x^{-1})h, h> \\
&= 2<x^{-1}\circ h, x^{-1}\circ h> - <(x^{-1}\circ x^{-1})\circ h, h> \\
&= 2<x^{-1}\circ h, x^{-1}\circ h> - \mathrm{tr}(((x^{-1}\circ x^{-1})\circ h)\circ h) \\
&= 2<x^{-1}\circ h, x^{-1}\circ h> - \mathrm{tr}(h\circ((x^{-1}\circ x^{-1})\circ h)) \\
&= 2<x^{-1}\circ h, x^{-1}\circ h> - \mathrm{tr}((h\circ(x^{-1}\circ x^{-1}))\circ h) \\
&= 2<x^{-1}\circ h, x^{-1}\circ h> - \mathrm{tr}(((h\circ x^{-1})\circ x^{-1})\circ h) \\
&= 2<x^{-1}\circ h, x^{-1}\circ h> - \mathrm{tr}((h\circ x^{-1})\circ(x^{-1}\circ h)) \\
&= 2<x^{-1}\circ h, x^{-1}\circ h> - <h\circ x^{-1}, x^{-1}\circ h> \\
&= <x^{-1}\circ h, x^{-1}\circ h> \\
&= \mathrm{tr}((x^{-1}\circ h)\circ(x^{-1}\circ h)).
\end{aligned}$$

Note-se que numa álgebra de Jordan euclidiana, V, se verifica que

$$\mathrm{tr}(u\circ v) = \mathrm{tr}(v\circ u) \ \wedge\ \mathrm{tr}(u\circ(v\circ w)) = \mathrm{tr}((u\circ v)\circ w) \ \ \forall u, v, w \in V$$

Pelo teorema 4.8 existe um sistema de Jordan $\{c_1, \cdots, c_r\}$ e existem números reais $\lambda_i, i = 1, \cdots r$ tais que

$$x^{-1}\circ h = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i.$$

Mas então

$$\begin{aligned}
|D^2F(x)[h,h]| &= <x^{-1}\circ h, x^{-1}\circ h> \\
&= \mathrm{tr}((x^{-1}\circ h)\circ(x^{-1}\circ h)) \\
&= \mathrm{tr}\left((\sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i)\circ(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i) \right) \\
&= \mathrm{tr}\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2 c_i \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2 \\ &\geq \frac{(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i)^2}{r} \\ &\geq \frac{(\mathrm{tr}(x^{-1} \circ h))^2}{r} \\ &\geq \frac{(< x^{-1}, h >)^2}{r} \\ &\geq \frac{(DF(x)h)^2}{r}. \end{aligned}$$

Assim, no interior do cone dos quadrados de uma álgebra de Jordan euclidiana tem-se que F é uma barreira ϑ–autoconcordante, com $\vartheta \leq r$, uma vez que $\forall x \in int(Q)$ e $\forall h \in V$

$$\begin{aligned} |D^3F(x)[h,h,h]| &\leq 2(D^2F(x)[h,h])^{\frac{3}{2}} \\ (DF(x)h)^2 &\leq rD^2F(x)[h,h]. \end{aligned}$$

■

TEOREMA 2.7. *A função F é uma barreira r–autoconcordante no sentido de (*Nesterov and Nemirovskii, 1994*).*

Proof. Tendo em conta que anteriormente já se provou que F é uma barreira (teorema 2.3) e que, de acordo com o teorema 2.6, o seu parâmetro é não superior a r (i.e., $\vartheta \leq r$), resta provar que o parâmetro é também não inferior a r.

Denotanto o parâmetro da barreira F por ϑ e tendo em conta que a inequação

$$|DF(x)h|^2 \leq \vartheta D^2F(x)[h,h],$$

se verifica para todo o $x \in int(Q)$ e $h \in V$, em particular para $x = e$ vem que

$$< e^{-1}, h >^2 \leq \vartheta < P(e)^{-1}h, h > \; \forall h \in V,$$

ou seja, que

$$\mathrm{tr}(e \circ h)^2 \leq \vartheta \mathrm{tr}(I(h) \circ h) \; \forall h \in V. \tag{21}$$

Por outro lado, substituindo h por e em (21) obtém-se

$$(\mathrm{tr}(e))^2 \leq \vartheta \mathrm{tr}(e \circ e),$$

ou seja

$$(\mathrm{tr}(e))^2 \leq \vartheta \mathrm{tr}(e).$$

Consequentemente, uma vez que $\mathrm{tr}(e) = r$, vem que

$$r^2 \ \leq \ \vartheta r \Leftrightarrow r \leq \vartheta.$$

■

3. Característica de uma Álgebra de Jordan Euclidiana e Número de Carathéodory do Cone dos Quadrados

Nesta secção vamos mostrar que se V é uma álgebra de Jordan euclidiana simples (i.e., irredutível) e Q é o cone dos quadrados de V, então o número de Carathéodory de Q coincide com a caraterística da algebra de Jordan V. Antes, porém, vamos introduzir a definição de direção extrema e de número de Caratheodory.

DEFINIÇÃO 3.1. *Sendo V uma álgebra de Jordan euclidiana e Q o respectivo cone dos quadrados, diz-se que $x \in Q \setminus \{0\}$ é uma direcção extrema de Q se $\exists y, z \in Q \setminus \{0\}$ tais que*

$$x = y + z \Rightarrow y = \lambda_1 x \ \wedge \ z = \beta_1 x,$$

com $\lambda_1 \geq 0$ e $\beta_1 \geq 0$.

DEFINIÇÃO 3.2. *Sendo V uma álgebra de Jordan real euclidiana ,Q o cone dos quadrados de V e E o conjunto das direções extremas de Q, designa-se por número de Carathéodory de Q e denota-se por $k(Q)$ o menor número k de direcções extremas de Q tal que $\forall x \in Q$*

$$\exists x_1, \cdots, x_k \in E \quad \wedge \quad \exists \lambda_1 \cdots \lambda_k \in I\!R^+ \quad \textit{tais que} \quad x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i.$$

3.1. Caso I: Estudo das Álgebras de Jordan Simples

Considerando V como sendo uma álgebra de Jordan euclidiana simples, em (Faraut and Korányi, 1994), na proposição IV.3.2 da pag. 73, demonstra-se que as direções extremas de Q são múltiplos escalares positivos dos idempotentes primitivos de V. Porém, como para cada $x \in Q$, pelo teorema 4.8 em apêndice, existe um sistema de Jordan $\{c_1, \cdots, c_r\}$ e existem números reais $\lambda_i, i = 1, \cdots, r$ tais que

$$x \ = \ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i$$

com $\lambda_i \geq 0$, para $i = 1, \cdots, r$ [10] então podemos concluir imediatamente que o número de Carathéodory de Q é não superior a r. No que se segue vamos provar que $k(Q) = r$.

TEOREMA 3.1. *Seja V uma álgebra de Jordan euclidiana simples de dimensão finita com elemento unidade* $\mathbf{e}$ *e característica $r(V)$. Se Q é o cone dos quadrados de V, então $r(V) = k(Q)$.*

Proof. Suponhamos que $k(Q) = k < r = r(V)$. Então, como as direcções extremas não são mais que múltiplos escalares positivos dos idempotentes primitivos [11] existem k idempotentes primitivos e k números reais não negativos $(\alpha_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, k)$ tais que [12]

$$e = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i c_i.$$

Como consequência (multiplicando ambos os membros da igualdade anterior à direita por c_i) obtém-se

$$c_i = \alpha_i(c_i \circ c_i) + \sum_{j \neq i}^{k} \alpha_j (c_j \circ c_i),$$

donde se conclui que

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(c_i) &= \alpha_i \mathrm{tr}(c_i \circ c_i) + \sum_{j \neq i}^{k} \alpha_j \mathrm{tr}(c_j \circ c_i) \\
&\Leftrightarrow \\
\mathrm{tr}(c_i) &= \alpha_i \mathrm{tr}(c_i) + \sum_{j \neq i}^{k} \alpha_j \mathrm{tr}(c_j \circ c_i) \\
&\Leftrightarrow \\
1 &= \alpha_i + \sum_{j \neq i}^{k} \alpha_j \mathrm{tr}(c_j \circ (c_i \circ c_i)) \\
&\Leftrightarrow \\
1 &= \alpha_i + \sum_{j \neq i}^{k} \alpha_j < c_j, c_i \circ c_i > \\
&\Leftrightarrow \\
1 &= \alpha_i + \sum_{j \neq i}^{k} \alpha_j < c_j \circ c_i, c_i >
\end{aligned}$$

---

[10] Esta conclusão decorre da observação 4.5.

[11] Ver (Faraut and Korányi, 1994) pag. 72 e 73.

[12] Note-se que $\mathbf{e}$ pertence ao interior de Q.

$$\Leftrightarrow$$

$$1 \ = \ \alpha_i + \sum_{j \neq i}^{k} \alpha_j < L(c_j)c_i, c_i > \tag{22}$$

Porém, os valores próprios de cada operador linear $L(c_j)$, para $j = 1, \cdots k$, pertencem ao conjunto $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, donde cada operador linear $L(c_j)$ é um operador semidefinido positivo de V em V, pelo que [13]

$$< L(c_j)c_i, c_i) > \geq 0 \ \ \forall j \in \{1, \cdots, k\}.$$

Consequentemente, uma vez que $\forall j \in \{1, \cdots, k\} \ \ \alpha_j \geq 0$, obtém-se a desigualdade

$$\sum_{j \neq i}^{k} \alpha_j < L(c_j)c_i, c_i > \geq 0.$$

Logo, tendo em conta a equação (22), conclui-se que

$$\forall i \in \{1, \cdots, k\} \ \ 0 \leq \alpha_i \leq 1.$$

[13] Note-se que, de acordo com (Faraut and Korányi, 1994), dada uma álgebra de Jordan euclidiana irredutível (simples) com elemento unidade $\mathbf{e}$ e produto interno $\bullet|\bullet$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\forall u, v \in V$

$$< u, v > \ = \ \lambda u|v. \tag{23}$$

Por outro lado, tendo em conta que os valores próprios do operador linear $L(c_j)$ de V em V pertencem ao conjunto $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ e uma vez que $L(c_j)$ é um operador autoadjunto relativamente ao produto interno $\bullet|\bullet$, podemos concluir que os subespaços invariantes associados aos valores próprios deste operador linear são ortogonais. Como consequência, $L(c_j)$ é um operador semidefinido positivo relativamente ao produto interno $\bullet| \bullet$.
Pode concluir-se ainda que em (23) a contante λ é positiva. Com efeito, se em (23) considerarmos $u = v = c$, com c idempotente primitivo e, consequentemente, $c \neq 0$, vem que

$$< c, c > \ = \ \lambda c|c.$$

Logo, uma vez que $\mathrm{tr}(c) =< c, c >$ obtém-se

$$\mathrm{tr}(c) \ = \ \lambda c|c,$$

ou seja,

$$1 \ = \ \lambda ||c||^2.$$

Mas então, $c \neq 0 \Rightarrow ||c||^2 > 0 \Rightarrow \lambda > 0$.
Por sua vez, tendo em conta que $L(c_j)$ é um operador semidefinido positivo relativamente ao produto interno $\bullet|\bullet$, conclui-se que é também um operador semidefinido positivo relativamente ao produto interno $<, >$.

Mas então $\text{tr}(\mathbf{e}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \text{tr}(c_i)$ e, consequentemente, [14]

$$\begin{aligned} r &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \\ &\leq k, \end{aligned}$$

o que contraria a hipótese. Esta contradição resultou de se ter admitido que o número de Carathéodory do cone Q, $k(Q)$, seria estritamente inferior à característica da álgebra, V, $r(V)$. ■

3.2. Caso II: Estudo das Álgebras de Jordan Redutíveis

No que se segue prova-se um resultado idêntico ao enunciado no teorema 3.1, mas no caso mais geral em que a álgebra de Jordan não é necessàriamente irredutível.

COROLÁRIO 3.1. *Se V é uma álgebra de Jordan euclidiana e Q o respectivo cone dos quadrados, então $k(Q) = r(V)$, onde $k(Q)$ denota o número de Carathéodory de Q e $r(V)$ denota a característica da álgebra.*

Proof. Uma vez que já se fez a prova para o caso em que V é irredutível (i.e., simples), vamos fazer a prova apenas no caso em que V é redutível.
Considere-se então que V é uma álgebra de Jordan euclidiana, pelo que existem l subálgebras de Jordan euclidianas, V_i, irredutíveis, tais que $V = \bigoplus_{i=1}^{l} V_i$ e, adicionalmente, $V_i \bullet V_j = 0$, para $i \neq j$, onde o operador $\bullet$ denota a operação da álgebra, $\circ$, entre os diferentes vectores dos dois subespaços. [15]
O facto de se ter $V_i \bullet V_j = 0$, para $i \neq j$, arrasta que o cone dos quadrados de V, Q, se possa decompor da seguinte forma:

$$Q = \bigoplus_{i=1}^{l} Q_i$$

onde Q_i denota o cone dos quadrados de V_i.
Mas então, como $r(V) = \sum_{i=1}^{l} r(V_i)$ e $k(Q) = \sum_{i=1}^{l} k(Q_i)$ e, por outro lado, tendo em conta que $\forall i \in \{1, \cdots, l\}$ V_i é uma álgebra de Jordan euclidiana irredutível e, consequentemente, $\forall i \in \{1, \cdots, l\}$ $k(Q_i) = r(V_i)$ conclui-se que

$$k(Q) = \sum_{i=1}^{l} k(Q_i) = \sum_{i=1}^{l} r(V_i) = r(V).$$

■

[14] Note-se que numa álgebra de Jordan euclidiana com elemento unidade $\mathbf{e}$, tem-se que $\text{tr}(\mathbf{e}) = r$ e $\text{tr}(c) = 1$ quando c é um idempotente primitivo.
[15] Ver (Faraut and Korányi, 1994), pag. 54.

Para terminar, tendo em conta que dado um cone simétrico, C, de um espaço euclidiano real, V, i.e., um cone aberto, com interior não vazio, convexo, autodual, homogéneo e próprio, de acordo com (Faraut and Korányi, 1994), $\bar{C}$ coincide com o cone dos quadrados de uma álgebra de jordan euclidiana sobre V e característica $r(V)$ e recordando que, conforme decorre deste estudo, a função $F(x) = -\log(\det(x))$ constitui uma barreira normal com parâmetro $r(V)(= k(\bar{C}))$ sobre $\bar{C}$, invocando o resultado obtido em (Guler, 1995), que estabelece que o menor parâmetro *vartheta* tal que F é uma barreira ϑ–normal sobre a aderência de C, verifica a igualdade

$$\vartheta = k(\bar{C}),$$

podemos concluir que a barreira F, referida anteriormente, tem parâmetro óptimo no sentido em que verifica a igualdade anterior.

4. Apêndice

4.1. Álgebras de Jordan

Designa-se por álgebra, um espaço vectorial, V, onde está definida uma aplicação bilinear, $\circ$, $(x, y) \to x \circ y$ de $V \times V$ em V. Uma álgebra, V, diz-se uma álgebra de Jordan se $\forall x, y \in V$

$$\begin{aligned} x \circ y &= y \circ x \\ x \circ (x^2 \circ y) &= x^2 \circ (x \circ y) \end{aligned}$$

Exemplos de álgebras de Jordan reais com elemento unidade.

1) $V = I\!R$, $x \circ y = xy$ onde xy é o produto usual de números reais e o elemento unidade é $\mathbf{e} = 1$.

2) $V = I\!R^n$ e $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \circ (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1y_1, x_2y_2, \cdots, x_ny_n)$ e o elemento unidade é $e = (1, 1, \cdots, 1)$.

3) $V = S_n$, onde S_n é o conjunto das matrizes simétricas reais $n \times n$,

$$X \circ Y = \frac{XY + YX}{2}$$

e o elemento unidade é $\mathbf{e} = I$.

4) $V = I\!R^{n+1} = \{(\alpha, \hat{u}) : \alpha \in I\!R, \hat{u} \in I\!R^n\}$,

$$(\alpha, \hat{u}) \circ (\beta, \hat{v}) = (\alpha\beta + \hat{u}^T\hat{v}, \alpha\hat{v} + \beta\hat{u})$$

e o elemento unidade é $\mathbf{e} = (1, \hat{0})$.

5) Seja W um espaço vectorial sobre $I\!R$ e B uma forma bilinear simétrica em W, $V = I\!R \times W$ $(\alpha, \hat{u}) \circ (\beta, \hat{v}) = (\alpha\beta + B(\hat{u}, \hat{v}), \alpha\hat{v} + \beta\hat{u})$. Então $(V, \circ)$ é uma álgebra de Jordan real com elemento unidade $\mathbf{e} = (1, \hat{0})$

OBSERVAÇÃO 4.1. *Numa álgebra, V, define-se recursivamente*

$$x^n = x \circ x^{n-1}, n \geq 2.$$

DEFINIÇÃO 4.1. *Uma álgebra V diz-se associativa em potência se*

$$\forall x \in V \ \ \forall r, s \in N \ \ x^r \circ x^s \ = \ x^{r+s}$$

Verifica-se, facilmente, que toda a álgebra de Jordan é associativa em potência.

DEFINIÇÃO 4.2. *Considere-se a Álgebra de Jordan $(V, \circ)$, com elemento unidade **e** e dimensão finita e, para cada $x \in V$, seja k_x o menor inteiro positivo, tal que o conjunto:*

$$\{\mathrm{e}, x, x^2, \cdots, x^{k_x}\}$$

é linearmente dependente. Designa-se por característica da álgebra de Jordan V o número r tal que

$$r = max\{k_x : x \in V\}.$$

Os elementos $x \in V$ para os quais se tem $k_x = r$ designam-se por elementos regulares.

Note-se que, na definição anterior, o facto da álgebra ter dimensão finita, n, obriga que se tenha $r \leq n$.

OBSERVAÇÃO 4.2. *O conjunto dos elementos regulares de V é um conjunto denso em V.*

A prova desta observação pode ser consultada em (Vieira e Cardoso, 2000-(a)).

TEOREMA 4.1. *Seja V uma álgebra de Jordan real com elemento unidade, **e** e caracteristica r. Se $x \in V$ é um elemento regular, então existem os números reais*

$$a_1(x), a_2(x), \cdots, a_r(x)$$

que determinam o polinómio mínimo [16] *de x*

$$p(x, \lambda) \ = \ \lambda^r - a_1(x)\lambda^{r-1} + \cdots + (-1)^r a_r(x). \tag{24}$$

Considerando x como sendo um vector regular genérico, verifica-se que os coeficientes $a_j(x)$ são únicos e são funções polinomiais homógeneas de grau j nas coordenadas de x numa base fixa de V.

[16] Designa-se por polinómio mínimo de um vector, x, o polinómio mónico com coeficientes reais de grau mínimo que se anula quando se subtstitui a incógnita por x e o termo independente pelo produto desse mesmo termo independente pela unidade da álgebra.

Proof. Ver (Vieira e Cardoso, 2000-(a)). ■

Nos casos em que o vector $x \in V$ não é regular, o polinómio mónico de grau r

$$p(x,\lambda) = \lambda^r - a_1(x)\lambda^{r-1} + \cdots + (-1)^r a_r(x),$$

referido no teorema anterior, é determinado, de modo único, por intermédio de uma sucessão de vectores regulares, $\{x^k\}_{k \in N}$, convergente para x, fazendo $a_i(x) = \lim_{k\to\infty} a_i(x^k)$, onde os coeficientes $a_i(x^k)$ são os coeficientes do polinómio $p(x^k, \lambda)$.

DEFINIÇÃO 4.3. *Dado um vector arbitrário $x \in V$ e o polinómio associado*

$$p(x,\lambda) = \lambda^r - a_1(x)\lambda^{r-1} + \cdots + (-1)^r a_r(x),$$

o coeficiente $a_1(x)$ designa-se por traço de x e denota-se por $tr(x)$ e o coeficiente $a_r(x)$ designa-se por determinante de x e denota-se por $\det(x)$.

As designações de traço e determinante advêm do facto de $a_1(x)$ e $a_r(x)$ coincidirem, respectivamente, com o traço e com o determinante de uma certa aplicação linear, quando x é regular.
Com efeito, sendo $x \in V$ um elemento regular e sendo $I\!R[x]$ a subálgebra de V gerada por $\mathbf{e}$ e x, vem que $B = \{\mathbf{e}, x, x^2, \cdots, x^{r-1}\}$ é uma base do espaço vectorial $I\!R[x]$. Consequentemente, considerando a aplicação linear $L_0(x)$ de $I\!R[x]$ em $I\!R[x]$ tal que $L_0(x)y = x \circ y$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
L_0(x)(e) &= x \\
L_0(x)x &= x^2 \\
&\vdots \\
L_0(x)x^{r-2} &= x^{r-1} \\
L_0(x)x^{r-1} &= x^r \\
&= a_1(x)x^{r-1} - a_2(x)x^{r-2} + \cdots - (-1)^r a_r(x)\mathbf{e}.
\end{aligned}$$

Mas então a matriz da aplicação linear $L_0(x)$ na base B é a matriz

$$M_{L_0(x)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{r-1}a_r(x) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{r-2}a_{r-1}(x) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & (-1)^{r-3}a_{r-2}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_1(x) \end{bmatrix},$$

donde vem que $\mathrm{Det}(M_{L_0(x)}) = a_r(x)$ e $\mathrm{Tr}(M_{L_0(x)}) = a_1(x)$.

EXEMPLO 4.1. *Seja $V = I\!R^n$ então*

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^n = (x_1^n, x_2^n, \cdots, x_n^n)$$

e os elementos regulares de V são os elementos $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ tais que

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Logo $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ é regular se e só se $x_i \neq x_j \quad \forall i, j \in \{1, \cdots, n\}$ com $i \neq j$. Como consequência verifica-se que a caracteristica da álgebra de Jordan $I\!R^n$ é n.
Tendo em vista a determinação do polinómio $p(x, \lambda)$, com $x \in I\!R^n$, considere-se o elemento regular $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e o polinómio $p(\lambda)$ tal que

$$p(\lambda) = \Pi_{i=1}^n (\lambda - x_i).$$

Desenvolvendo $p(\lambda)$ obtém-se

$$p(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_i \leq n} x_{j_1} \cdots x_{j_i} \lambda^{n-i}$$

Tendo em conta que $\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \;\; p(x_i) = 0$ fazendo

$$a_i(x) = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_i \leq r} x_{j_1} \cdots x_{j_i}, \;\; i = 1, \cdots, n,$$

e convencionando-se que $x^0 = \mathbf{e}$, com $\mathbf{e}$ denotando o elemento unidade da álgebra (i.e., com todas as componentes unitárias) vem que

$$\begin{array}{ccccc} 0 & = & x_1^n & + & \sum_{i=1}^n (-1)^i a_i(x) x_1^{n-i} \\ 0 & = & x_2^n & + & \sum_{i=1}^n (-1)^i a_i(x) x_2^{n-i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & = & x_n^n & + & \sum_{i=1}^n (-1)^i a_i(x) x_n^{n-i}, \end{array}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x^n \;=\; -\sum_{i=1}^n (-1)^i a_i(x) x^{n-i}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x^n = a_1(x)x^{n-1} - a_2(x)x^{n-2} + \cdots - (-1)^n a_n(x)\boldsymbol{e}.$$

Logo, neste caso, conclui-se que $p(x,\lambda) = \lambda^n - a_1(x)\lambda^{n-1} + a_2(x)\lambda^{n-2} - \cdots + (-1)^n a_n(x)$.
Adicionalmente, como o conjunto dos elementos regulares de V *é um conjunto denso em* $I\!R^n$*, no caso em que* x *é ponto arbitrário de* $I\!R^n$ *obtém-se também o polinómio*

$$p(x,\lambda) = \lambda^n - a_1(x)\lambda^{n-1} + a_2(x)\lambda^{n-2} - \cdot s + (-1)^n a_n(x).$$

OBSERVAÇÃO 4.3. *Na álgebra* $V = I\!R^n$ *tem-se*

$$\det(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \Pi_{i=1}^n x_i$$
$$tr(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i.$$

DEFINIÇÃO 4.4. *Seja* V *uma álgebra de Jordan com elemento unidade* $\boldsymbol{e}$. *Diz-se que* x *é invertivel se existe um elemento* y *de* $I\!R[x]$ *tal que* $x \circ y = \boldsymbol{e}$ *e o elemento* y *designa-se por* x^{-1}.

Daqui em diante V denotará uma álgebra de Jordan de dimensão finita sobre $I\!R$ com elemento unidade $\mathbf{e}$.

TEOREMA 4.2. *Sendo* $x \in V$, x *é invertivel se e só se* $\det(x) \neq 0$.

Proof. Suponha-se que $\det(x) \neq 0$.
Então, considerando o polinómio característico de x,

$$p(x,\lambda) = \lambda^r - a_1(x)\lambda^{r-1} + \cdots + (-1)^{r-1}a_{r-1}(x)\lambda + (-1)^r a_r(x)$$

e, tendo em conta que

$$p(x,x) = 0 \Leftrightarrow x^r - a_1(x)x^{r-1} + \cdots + (-1)^{r-1}a_{r-1}(x)x = (-1)^{r+1}a_r(x)e$$

e $a_r(x) \neq 0$, conclui-se que

$$x \circ (\frac{1}{(-1)^{r+1}a_r(x)}x^{r-1} - \frac{a_1(x)}{(-1)^{r+1}a_r(x)}x^{r-2} + \cdots + \frac{(-1)^{r-1}a_{r-1}(x)}{(-1)^{r+1}a_r(x)}e) = e.$$

Suponha-se que x é invertível.
Então, $x \circ x^{-1} = e$, com $x^{-1} \in I\!R[x]$ e $1 = \det(e) = \det(x \circ x^{-1}) = \det(x)\det(x^{-1})$, pelo que $det(x) \neq 0$. ■

Como $\det(x) = a_r(x)$ é um polinómio homógeneo de grau r, onde r é a característica de V [17], podemos concluir que o conjunto dos elementos invertíveis de V é denso e aberto em V.

[17] A prova desta afirmação pode ser consultada em (Vieira e Cardoso, 2000-(b)).

DEFINIÇÃO 4.5. *Seja $x \in V$ e considere-se o operador linear $P(x)$ de V em V tal que*

$$P(x) = 2L(x)L(x) - L(x^2).$$

A aplicação

$$\begin{array}{rcl} V & \to & End(V) \\ x & \to & P(x) \end{array}$$

designa-se por representação quadrática de V.

EXEMPLO 4.2.

(a) Para $V = I\!R^n$, dado $\bar{x} \in I\!R^n$ vem que $P(\bar{x}) = diag(\bar{x}^2)$.

(b) Para $V = S_n$, onde S_n denota a álgebra de Jordan das matrizes simétricas reais de ordem n, dado $X \in V$ vem que

$$P(X)Y = XYX \ \ \forall Y \in V.$$

TEOREMA 4.3. *Um elemento $x \in V$ é invertivel se e só se $P(x)$ é invertivel, verificando-se, nesse caso que*

$$P(x)x^{-1} = x \qquad \wedge \qquad P^{-1}(x) = P(x^{-1}).$$

Proof. Ver (Koecher, 1999), teorema 12, pag. 67 [18] ■

TEOREMA 4.4. *Sendo $x, y \in V$, $P(x)y$ é invertivel se e só se x e y são invertiveis e, nesse caso, tem-se*

$$(P(x)y)^{-1} = P(x^{-1})y^{-1}.$$

Verifica-se ainda que

$$P(P(y)x) = P(y)P(x)P(y) \ \ \forall x, y \in V$$

Proof. Ver (Vieira e Cardoso, 2000-(b)) ■

Como consequência do teorema anterior vem que $\forall n \in I\!N \ \ P^n(x) = P(x^n)$ e, se x é invertivel, então $\forall m \in I\!N$

$$P(x^{-m}) = P^{-m}(x).$$

DEFINIÇÃO 4.6. *Sendo $c \in V$, diz-se que c é um idempotente de V se $c^2 = c$.*

[18] Observe-se que $P^{-1}(x)$ denota $[P(x)]^{-1}$.

TEOREMA 4.5. *Se c é um idempotente de V, então qualquer valor próprio do operador $L(c)$ pertence ao conjunto $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$.*

Proof. Ver (Vieira e Cardoso, 2000-(a)) ■

DEFINIÇÃO 4.7. *Sendo c um idempotente de V, os subespaços*

$$V(c,1), V(c,0), V(c,\frac{1}{2})$$

definem-se como sendo os subespaços invariantes de $L(c)$ associados aos valores próprios 1, 0 *e* $\frac{1}{2}$, *i.e.,*

$$\begin{aligned} V(c,1) &= \{x \in V : L(c)x = x\} \\ V(c,0) &= \{x \in V : L(c)x = 0\} \\ V(c,\frac{1}{2}) &= \{x \in V : L(c)x = \frac{1}{2}x\} \end{aligned}$$

Como consequência, no caso de $L(c)$ ser autoadjunto (pelo que, todos os valores próprios são reais com multiplicidade algébrica igual à multiplicidade geométrica dos vectores próprios) da definição anterior decorre que

$$V = V(c,1) \oplus V(c,\frac{1}{2}) \oplus V(c,0).$$

4.2. Álgebras de Jordan Euclidianas

DEFINIÇÃO 4.8. *Uma álgebra de Jordan $(V, \circ)$ diz-se uma álgebra de Jordan euclidiana se existe um produto interno, $<,>$, tal que*

$$\forall u, v, w \in V \qquad < u \circ v, w >=< u, v \circ w > .$$

Numa álgebra de jordan euclidiana V, dado $x \in V$ verifica-se que a aplicação linear de V em V tal que $L(x)y = x \circ y$ é uma aplicação autoadjunta. Com efeito, tendo em conta que

$$< u \circ v, w >=< u, v \circ w >,$$

conclui-se que

$$< L(x)y, z >=< x \circ y, z >=< y \circ x, z >=< y, x \circ z >=< y, L(x)z >,$$

ou seja, que $L(x) = L(x)^*$.

EXEMPLO 4.3.

(a) A álgebra de Jordan $V = S_n$ é euclidiana, uma vez que o produto interno $< X|Y >= tr(X \circ Y)$ é associativo relativamente á operação $\circ$ (recorde-se que $X \circ Y = \frac{XY+YX}{2}$).

(b) A álgebra de Jordan $V = \mathbb{R}^n$ *onde está definido o produto interno* $< (x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots y_n) >= x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ *é euclidiana, uma vez que* $(x_1, \cdots, x_n) \circ (y_1, \cdots y_n) = (x_1y_1, \cdots, x_ny_n)$ *e, consequentemente,*

$$\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}^n < \bar{x} \circ \bar{y}, \bar{z} >=< \bar{x}, \bar{y} \circ \bar{z} > .$$

Ao longo desta secção a álgebra de Jordan V denotará uma álgebra de Jordan euclidiana onde está definido o produto interno $<,>$.

DEFINIÇÃO 4.9. *Sendo* $x, y \in V$, *se* $x \circ y = 0$ *então* x *e* y *dizem-se ortogonais.*

Note-se que se $x, y \in V$ e $x \circ y = 0$, então $< x, y >= 0$. Com efeito,

$$< x, y >=< x, y \circ e >=< x \circ y, e >=< 0, e >= 0.$$

TEOREMA 4.6. *Se* $x, y \in V$ *então* $\det(P(x)y) = (\det x)^2 \det y$.

Proof. Ver (Vieira e Cardoso, 2000-(a)). ∎

DEFINIÇÃO 4.10. *Um conjunto de vectores de* V, $S = \{c_1, \cdots, c_k\}$, *diz-se um sistema completo de idempotentes ortogonais se*

(a) $c_i^2 = c_i \ \ \forall i \in \{1, \cdots, k\}$;

(b) $c_i \circ c_j = 0$ *se* $\forall i \neq j$;

(c) $c_1 + \cdots + c_k = e$.

DEFINIÇÃO 4.11. *Um idempotente de* V *diz-se um idempotente primitivo se é não nulo e se não se pode decompor como soma de dois idempotentes não nulos ortogonais de* V.

DEFINIÇÃO 4.12. *Um conjunto de idempotentes* $\{c_1, \cdots, c_k\}$ *designa-se por sistema de Jordan se é um sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos.*

Note-se que, conforme se prova em (Vieira e Cardoso, 2000-(a)), supondo que a característica de V é r, se $\{c_1, \cdots, c_k\}$ é um sistema de Jordan então $k = r$.

TEOREMA 4.7. *Para cada* $x \in V$ *existem escalares únicos* $\lambda_1, \cdots \lambda_k \in \mathbb{R}$, *todos distintos, e um único sistema completo de idempotentes ortogonais* $\{c_1, \cdots, c_k\}$, *tais que*

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c_i.$$

Adicionalmente, pode concluir-se que $c_j \in \mathbb{R}[x] \ \ \forall j \in \{1, \cdots k\}$.

Proof. Ver (Vieira e Cardoso, 2000-(a)). ■

No teorema anterior, os números λ_i, com $i \in \{1, \cdots, k\}$ designam-se por valores próprios de x e o somatório $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i c_i$ designa-se por decomposição espectral de x.

TEOREMA 4.8. *Supondo que a característica de V é r, para cada $x \in V$ existe um sistema de Jordan $\{c_1, \cdots, c_r\}$ e números reais $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ tais que $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i$, onde os $\lambda_i' s$ (juntamente com as suas multiplicidades) são unicamente determinados por x.*
Adicionalmente pode afirmar-se que

$$a_r(x) = \Pi_{i=1}^{r} \lambda_j = \det x \text{ e } a_1(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = tr(x)$$

ou, mais geralmente, que

$$a_k(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq r} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \cdots \lambda_{i_k},$$

onde $a_k(x)$ $(1 \leq k \leq r)$ são os coeficientes do polinómio

$$p(x, \lambda) \ = \ \lambda^r + \sum_{j=1}^{r} (-1)^j a_j(x) \lambda^{r-j}.$$

Proof. Ver (Vieira e Cardoso, 2000-(a)). ■

Este último teorema permite-nos concluir que se $x \in V$, então existe um sistema de Jordan de V, $\{c_1, \cdots, c_r\}$, tal que

$$x \ = \ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i$$

onde os λ_i's são as raizes do polinómio $p(x, \lambda)$ definido no teorema 4.1.
No somatório anterior, pondo em evidência cada λ_i com multiplicidade k_i e denotando o vector obtido pela soma dos idempotentes associados a cada um destes valores próprios distintos, λ_i, por d_i, obtemos a decomposição

$$x \ = \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i d_i,$$

com os λ_i's todos distintos, tal que $\{d_1, \cdots, d_k\}$ constitui um sistema completo de idempotentes ortogonais de V.
Como consequência conclui-se que na decomposição espectral de x, dado pelo teorema 4.7, os λ_i's não são mais que as raizes distintas do polinómio $p(x, \lambda)$.

Seja $x \in V$ um elemento invertível [19] e considere-se a decomposição espectral de x

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c_i.$$

Se u é tal que $u = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\lambda_i} c_i$, como pelo teorema 4.7 $c_i \in \mathbb{R}[x]$ e $x \circ u = e$, então $u = x^{-1}$ (tendo em conta que o inverso de x é o único elemento de $\mathbb{R}[x]$ nestas condições).

TEOREMA 4.9. *A forma $tr(.,.) : V \times V \to \mathbb{R}$ define um produto interno (i.e., é bilinear, simétrica e definida positiva) em V e é tal que*

$$tr(x \circ (y \circ z)) = tr((x \circ y) \circ z) \;\; \forall x, y, z \in V.$$

Proof. Ver (Faraut and Korányi, 1994), proposições II.4.3 (pag. 37) e III.1.5 (pag. 46). ∎

DEFINIÇÃO 4.13. *Se a característica de V é r e $\{c_1, \cdots, c_r\}$ é um sistema de Jordan de V, então definem-se em V os subespaços V_{ij}, V_{ii} do seguinte modo:*

$$\begin{aligned} V_{ij} &= V(c_i, \frac{1}{2}) \cap V(c_j, \frac{1}{2}), \; para \, 1 \leq i < j \leq r, \\ V_{ii} &= V(c_i, 1), \; i = 1, \cdots, r. \end{aligned}$$

TEOREMA 4.10. (Decomposição de Pierce).
Se a característica de V é r e se $\{c_1, \cdots, c_r\}$ é um sistema de Jordan de V, então V decompõe-se na soma directa

$$V = \bigoplus_{1 \leq i \leq j \leq r} V_{ij}.$$

Adicionalmente, verifica-se que

$$\begin{aligned} V_{ij} \circ V_{ij} &\subset V_{ii} + V_{jj} \\ V_{ij} \circ V_{jk} &\subset V_{ik}, \; i \neq k \\ V_{ij} \circ V_{kl} &= \{0\}, \; se \, \{i,j\} \cap \{k,l\} = \emptyset. \end{aligned}$$

Proof. Ver (Faraut and Korányi, 1994), proposição IV.2.1, pag. 68 ∎

OBSERVAÇÃO 4.4. *Supondo que $\{c_1, \cdots, c_r\}$ é um sistema de Jordan de V e sendo $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i$, verifica-se que os valores próprios de $L(x)$ são $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ e $\frac{\lambda_i + \lambda_j}{2}$, para $i, j = 1, \cdots r$, com $i < j$ e $V_{ij} \neq \{0\}$.*

[19] Note-se que $\det(x) = \Pi_{i=1}^{r} \lambda_i$ e x é invertivel se e só se $\det(x) \neq 0$. Logo $\lambda_i \neq 0, \forall i = 1, \cdots r$

4.3. Cone dos Quadrados

Tal como anteriormente, nesta secção, V denota uma álgebra de Jordan euclidiana.

DEFINIÇÃO 4.14. *Seja E um espaço euclidiano real e Ω um cone de E. Este cone, Ω, diz-se simétrico se é um cone aberto com interior não vazio, convexo, próprio, autodual e homogéneo.*

DEFINIÇÃO 4.15. *Designa-se por cone dos quadrados de V o cone, Q, tal que $Q = \{x^2 : x \in V\}$.*

TEOREMA 4.11. *Sendo Q o cone dos quadrados de V, verifica-se que int(Q) é um cone simétrico que coincide com o conjunto dos elementos $x \in V$ tais que $L(x)$ é um operador definido positivo de V em V. Por outro lado, verifica-se ainda que Q é o conjunto dos $x \in V$ tais que $L(x)$ é um operador semidefinido positivo de V em V.*

Proof. Ver (Faraut and Korányi, 1994), teorema III.2.1, pag. 46 ■

TEOREMA 4.12. *Se $x \in V$ é um elemento invertível, então $P(x)$ é um automorfismo de int(Q). Adicionalmente, se $x \in$ int(Q) então $P(x)$ é um operador definido positivo de V em V.*

Proof. Ver (Faraut and Korányi, 1994), proposição III.2.2, pag. 48 ■

DEFINIÇÃO 4.16. *Seja $x \in V$ e considere-se a sua decomposição espectral, $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c_i$. Diz-se que x é semidefinido positivo se*

$$\lambda_i \geq 0, \forall i \in \{1, \cdots k\}.$$

Se x é semidefinido positivo define-se a potência $x^{\frac{1}{2}}$ como sendo o elemento de V tal que

$$x^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{\frac{1}{2}} c_i.$$

Por outro lado, se $\lambda_i > 0 \ \ \forall i \in \{1, \cdots k\}$, diz-se que x é definido positivo.

OBSERVAÇÃO 4.5. *Devido á decomposição de Pierce, associada a um sistema de Jordan, podemos afirmar que x é definido positivo se e só se $L(x)$ é definido positivo. Logo, tendo em conta o teorema 4.11, o interior do cone dos quadrados de uma álgebra de Jordan euclidiana pode ser definido como o conjunto dos elementos de V, x, tais que x é definido positivo. Por outro lado, o cone dos quadrados, Q, pode ser definido como o conjunto dos elementos de V, x, tais que x é semidefinido positivo.*

TEOREMA 4.13. *Se x é definido positivo então*

$$P(x^{\frac{1}{2}}) = P^{\frac{1}{2}}(x).$$

Proof. Ver (Vieira e Cardoso, 2000-(b)). ∎

Observe-se que, de acordo com a notação utilizada, $P^{\frac{1}{2}}(x) = (P(x))^{\frac{1}{2}}$.
E. Então existe uma álgebra de Jordan euclidiana sobre E

4.4. Álgebras de Jordan Euclidianas Redutíveis e Irredutíveis

DEFINIÇÃO 4.17. *Seja V uma álgebra de Jordan euclidiana . Diz-se que V é irredutível ou simples se V não contém nenhum ideal não trivial.*

OBSERVAÇÃO 4.6. *Note-se que uma álgebra de Jordan euclidiana que não é irredutível diz-se redutível.*

TEOREMA 4.14. *Uma álgebra de Jordan euclidiana V é irredutível se e só se*

$$V(c, \frac{1}{2}) \neq \{0\}$$

para todo o idempotente não trivial $c \in V$.

Proof. Ver (Faraut and Korányi, 1994), proposição IV.1.2, pag. 65 ∎

EXEMPLO 4.4. *A álgebra $V = S_n$ é irredutível. Com efeito se c é um idempotente não trivial de V então $c = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e*

$$\begin{aligned} V(c, \frac{1}{2}) = \ & \{A \in S_n : A = \begin{bmatrix} 0 & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix}, \ com\ C \in M_{p\times q} \ e\ p + q = n\} \\ & \neq \{\begin{bmatrix} 0_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\}. \end{aligned}$$

*Ver (*Faraut and Korányi, 1994*) página 63.*

OBSERVAÇÃO 4.7. *Na álgebra de Jordan euclidiana $V = \mathbb{R}^n$ tem-se*

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$$

onde $V_i = \{(0, \cdots, 0, x_i, 0, \cdots, 0) : x_i \in \mathbb{R}\}$ para $i = 1, \cdots, n$ e

$$(0, \cdots, 0, x_i, 0, \cdots, 0) \circ (0, \cdots, 0, y_i, 0, \cdots, 0) = (0, \cdots, 0, x_i y_i, 0, \cdots, 0).$$

TEOREMA 4.15. *Se V é uma álgebra de Jordan euclidiana redutível então V é, de um modo único, a soma de ideais que são subálgebras de V simples. Neste caso pode dizer-se ainda que*

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_l$$

onde cada V_i é um ideal que é uma subálgebra euclidiana irredutível e, além disso, $\forall i \neq j \ \ V_i \circ V_j = \{0\}$.

Proof. Ver (Faraut and Korányi, 1994) proposição III.4.4, pág. 54 ■

DEFINIÇÃO 4.18. *Um cone simétrico, Ω, num espaço euclidiano, V, diz-se irredutível se não existem subespaços não triviais, V_1, V_2, nem cones simétricos $\Omega_1 \subset V_1$ e $\Omega_2 \subset V_2$ tais que*

$$\begin{aligned} V &= V_1 \oplus V_2, \\ \Omega &= \Omega_1 \oplus \Omega_2. \end{aligned}$$

TEOREMA 4.16. *Se V é um espaço euclidiano real e Ω um cone simétrico de V, podem concluir-se as seguintes afirmações:*

(a) Existe uma álgebra de Jordan euclidiana, $(V, \circ)$, tal que

$$Q = \{x \circ x : x \in V\} \text{ e } \Omega = int(Q).$$

(b) Se Ω é irredutível então a algebra de Jordan euclidiana, $(V, \circ)$, é também irredutível.

Proof.

(a) Ver (Faraut and Korányi, 1994) teorema III.3.1, pág. 49 ■

(b) Seja $(V, \circ)$ uma álgebra de Jordan euclidiana com característica r tal que $\Omega = \text{int}(Q)$, onde Q é o cone dos quadrados de V. Suponhamos que V é redutível, ou seja, que

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_l$$

com $V_i \circ V_j = \{0\}\ \ \forall i \neq j$ e onde cada V_i, para $i = 1, \cdots, l$ é uma subálgebra de Jordan euclidiana irredutível. Então

$$Q = Q_1 \oplus Q_2 \cdots \oplus Q_l,$$

onde cada Q_i é o cone dos quadrados de V_i. Uma vez que as subálgebras V_i, para $i = 1, \cdots l$, são álgebras de Jordan euclidianas irredutiveis, conclui-se que

$$\Omega = \text{int}(Q) = \bigoplus_{i=1}^{l} \text{int}(Q_i) = \bigoplus_{i=1}^{l} \Omega_i.$$

Nestas condições, como cada Ω_i, para $i = 1, \cdots, l$, é um cone simétrico da subálgebra de Jordan euclidiana irredutível V_i, conclui-se que Ω é redutível, o que contraria a hipótese. ■

TEOREMA 4.17. *Seja V uma álgebra de Jordan euclidiana redutível, pelo que $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_l$, onde os $V_{i's}$ são subalgebras de Jordan euclidianas de V irredutíveis que são ideais de V tais que $V_i \circ V_j = \{0\}\ \ \forall i \neq j$. Então, tendo em conta que, sendo Q e Q_i, com $i = 1, \cdots, l$, os cones dos quadrados de V e V_i, respectivamente, se verifica que $Q = Q_1 \oplus Q_2 \oplus \cdots \oplus Q_l$, pode concluir-se que* *(a)* $r(V) = r(V_1) + r(V_2) + \cdots + r(V_l)$ *e*

(b) se $x = \sum_{i=1}^{l} x_i$*, com* $x_i \in V_i \;\; \forall i \in \{1, \cdots, l\}$*, então*

$$tr(x) = \sum_{i=1}^{l} tr(x_i) \;\; e \;\; \det(x) = \Pi_{i=1}^{l} \det(x_i).$$

Proof. Ver (Vieira e Cardoso, 2000-(a)). ■

References

Faraut, J. and A. Korányi Analysis on Symmetric Cones. Oxford Science Publications, New York(1994).

Koecher, M. The Minnesota Notes on Jordan Álgebras and Their Applications. Edited and annotated by Aloys Krieg and Sebastian Walcher, Springer, Berlin(1999).

Nesterov, Y. and A. Nemirovskii Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming. SIAM, Philadelphia(1994).

Guler, O. Characterization of the barrier parameter of homogeneous convex cones. Mathematical Programming 81:55–76 (1995).

Vieira, L. A. e D. M. Cardoso -(a). Conceitos e Resultados sobre Álgebras de Jordan. Relatório de Investigação N1-2000. http://www.mat.ua.pt/go/reports, Grupo de Optimização da UI&D 'Matemática e Aplicações', Universidade de Aveiro, Departamento de Matemática (2000).

Vieira, L. A. e D. M. Cardoso -(b). Representação Quadrática de uma Álgebra de Jordan. Relatório de Investigação N2-2000. http://www.mat.ua.pt/go/reports, Grupo de Optimização da UI&D 'Matemática e Aplicações', Universidade de Aveiro, Departamento de Matemática (2000).