Representação Quadrática de uma Álgebra de Jordan

Domingos M. Cardoso (dcardoso@mat.ua.pt)
Universidade de Aveiro, Departamento de Matemática, 3810-193 Aveiro, Portugal

Luís A. Vieira (lvieira@fe.up.pt)
Faculdade de Engenharia do Porto, Departamento de Engenharia Civil,
Secção de Matemática e Física, R. Dr. Roberto Frias, 4200-465 Porto, Portugal

Julho de 2003

Resumo. Com este relatório complementa-se a recolha dos principais resultados sobre álgebras de Jordan apresentada em (Cardoso e Vieira, 2003), com um estudo sobre a determinação de álgebras de Jordan com elemento unidade e sobre as propriedades da respectiva representação quadrática. Nomeadamente, a partir de uma álgebra de Jordan V sem elemento unidade, constrói-se uma álgebra de Jordan com elemento unidade que contém uma subálgebra de Jordan isomorfa a V e demonstra-se que toda a álgebra de Jordan semisimples tem elemento unidade. Adicionalmente, demonstram-se várias propriedades da representação quadrática P de uma álgebra de Jordan com elemento unidade, entre as quais destacamos

(i) $\forall x, y \in V \;\; P(P(x)y) = P(x)P(y)P(x)$,

(ii) $x \in V$ é invertível sse $P(x)$ é um operador invertível,

pelo papel especialmente importante que desempenham na dedução de resultados de natureza operatória.

Keywords: Jordan Algebras, Quadratic Representation.

1. Introdução

Ao longo deste texto vamos considerar V como sendo um espaço vectorial de dimensão finita sobre um corpo K, cuja característica é zero ou maior que $2\dim(V)$ [1], e $(V, \circ)$ como sendo uma álgebra de Jordan (que muitas vezes denotaremos simplesmente por V).

Sendo E um espaço vectorial arbitrário de dimensão finita sobre um corpo K com característica zero ou maior que $2\dim(E)$, uma questão que se coloca é a de saber como construir uma álgebra de Jordan sobre este espaço E.
A resposta a esta questão exige que se introduza, previamente, o conceito de transfomação quadrática em E. Assim, dada a aplicação

$$\begin{aligned} \psi : E &\mapsto \operatorname{End}(E) \\ u &\rightsquigarrow \psi(u), \end{aligned}$$

[1] Designa-se por característica de um corpo $< K, +, \times >$, cujo elemento unidade é $\mathbf{1}$ e cujo elemento nulo é $\mathbf{0}$, o menor número natural, n, tal que $n \times \mathbf{1} = \mathbf{0}$. Quando não existe um tal número, diz-se que o corpo tem característica zero.

dizemos que ψ é uma aplicação quadrática em E, quando ψ é úm polinómio homogéneo de grau 2 nas coordenadas de x numa base fixa de E.
Dada uma transformação quadrática, $\varphi : E \mapsto \text{End}(E)$ e $c \in E$, tais que $\forall u, v \in E$,

(1) $\varphi(c) = I$,

(2) $\varphi(c+u) - I - \varphi(u) = 0 \Rightarrow u = 0$,

(3) $\varphi(\varphi(u)v) = \varphi(u)\varphi(v)\ \varphi(u)$,

definindo em E a operação $\circ$ por

$$u \circ v \ = \ \frac{1}{2}(\varphi(u+v) - \varphi(u) - \varphi(v))(c)\ \forall u, v \in E,$$

de acordo com (Koecher, 1999), pag. 75, obtém-se a álgebra de Jordan $(E, \circ)$ com elemento unidade $\mathbf{c}$.
Considerando a aplicação

$$\begin{aligned} P : E &\mapsto \ \text{End}(E) \\ x &\rightsquigarrow \ P(x), \end{aligned}$$

onde $P(x)$ é o operador definido por $P(x) = 2L(x)L(x) - L(x^2)$ e $L(x)$ é o operador linear de definido por $L(x)y = x \circ y\ \forall y \in E$, conclui-se que $P(x) = \varphi(x)$. Por outro lado, se $(V, \circ)$ é uma álgebra de Jordan com elemento unidade $\mathbf{e}$, então a aplicação $P : V \mapsto \text{End}(V)$, tal que $P(x) = 2L(x)L(x) - L(x^2)$ é uma aplicação quadrática.

Com efeito, dada uma base fixa de $V, < e_1, \ldots, e_n >$, para $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, vem que

$$\begin{aligned} P(u) &= \ 2L(u)L(u) - L(u^2) \\ &= \ 2L(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j)L(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j) - L((\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j)^2) \\ &= \ 2\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} L(e_p)L(e_q)\alpha_p\alpha_q - \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} L(e_p \circ e_q)\alpha_p\alpha_q \\ &= \ \sum_{1 \leq p,q \leq n} (2L(e_p)L(e_q) - L(e_p \circ e_q))\alpha_p\alpha_q, \end{aligned}$$

o que nos permite concluir que P é uma aplicação quadrática.
Verifica-se ainda que o produto $x \circ y$ pode ser representado por

$$\frac{1}{2}(P(x+y) - P(x) - P(y))e.$$

Com efeito,

$$\frac{1}{2}(P(x+y) - P(x) - P(y))e =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(2L(x+y)L(x+y) - L(x+y)^2) - 2L(x)L(x) + L(x^2) - 2L(y)L(y) + L(y^2))e \\
&= L(x+y)L(x+y)e - \frac{1}{2}L(x+y)^2e - L(x)L(x)e + \frac{1}{2}L(x^2)e - L(y)L(y)e + \frac{1}{2}L(y^2)e \\
&= x^2 + 2x \circ y + y^2 - \frac{1}{2}(x^2 + 2x \circ y + y^2) - x^2 + \frac{1}{2}x^2 - y^2 + \frac{1}{2}y^2 \\
&= x \circ y
\end{aligned}$$

O facto da aplicação P ser uma transformação quadrática em V que representa o produto $x \circ y$ por

$$\frac{1}{2}(P(x+y) - P(x) - P(y)),$$

motiva que, usualmente, se designe P por representação quadrática de V. Mais formalmente, pode apresentar-se a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 1.1. *Designa-se por representação quadrática P da álgebra de Jordan V a aplicação*

$$\begin{aligned} P : V &\mapsto End(V) \\ x &\leadsto P(x), \end{aligned}$$

onde $End(V)$ denota o conjunto dos endomorfismos de V e P é tal que

$$P(x) \;=\; 2L^2(x) - L(x^2).$$

Com facilidade se conclui que o operador P verifica as seguintes propriedades:

–

$$P(\alpha x) \;=\; \alpha^2 P(x) \;\; \forall \alpha \in I\!R \;\; \forall x \in V. \tag{1}$$

– A transformação

$$\begin{aligned} b : V \times V &\mapsto End(V) \\ (x,y) &\leadsto b(x,y) = P(x+y) - P(x) - P(y) \end{aligned} \tag{2}$$

é bilinear e simétrica.

–

$$P(x) = \frac{1}{2}b(x,x) \;\; \forall x \in V. \tag{3}$$

As propriedades (1), (2) e (3), são semelhantes às que se verificam para as formas quadráticas.

2. Construção de uma álgebra de Jordan com elemento unidade

Embora uma álgebra de Jordan possa não ter elemento unidade, existe uma sua extensão (i.e., uma álgebra de Jordan definida sobre o mesmo corpo que contém uma subálgebra que lhe é isomorfa) com elemento unidade, conforme se estabelece no teorema a seguir.

TEOREMA 2.1. *Dada a álgebra de Jordan V, sem elemento unidade, existe uma álgebra de Jordan com elemento unidade $\overline{V}$ que contém uma subálgebra de Jordan isomorfa a V.*

Demonstração. Considere-se o espaço unidimensional sobre o corpo K $K\mathbf{e}$, onde $\mathbf{e}$ denota um vector arbitrário não nulo de V. Seja $\overline{V}$ a soma directa de V com $K\mathbf{e}$, ou seja, o espaço vectorial constituído pelos vectores $\{u + \alpha\mathbf{e} : u \in V, \ \alpha \in K\}$. Definindo-se o produto $\odot$ em $\overline{V}$ por

$$(u + \alpha\mathbf{e}) \odot (v + \beta\mathbf{e}) = (u \circ v + \alpha v + \beta u) + \alpha\beta\mathbf{e},$$

vamos provar que $(\overline{V}, \odot)$ é uma álgebra de Jordan com elemento unidade $0 + \mathbf{e}$.
As igualdades

$$\begin{aligned}(v + \beta\mathbf{e}) \odot (u + \alpha\mathbf{e}) &= (v \circ u + \beta u + \alpha v) + \beta\alpha\mathbf{e}\\ &= (u \circ v + \alpha v + \beta u) + \alpha\beta\mathbf{e}\\ &= (u + \alpha\mathbf{e}) \odot (v + \beta\mathbf{e}),\end{aligned}$$

permitem concluir que a operação $\odot$ é comutativa e, com igual facilidade, se conclui que $\odot$ é uma aplicação bilinear de $\overline{V} \times \overline{V}$ em $\overline{V}$, pelo que $(\overline{V}, \odot)$ é uma álgebra comutativa.
Resta provar que (i) se trata de uma álgebra de Jordan, (ii) com elemento unidade $0 + \mathbf{e}$, (iii) que contém uma subálgebra que é isomorfa a $(V, \circ)$.

(i) Segue-se a prova de que $\forall u \in V$ e $\forall \alpha \in K$ $[L(u + \alpha\mathbf{e}), L((u + \alpha\mathbf{e})^2)] = 0$, o que é equivalente a mostrar que $\forall u, v \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in K$

$$[L(u + \alpha\mathbf{e}), L((u + \alpha\mathbf{e})^2)](v + \beta\mathbf{e}) \ = \ 0.$$

Com efeito, se $u + \alpha\mathbf{e}, v + \beta\mathbf{e} \in \overline{V}$, então

$$[L(u + \alpha\mathbf{e}), L((u + \alpha\mathbf{e})^2)](v + \beta\mathbf{e}) =$$

$$\begin{aligned}&= L(u + \alpha\mathbf{e})L((u + \alpha\mathbf{e})^2)(v + \beta\mathbf{e}) - L((u + \alpha\mathbf{e})^2)L(u + \alpha\mathbf{e})(v + \beta\mathbf{e})\\ &\qquad -(u \circ u + \alpha u + \alpha u + \alpha^2\mathbf{e}) \odot \big((u + \alpha\mathbf{e}) \odot (v + \beta\mathbf{e})\big)\\ &= (u + \alpha\mathbf{e}) \odot \big(((u^2 + 2\alpha u) + \alpha^2\mathbf{e}) \odot (v + \beta\mathbf{e})\big) -\\ &\qquad -((u^2 + 2\alpha u) + \alpha^2\mathbf{e}) \odot ((u + \alpha\mathbf{e}) \odot (v + \beta\mathbf{e}))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (u+\alpha\mathbf{e})\odot\big(((u^2+2\alpha u)\circ v+\alpha^2 v+\beta(u^2+2\alpha u))+\alpha^2\beta\mathbf{e}\big)-\\
&\quad -((u^2+2\alpha u)+\alpha^2\mathbf{e})\odot((u\circ v+\alpha v+\beta u)+\alpha\beta\mathbf{e})\\
&= \big(u\circ((u^2+2\alpha u)\circ v+\alpha^2 v+\beta(u^2+2\alpha u))+\alpha((u^2+2\alpha u)\circ v+\\
&\quad +\alpha^2 v+\beta(u^2+2\alpha u))+\alpha^2\beta u+\alpha^3\beta\mathbf{e}\big)-\\
&\quad -\big(\big((u^2+2\alpha u)\circ(u\circ v+\alpha v+\beta u)+\\
&\quad +\alpha^2(u\circ v+\alpha v+\beta u)+\alpha\beta(u^2+2\alpha u)\big)+\alpha\beta\alpha^2\mathbf{e}\big)\\
&= (u\circ(u^2\circ v)+2\alpha u\circ(u\circ v)+\alpha^2 u\circ v+\beta u^3+2\beta\alpha u^2+\\
&\quad +\alpha u^2\circ v+2\alpha^2 u\circ v+\alpha^3 v+\alpha\beta u^2+2\alpha^2\beta u+\alpha^2\beta u+\alpha^3\beta\mathbf{e})-\\
&\quad -u^2\circ(u\circ v)-\alpha u^2\circ v-\beta u^3-2\alpha u\circ(u\circ v)-2\alpha^2 u\circ v-\\
&\quad -2\alpha\beta u^2-\alpha^2 u\circ v-\alpha^3 v-\alpha^2\beta u-\alpha\beta u^2-2\alpha^2\beta u-\alpha^3\beta\mathbf{e}\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

(ii) A prova que $0+\mathbf{e}$ é o elemento unidade de $\overline{V}$, decorre de

$$
\begin{aligned}
(u+\alpha\mathbf{e})\odot(0+\mathbf{e}) &= (u\circ 0+\alpha 0+\mathbf{1}u)+\alpha\mathbf{e}\\
&= u+\alpha\mathbf{e}.
\end{aligned}
$$

(iii) Finalmente, prova-se que a álgebra V é isomorfa a uma subálgebra de $\overline{V}$. Para tal, considerando a aplicação φ definida por

$$
\begin{aligned}
\varphi: V &\mapsto \overline{V}\\
u &\rightsquigarrow u+0\mathbf{e},
\end{aligned}
$$

basta ter em conta que se verificam as propriedades:

a) $\forall u,v\in V\ \forall\alpha,\beta\in K\ \ \varphi(\alpha u+\beta v)=\alpha\varphi(u)+\beta\varphi(v)$;

b) φ é uma aplicação injectiva de V em $\overline{V}$;

c) φ é um homomorfismo de V em $\overline{V}$ tal que $\forall u,v\in V$

$$\varphi(u\circ v)=\varphi(u)\odot\varphi(v).$$

■

Uma questão que se coloca, nesta altura, é a de saber que condições deve satisfazer uma algebra de Jordan, V, para mque tenha elemento unidade. Antes de respondermos a esta questão, porém, convém introduzir os conceitos de radical de uma álgebra de Jordan e de álgebra de Jordan semisimples.

DEFINIÇÃO 2.1. *Considerando a álgebra de Jordan V sobre um corpo K e a forma bilinear simétrica definida por*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}: V\times V &\mapsto K\\
(u,v) &\rightsquigarrow \mathcal{B}(u,v)=Tr(L(u\circ v)),
\end{aligned}
$$

designa-se por radical da álgebra de Jordan V, o subespaço vectorial

$$radical\,(V) = \{v\in V:\mathcal{B}(v,u)=0\ \ \forall u\in V\}.$$

Com base nesta definição podemos, agora, introduzir o conceito de álgebra de Jordan semisimples.

DEFINIÇÃO 2.2. *Diz-se que a álgebra de Jordan, V, é semisimples quando radical$(V) = \{0\}$.*

O teorema a seguir introduz uma condição suficiente para que V tenha elemento unidade.

TEOREMA 2.2. *Se a álgebra de Jordan V é semisimples, então tem elemento unidade.*

Demonstração. Supondo que $(V, \circ)$ é semisimples, podemos concluir que a forma bilinear $\mathcal{B}$, definida por

$$\begin{aligned} \mathcal{B} : V \times V &\mapsto K \\ (u, v) &\rightsquigarrow \mathcal{B}(u, v) = \mathrm{Tr}(L(u \circ v)), \end{aligned}$$

é não singular, isto é, $\nexists x \in V \setminus \{0\}$ tal que $\mathcal{B}(x, y) = 0 \quad \forall y \in V$. Logo, para cada $x \in V \setminus \{0\}$, obtém-se a aplicação não nula

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_x^* : V &\mapsto K \\ y &\rightsquigarrow \mathcal{B}_x^*(y) = \mathcal{B}(x, y) \end{aligned}$$

que é um elemento do espaço dual V^*. Desta forma obtém-se o isomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : V &\mapsto V^* \\ x &\rightsquigarrow \varphi(x) = \mathcal{B}_x^*. \end{aligned}$$

Com efeito, por um lado é evidente que φ é linear e, por outro lado, dado que

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(\varphi) &= \{x \in V : \varphi(x) = \bar{0}\} \\ &= \{x \in V : \mathcal{B}_x^* = \bar{0}\} \\ &= \{x \in V : \mathcal{B}_x^*(y) = \bar{0} \ \ \forall y \in V\} \\ &= \{x \in V : \mathcal{B}(x, y) = \bar{0} \ \ \forall y \in V\} \qquad (4) \\ &= \{0\}, \qquad (5) \end{aligned}$$

onde $\bar{0}$ denota a forma nula, conclui-se que φ é também injectiva.
Note-se que a passagem de (4) para (5) se deve ao facto da forma bilinear $\mathcal{B}$ ser não singular.
Para se completar a prova de que φ é um isomorfismo, basta mostrar que φ é sobrejectiva, o que decorre, de modo imediato, do facto de V e V^* terem a mesma dimensão.
Estamos agora em condições de provar a existência do elemento unidade da álgebra de Jordan V. Assim, considere-se a forma linear, $\mathcal{E}^*$ de V^*, definida por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^* : V &\mapsto K \\ x &\rightsquigarrow \mathcal{E}^*(x) = \mathrm{Tr}(L(x)). \end{aligned}$$

Vamos provar que o elemento $\mathbf{e} \in V$ tal que $\varphi(e) = \mathcal{E}^*$ é o elemento unidade de V. Com efeito, uma vez que $\forall x \in V$

$$\mathrm{Tr}(L(x)) = \mathcal{E}^*(x) = \mathcal{B}^*_{\mathbf{e}}(x) = \mathcal{B}(\mathbf{e}, x) = \mathrm{Tr}(L(\mathbf{e} \circ x)),$$

podemos concluir que $\forall x \in V$

$$\mathrm{Tr}(L(\mathbf{e} \circ x)) = \mathrm{Tr}(L(x)).$$

Por outro lado $\forall u, v, w \in V$ verifica-se que [2]

$$\mathrm{Tr}\big(L((u \circ v) \circ w)\big) = \mathrm{Tr}\big(L(u \circ (v \circ w))\big).$$

Logo, se $y \in V$, então $\forall z \in V$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\big(L((\mathbf{e} \circ y) \circ z)\big) &= \mathrm{Tr}\big(L(\mathbf{e} \circ (y \circ z))\big)\\ &= \mathrm{Tr}(L(y \circ z))\end{aligned}$$

e, consequentemente, $\forall z \in V$

$$\mathrm{Tr}\big(L((\mathbf{e} \circ y) \circ z) - L(y \circ z)\big) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Tr}\big(L((\mathbf{e} \circ y - y) \circ z)\big) = 0,$$

ou seja, $\forall z \in V$

$$\mathcal{B}\big(\mathbf{e} \circ y - y, z\big) \;=\; 0.$$

Porém, uma vez que V é semisimples, a forma bilinear $\mathcal{B}$ é não singular e, consequentemente,

$$\mathbf{e} \circ y - y = 0 \Leftrightarrow \mathbf{e} \circ y = y.$$

Logo, dado que y é um elemento arbitrário de V vem que $\forall y \in V$

$$\mathbf{e} \circ y = y,$$

o que nos permite concluir, finalmente, que $\mathbf{e}$ é o elemento unidade de V. ■

Para se estabelecerem certas propriedades da representação quadrática de uma álgebra de Jordan com elemento unidade é fundamental utilizar o facto das álgebras de Jordan serem associativas em potência, propriedade que se demonstra na próxima secção.

3. Subálgebra das potências de um elemento de uma álgebra de Jordan

Sendo V uma álgebra de Jordan sobre um corpo K e $\mathbf{u} \in V$, as potências de $\mathbf{u}$ definem-se através da igualdade

$$u^n = u \circ u^{n-1} \;\; \forall n \in \{m \in I\!N : m \geq 2\}.$$

Vamos dividir a prova de que a subálgebra de V gerada pelas potências de $\mathbf{u}$ é associativa nas seguintes etapas:

[2] Ver proposição II.4.3 em (Faraut and Korányi, 1994).

(i) Primeiro prova-se que

$$\forall p, q \in I\!N \;\; L(u^p)L(u^q) \; = \; L(u^q)L(u^p). \tag{6}$$

(ii) Posteriormente, a partir de (6), prova-se que

$$\forall p, q \in I\!N \;\; u^p u^q \; = \; u^{p+q}, \tag{7}$$

o que, por definição, significa que V é associativa em potência.

Para se provar (6) basta mostrar que $L(u^p)$, com $p \in I\!N$, é um polinómio em $L(u)$ e em $L(u^2)$, uma vez que, assim sendo, como $L(u)$ e $L(u^2)$ comutam podemos concluir que $L(u^p)$ e $L(u^q)$, com $p, q \in I\!N$, também comutam. Antes, porém, é conveniente provar o resultado que se segue.

TEOREMA 3.1. *Se V é uma álgebra de Jordan sobre um corpo K, então*

$$\forall x, y \in V \;\; L(x^2 \circ y) - L(x^2)L(y) \; = \; 2(L(x \circ y) - L(x)L(y))L(x) \; . \tag{8}$$

Demonstração. Sendo V uma álgebra de Jordan, $\forall u \in V \;\; [L(u), L(u^2)] = 0$, pelo que, dado $x, z \in V$, vem que

$$x \circ (x^2 \circ z) \; = \; x^2 \circ (x \circ z),$$

ou seja,

$$x \circ ((x \circ x) \circ z) \; = \; (x \circ x) \circ (x \circ z).$$

Mas então, $\forall y \in V$ e $\forall t \in K$,

$$(x + ty) \circ (((x + ty) \circ (x + ty)) \circ z) \; = \; ((x + ty) \circ (x + ty)) \circ ((x + ty) \circ z). \tag{9}$$

Igualando em (9) os coeficientes de t obtém-se

$$\begin{aligned} y \circ (x^2 \circ z) \; + \; x \circ ((y \circ x + x \circ y) \circ z) = \\ (y \circ x + x \circ y) \circ (x \circ z) + (x \circ x) \circ (y \circ z), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} y \circ (x^2 \circ z) \; + \; 2(x \circ ((x \circ y) \circ z)) = \\ 2(x \circ y) \circ (x \circ z) + x^2 \circ (y \circ z). \end{aligned} \tag{10}$$

Trocando em (10) as variáveis z e y, vem

$$\begin{aligned} z \circ (x^2 \circ y) \; + \; 2(x \circ ((x \circ z) \circ y)) = \\ 2(x \circ z) \circ (x \circ y) + x^2 \circ (z \circ y) \end{aligned} \tag{11}$$

e, reescrevendo (11) de modo conveniente, obtém-se

$$\begin{aligned} (x^2 \circ y) \circ z \; + \; 2(x \circ (y \circ (x \circ z))) = \\ 2(x \circ y) \circ (x \circ z) + x^2 \circ (y \circ z). \end{aligned}$$

Logo, vem que

$$\begin{aligned} L(x^2 \circ y)z + \; & 2L(x)(L(y)(L(x)z)) = \\ & 2L(x \circ y)(L(x)z) + L(x^2)(L(y)z) \end{aligned}$$

e, por conseguinte,

$$L(x^2 \circ y)z - L(x^2)(L(y)z) \;=\; 2L(x \circ y)(L(x)z) - 2L(x)(L(y)(L(x)z)),$$

ou seja,

$$L(x^2 \circ y) - L(x^2)L(y) \;=\; 2(L(x \circ y) - L(x)L(y))L(x).$$

■

TEOREMA 3.2. *Se V é uma álgebra de Jordan, $u \in V$ e $p \in \mathbb{N}$, então $L(u^p)$ é um polinómio em $L(u^2)$ e $L(u)$.*

Demonstração. Esta prova vai ser feita por indução sobre p, tendo em conta que para $p = 1$ e $p = 2$ a propriedade em causa é trivialmente verdadeira.
Assim, suponhamos que $L(u^p)$ é um polinómio em $L(u^2)$ e $L(u)$, para p tal que $1 \leq p \leq m$. Então, dado que por hipótese de indução, $L(u^{m-1})$ é um polinómio em $L(u^2)$ e $L(u)$, podemos concluir que $L(u^{m-1})$ e $L(u)$ comutam, donde se obtém

$$\begin{aligned} u^{m+1} &= u^m \circ u \\ &= (u^{m-1} \circ u) \circ u \\ &= u \circ (u^{m-1} \circ u) \\ &= L(u)L(u^{m-1})u \\ &= L(u^{m-1})L(u)u \\ &= L(u^{m-1})(L(u)u) \\ &= L(u^{m-1})(u \circ u) \\ &= L(u^{m-1})u^2 \\ &= u^{m-1} \circ u^2. \end{aligned}$$

Logo, substituindo, em (8), y por u^{m-1} e x por u, vem

$$L(u^2 \circ u^{m-1}) - L(u^2)L(u^{m-1}) \;=\; 2\left(L(u \circ u^{m-1}) - L(u)L(u^{m-1})\right) L(u)$$

e, por conseguinte,

$$L(u^{m+1}) - L(u^2)L(u^{m-1}) \;=\; 2(L(u^m) - L(u)L(u^{m-1}))L(u),$$

ou seja,

$$L(u^{m+1}) \;=\; L(u^2)L(u^{m-1}) + 2L(u^m)L(u) - 2L(u)L(u^{m-1})L(u).$$

Logo, tendo em conta a hipótese de indução,

$$\begin{aligned} L(u^{m+1}) &= L(u^{m-1})L(u^2) + 2L(u^m)L(u) - 2L(u^{m-1})L^2(u) \\ &= 2L(u^m)L(u) + L(u^{m-1})(L(u^2) - 2L^2(u)). \end{aligned} \tag{12}$$

Mais uma vez, por hipótese de indução, sabendo-se que $L(u^{m-1})$ e $L(u^m)$ são polinómios em $L(u^2)$ e $L(u)$, de acordo com (12), conclui-se que $L(u^{m+1})$ é também um polinómio em $L(u^2)$ e $L(u)$. ■

Com a prova do teorema 3.2 fica também provado (6). Segue-se um teorema onde se estabelece (7), i.e., dado um vector arbitrário de V, a subálgebra gerada pelas suas potências é associativa.

TEOREMA 3.3. *Se V é uma álgebra de Jordan, $u \in V$ e $r, s \in I\!N$, então*

$$u^r \circ u^s = u^{r+s}.$$

Demonstração. Vamos fazer esta prova por indução sobre s.
Sabendo que, por definição de potência de um elemento de uma álgebra de Jordan,

$$u \circ u^r = u^{r+1}$$

e supondo que

$$u^r \circ u^s = u^{r+s},$$

vamos provar que

$$u^r \circ u^{s+1} = u^{r+s+1}.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
u^r \circ u^{s+1} &= u^r \circ (u^s \circ u) \\
&= u^r \circ (u \circ u^s) \\
&= L(u^r)(L(u)u^s) && (13) \\
&= L(u)(L(u^r)u^s) && (14) \\
&= L(u)(u^r \circ u^s) && (15) \\
&= u \circ (u^{r+s}) && (16) \\
&= u^{r+s} \circ u \\
&= u^{r+s+1},
\end{aligned}$$

onde a passagem de (13) para (14) se justifica com base no teorema 3.2 e a passagem de (15) para (16) se justifica tendo em conta a hipótese de indução. ■

Quando a álgebra de Jordan V tem elemento unidade $\mathbf{e}$, todos os resultados anteriores permanecem válidos para todas as potências de expoente inteiro não negativo, desde que se convencione que $u^0 = \mathbf{e}$. Como consequência, podemos afirmar que toda a subálgebra de uma álgebra de Jordan com elemento unidade, $\mathbf{e}$, gerada pelas potências de um vector arbitrário u e por $\mathbf{e}$, ou seja, $K[u]$, é uma subálgebra associativa. Tal significa que as álgebras de Jordan são associativas em potência. Por sua vez, a associatividade da subálgebra $K[u]$, onde u é um vector arbitrário, permite-nos concluir que se $\exists v \in K[u]$ tal que $u \circ v = e$, então ele é único e, neste caso, por definição, designa-se um tal vector $v \in K[u]$ por inverso de u e denota-se por u^{-1}.

OBSERVAÇÃO 3.1. *O facto dos operadores $L(u^r)$, com $r \in I\!N$, serem comutativos dois a dois permite ainda concluir que $L(u)$ e $L(u^{-1})$ comutam quando u é um elemento invertível de V. Com efeito, uma vez que $u^{-1} \in K[u]$ então $u^{-1} = \sum_{i=0}^{s} \alpha_i u^i$ e, por conseguinte, obtém-se*

$$\begin{aligned}
L(u)L(u^{-1}) &= L(u)L(\sum_{i=0}^{s} \alpha_i u^i) \\
&= L(u)(\sum_{i=0}^{s} \alpha_i L(u^i)) \\
&= \sum_{i=0}^{s}(\alpha_i L(u)L(u^i)) \\
&= \sum_{i=0}^{s}(\alpha_i L(u^i)L(u)) \\
&= (\sum_{i=0}^{s} \alpha_i L(u^i))L(u) \\
&= L(\sum_{i=0}^{s} \alpha_i u)L(u) \\
&= L(u^{-1})L(u).
\end{aligned}$$

Esta propriedade de comutatividade dos operadores $L(u)$ e $L(u^{-1})$ será essencial para a prova, a fazer mais adiante, de que um vector arbitrário de V, u, é invertível se e só se o operador $P(u)$ é invertível.

No que se segue, assumiremos que V é uma álgebra de Jordan real de dimensão finita com elemento unidade $\mathbf{e}$.
O motivo que nos leva a considerar, unicamente, álgebras de Jordan de dimensão finita, prende-se com a necessidade de utilização dos conceitos de continuidade e diferenciação da operação de multiplicação de vectores definida em V, os quais, nestes casos, se simplificam consideravelmente.

TEOREMA 3.4. *Se $x \in V$, então o operador $L(x)$ é um endomorfimo contínuo de V.*

Demonstração. Seja $< u_1, \cdots, u_k >$ uma base de V [3], x um vector arbitrário de V e $y \in V$ o limite da sucessão $\{y^n\}_{n \in I\!N}$ contida em V. Então, considerando

$$\begin{aligned}
x &= \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_k u_k, \\
y^n &= \alpha_1^n u_1 + \cdots + \alpha_k^n u_k \ \ \forall n \in I\!N, \\
y &= \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k,
\end{aligned}$$

[3] Note-se que V é um espaço vectorial com dimensão finita.

onde os β_is, os α_i^ns e os α_is são escalares, vem que

$$\begin{aligned}
L(x)y^n - L(x)y &= L(x)(y^n - y) \\
&= (\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_k u_k) \circ \Big((\alpha_1^n - \alpha_1)u_1 + \cdots + (\alpha_k^n - \alpha_k)u_k \Big) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \beta_i (\alpha_j^n - \alpha_j) u_i \circ u_j \qquad (17) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \left(\beta_i (\alpha_j^n - \alpha_j) \sum_{l=1}^{k} \gamma_{ijl} u_l \right) \qquad (18) \\
&= \sum_{l=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \beta_i (\alpha_j^n - \alpha_j) \gamma_{ijl} \right) u_l,
\end{aligned}$$

onde, na passagem de (17) para (18), se faz $u_i \circ u_j = \sum_{l=1}^{k} \gamma_{ijl} u_l$.
Uma vez que V tem dimensão finita, todas as normas são equivalentes e, consequentemente, podemos considerar a norma

$$||v||_\infty = \max\{|\mu_i| : i = 1, \cdots, k\}$$

onde μ_i, para $i = 1, \cdots, k$ são as coordenadas de $\mathbf{v}$ na base $< u_1, \cdots, u_k >$. Por outro lado

$$\begin{aligned}
||L(x)y^n - L(x)y||_\infty &= ||L(x)(y^n - y)||_\infty \\
&= \max\{|(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} (\beta_i (\alpha_j^n - \alpha_j) \gamma_{ijl})| : l = 1, \cdots, k\} \\
&\leq \max\{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} (|\beta_i| \cdot |\alpha_j^n - \alpha_j| \cdot |\gamma_{ijl}|) : l = 1, \cdots, k\} \qquad (19) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} (M|\alpha_j^n - \alpha_j| M) \qquad (20) \\
&\leq kM^2 \sum_{j=1}^{k} (|\alpha_j^n - \alpha_j|) \\
&\leq kM^2 \sum_{j=1}^{k} \max\{|\alpha_j^n - \alpha_j|, j = 1, \cdots, k\} \\
&= k^2 M^2 ||y^n - y||_\infty,
\end{aligned}$$

onde, na passagem de (19) para (20), a constante M foi escolhida de tal modo que

$$M \geq \max_{1 \leq i,j,l \leq k} \{|\beta_i|, |\gamma_{ijl}|\}.$$

Escolhendo p de tal modo que, para $n > p$, se tenha

$$||y^n - y||_\infty \leq \frac{\epsilon}{k^2 M^2},$$

vem que

$$\begin{aligned} ||L(x)y^n - L(x)y||_\infty &\leq k^2M^2||y^n - y||_\infty \\ &\leq k^2M^2\frac{\epsilon}{k^2M^2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Logo, o operador $L(x)$ é contínuo em y e, consequentemente, como y é arbitrário, é contínuo em V. ■

Sendo V uma álgebra de Jordan, o facto dos operadores lineares $L(x)$, com $x \in V$, serem contínuos permite-nos concluir que

$$||L(x)y|| \leq M||x|| \cdot ||y|| \ \ \forall x, y \in V$$

e, consequentemente, que a aplicação

$$\begin{aligned} V \times V &\mapsto V \\ (x, y) &\rightsquigarrow x \circ y \end{aligned}$$

é contínua.

4. Algumas propriedades da representação quadrática P

Seja V uma álgebra de Jordan real e $< u_1, u_2, \ldots, u_n >$ uma base de V. Sejam f, g duas funções do aberto $U \subseteq V$ em V. Se f e g são funções diferenciáveis em U então a função h tal que

$$\begin{aligned} h : U &\mapsto V \\ x &\rightsquigarrow h(x) = f(x) \circ g(x) \end{aligned}$$

é diferenciável. Assim, sendo $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de V, $\forall x \in U$ vem que $f(x) = f_1(x)u_1 + \ldots + f_n(x)u_n$ e $g(x) = g_1(x)u_1 + \ldots + g_n(x)u_n$, pelo que

$$\begin{aligned} \forall x \in V \ \ h(x) &= (f_1(x)u_1 + \ldots f_n(x)u_n) \circ (g_1(x)u_1 + \ldots g_n(x)u_n) \\ &= \sum_{1\leq i\leq j\leq n} (f_i(x)g_j(x)u_i \circ u_j) \\ &= \sum_{1\leq i\leq j\leq n} (f_i(x)g_j(x)\sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk}u_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (\sum_{1\leq i\leq j\leq n} f_i(x)g_j(x)\gamma_{ijk})u_k. \end{aligned}$$

Uma vez que f_i, g_i para $i = 1, \ldots, , n$, são funções diferenciáveis em U, as funções h_k, para $k = 1, \ldots, n$, dadas por $h_k(x) = \sum_{1\leq i\leq j\leq n}(f_i(x)g_i(x)\gamma_{ijk})$,

são também diferenciáveis em U, donde a função h é diferenciável em U.
O teorema que se segue estabelece que as derivadas direccionais $D_yh(x)$, $D_yf(x)$ e $D_yg(x)$ verificam a relação

$$D_yh(x) = L(f(x))D_yg(x) + L(g(x))D_yf(x).$$

TEOREMA 4.1. *Seja V uma álgebra de Jordan real e U um aberto de V e sejam f e g funções de U em V diferenciáveis e h tal que*

$$\begin{aligned} h : U &\mapsto V \\ x &\rightsquigarrow h(x) = f(x) \circ g(x). \end{aligned}$$

Se $D_yh(x)$, $D_yf(x)$ e $D_yg(x)$ são as derivadas direcionais num ponto x segundo a direção $y \in V$, de h, f e g, respectivamente, então

$$D_yh(x) = L(f(x))D_yg(x) + L(g(x))D_yf(x).$$

Demonstração. Com efeito

$$\begin{aligned} D_yh(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{h(x+ty) - h(x)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x+ty)\circ g(x+ty) - f(x)\circ g(x)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x+ty)\circ g(x+ty) - f(x+ty)\circ g(x) + f(x+ty)\circ g(x) - f(x)\circ g(x)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}[f(x+ty)\circ \frac{g(x+ty)-g(x)}{t} + \frac{f(x+ty)-f(x)}{t}\circ g(x)] \\ &= f(x)\circ D_yg(x) + D_yf(x)\circ g(x) \\ &= f(x)\circ D_yg(x) + g(x)\circ D_yf(x) \\ &= L(f(x))D_yg(x) + L(g(x))D_yf(x). \end{aligned}$$

■

Como consequência imediata deste teorema, tendo em conta que a direcção $y \in V$ foi escolhida arbitrariamente, conclui-se que

$$\forall x \in U \ \ Dh(x) = L(f(x))Dg(x) + L(g(x))Df(x). \tag{21}$$

Sendo V uma álgebra de Jordan com elemento unidade e J o conjunto dos elementos invertíveis de V, sabe-se que J é um aberto de V (Cardoso e Vieira, 2003). Considerando a aplicação

$$\begin{aligned} f : J &\mapsto V \\ x &\rightsquigarrow x^{-1}, \end{aligned}$$

prova-se que f é uma função diferenciável em qualquer ponto $x \in J$.
Com efeito, uma vez que $\forall u \in J$, $\det(u) \neq 0$ e

$$u^{-1} = \frac{p(u)}{\det u},$$

onde $p(u)$ é um polinómio em u, conforme se prova em (Cardoso e Vieira, 2003), tendo em conta que $p(\cdot)$ e $det(\cdot)$ são funções diferenciáveis em J, conclui-se que f é diferenciável em J.
No que se segue, para facilitar a exposição, vamos designar a derivada de f num ponto x por Dx^{-1}.

TEOREMA 4.2. *Se V é uma álgebra de Jordan real com elemento unidade $\mathbf{e}$ e J é o conjunto dos elementos invertíveis de V então*

$$Dx^{-1} = -P^{-1}(x) \ \ \forall x \in J.$$

Demonstração. Seja $x \in J$. Uma vez que

$$\begin{array}{rcl} x \circ x^{-1} & = & e \\ x^2 \circ x^{-1} & = & x \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} x \circ x^{-1} & = & e \\ (x \circ x) \circ x^{-1} & = & x, \end{array}$$

por aplicação de (21) vem que

$$\begin{array}{rcl} L(x)Dx^{-1} + L(x^{-1})Dx & = & 0 \\ L(x \circ x)Dx^{-1} + L(x^{-1})D(x \circ x) & = & I \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{array}{rcl} L(x)Dx^{-1} + L(x^{-1})Dx & = & 0 \\ L(x^2)Dx^{-1} + L(x^{-1})(L(x)Dx + L(x)Dx) & = & I \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{array}{rcl} L(x)Dx^{-1} + L(x^{-1})I & = & 0 \\ L(x^2)Dx^{-1} + L(x^{-1})(L(x)I + L(x)I) & = & I \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

$$L(x)Dx^{-1} + L(x^{-1}) \ = \ 0 \qquad (\times 2L(x)) \tag{22}$$
$$L(x^2)Dx^{-1} + 2L(x^{-1})L(x) \ = \ I, \tag{23}$$

donde, multiplicando (22) por $2L(x)$ e subtraindo-lhe (23), se obtém

$$(2L(x)L(x) - L(x^2))Dx^{-1} + 2L(x)L(x^{-1}) - 2L(x^{-1})L(x) \ = \ -I,$$

e, consequentemente, $P(x)Dx^{-1} = -I$, isto é,

$$Dx^{-1} = -P^{-1}(x).$$

■

Tendo em vista provar que se x é um elemento de uma álgebra de Jordan V com elemento unidade, então x é invertível se e só se $P(x)$ é invertivel, vamos começar por demonstrar que, sendo $J \subseteq V$ o conjunto dos elementos invertíveis, $\forall x \in J \ \ P(x)L(x^{-1}) = L(x)$ e ainda que o conjunto $\{x \in V : \mathrm{Det}(L(x)) \neq 0\}$ é denso em J.

TEOREMA 4.3. *Seja V uma álgebra de Jordan com elemento unidade* $\mathbf{e}$ *e J o conjunto dos elementos invertíveis de V. Então $\forall x \in J$*

$$P(x)L(x^{-1}) \;=\; L(x).$$

Demonstração. Seja $x \in J$. Substituindo na igualdade (8) (do teorema 3.1) y por x^{-1} obtém-se

$$L(x^2 \circ x^{-1}) - L(x^2)L(x^{-1}) \;=\; 2(L(x \circ x^{-1}) - L(x)L(x^{-1}))L(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$L(x) - L(x^2)L(x^{-1}) \;=\; 2L(e)L(x) - 2L(x)L(x^{-1})L(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$L(x) - L(x^2)L(x^{-1}) \;=\; 2L(x) - 2L(x)L(x)L(x^{-1}),$$

o que é equivalente a afirmar que

$$2L(x)L(x)L(x^{-1}) - L(x^2)L(x^{-1}) \;=\; L(x).$$

Deve observar-se que de acordo com a observação 3.1 os operadores $L(x)$ e $L(x^{-1})$ comutam.
Logo, tendo em conta que

$$(2L(x)L(x) - L(x^2))L(x^{-1}) \;=\; L(x),$$

conclui-se o pretendido, ou seja, que

$$P(x)L(x^{-1}) \;=\; L(x).$$

■

OBSERVAÇÃO 4.1. *Deste teorema decorre imediatamente que se x é um elemento invertível de uma álgebra de Jordan real com elemento unidade, então $P(x^{-1})L(x) = L(x^{-1})$.*

TEOREMA 4.4. *Se V é uma álgebra de Jordan real com elemento unidade* $\mathbf{e}$ *e $J \subseteq V$ é o conjunto dos elementos invertíveis, então o conjunto*

$$\{x \in V : Det(L(x)) \neq 0\}$$

é denso em J.

Demonstração. Tendo em conta que, de acordo com o teorema 6.2 em apêndice

$$\{x \in V : \mathrm{Det}(L(x)) \neq 0\} \subseteq J,$$

para provarmos que o conjunto $\{x \in V : \mathrm{Det}(L(x)) \neq 0\}$ é denso em J basta provar que J está contido na aderência do conjunto $\{x \in V : \mathrm{Det}(L(x)) \neq 0\}$.

Sendo $\bar{x} \in J$, se $\text{Det}(L(\bar{x})) \neq 0$, então é claro que $\bar{x} \in \{x \in V : \text{Det}(L(x)) \neq 0\}$ e, consequentemente, pertence à sua aderência.
Suponhamos que $\text{Det}((L(\bar{x})) = 0$, então provar que $\bar{x}$ pertence à aderência do conjunto $\{x \in V : \text{Det}(L(x)) \neq 0\}$ é equivalente a provar que para λ não nulo mas suficientemente pequeno $\bar{x} + \lambda e \in \{x \in V : \text{Det}(L(x)) \neq 0\}$. Assim, dada uma base fixa d e.v. V, que se supõe de dimensão n, sendo

$$M_{L(\bar{x})} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

a matriz do operador linear $L(\bar{x})$ de V em V nesta base, o polinómio

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} + \lambda & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} + \lambda & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} + \lambda \end{vmatrix}$$

verifica a igualdade $p(0) = \text{Det}(M_{L(\bar{x})}) = 0$. Logo, uma vez que o número de raizes de $p(\lambda)$ é finito e existe pelo menos uma raiz não nula [4], podemos definir

$$\alpha := \min\{|\alpha_i| : p(\alpha_i) = 0 \wedge \alpha_i \neq 0\}.$$

Consequentemente, $\forall \lambda$ tal que $0 < |\lambda| < \alpha$, sabe-se que

$$p(\lambda) \neq 0 \Leftrightarrow \text{Det}(M_{L(\bar{x})} + \lambda I) \neq 0.$$

Porém, uma vez que

$$\begin{aligned} M_{L(\bar{x}+\lambda e)} &= M_{L(\bar{x})+\lambda L(e)} \\ &= M_{L(\bar{x})+\lambda I} \\ &= M_{L(\bar{x})} + \lambda I, \end{aligned}$$

conclui-se que $\text{Det}(L(\bar{x} + \lambda e)) \neq 0$, para λ não nulo mas suficientemente pequeno. ■

TEOREMA 4.5. *Seja V uma álgebra de Jordan real com elemento unidade* $\boldsymbol{e}$ *e $\bar{x} \in V$. Então $\bar{x}$ é invertível se e só se $P(\bar{x})$ é invertível.*

Demonstração. Sendo $J \subseteq V$ o conjunto dos elementos invertíveis e $x \in J$, sabe-se que

$$\begin{aligned} P(x)P(x^{-1})L(x) &= P(x)L(x^{-1}) && \text{(pela observação 4.1)} \\ &= L(x) && \text{(pelo teorema 4.3).} \end{aligned} \tag{24}$$

[4] Note-se que se todas as raizes de p fossem nulas, então $M_{L(\bar{x})} = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0$, o que contraria a hipotese (i.e., que $\bar{x} \in J$.)

Logo, dado $\bar{x} \in J$ e dada uma sucessão $\{x_n\}_{n\in I\!N} \subset V$ tal que $\mathrm{Det}(L(x_n)) \neq 0$ e $x_n \to \bar{x}$, conclui-se que $\{x_n\}_{n\in I\!N} \subset J$ (ver teorema 6.2 em apêndice). Consequentemente, aplicando (24) $\forall n \in I\!N$

$$\begin{array}{rcl} P(x_n)P(x_n^{-1})L(x_n) & = & L(x_n) \\ & \Updownarrow & \\ P(x_n)P(x_n^{-1}) & = & I, \end{array}$$

uma vez que $\mathrm{Det}(L(x_n)) \neq 0 \Rightarrow \exists L^{-1}(x_n)$. Consequentemente, $\forall y \in V$

$$\begin{array}{c} P(x_n)P(x_n^{-1})y \;=\; y. \\ \Updownarrow \\ (2L(x_n)L(x_n) - L(x_n^2))(2x_n^{-1} \circ (x_n^{-1} \circ y) - (x_n^{-1})^2 \circ y) \;=\; y. \\ \Updownarrow \\ 2L(x_n)L(x_n)(2x_n^{-1} \circ (x_n^{-1} \circ y) - (x_n^{-1})^2 \circ y) - \\ -L(x_n^2)(2x_n^{-1} \circ (x_n^{-1} \circ y) - (x_n^{-1})^2 \circ y) \;=\; y \\ \Updownarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2x_n \circ (x_n \circ (2x_n^{-1} \circ (x_n^{-1} \circ y) - (x_n^{-1})^2 \circ y)) - \\ -x_n^2 \circ (2x_n^{-1} \circ (x_n^{-1} \circ y) - (x_n^{-1})^2 \circ y) \;=\; y \end{array} \tag{25}$$

Tendo em conta a continuidade das aplicações

$$\begin{array}{rcl} V \times V & \mapsto & V \\ (x, y) & \rightsquigarrow & x \circ y \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} V & \mapsto & V \\ u & \rightsquigarrow & u^{-1}, \end{array}$$

podemos calcular o limite da expressão (25) e concluir a igualdade

$$\begin{array}{c} \lim_{n\to\infty} [2x_n \circ (x_n \circ (2x_n^{-1} \circ (x_n^{-1} \circ y) - (x_n^{-1})^2 \circ y)) - \\ -x_n^2 \circ (2x_n^{-1} \circ (x_n^{-1} \circ y) - (x_n^{-1})^2 \circ y)] \;=\; y. \\ \Updownarrow \\ 2x \circ (x \circ (2x^{-1} \circ (x^{-1} \circ y) - (x^{-1})^2 \circ y)) - \\ -x^2 \circ (2x^{-1} \circ (x^{-1} \circ y) - (x^{-1})^2 \circ y) \;=\; y, \\ \Updownarrow \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2L(x)L(x)(2L(x^{-1})L(x^{-1})y - L((x^{-1})^2)y) - \\ -L(x^2)(2L(x^{-1})L(x^{-1})y - L((x^{-1})^2)y) &= y \end{aligned}$$

$$\Updownarrow$$

$$(2L(x)L(x) - L(x^2))(2L(x^{-1})L(x^{-1}) - L((x^{-1})^2))y = y,$$

donde vem que $P(x)P(x^{-1}) = I$ e, consequentemente, que $P(x)$ é invertível e

$$P^{-1}(x) = P(x^{-1}). \tag{26}$$

Reciprocamente, suponha-se que $P(x)$ é invertível. Então, tendo em conta que $P(x)e = x^2$ e que $P(x)$ e $L(x)$ comutam (pelo que $P^{-1}(x)$ e $L(x)$ também comutam), obtém-se o desenvolvimento:

$$\begin{aligned} e &= P^{-1}(x)(x^2) \\ &= P^{-1}(x)(x \circ x) \\ &= P^{-1}(x)(L(x)x) \\ &= L(x)(P^{-1}(x)x) \\ &= x \circ (P^{-1}(x)x). \end{aligned}$$

Logo, para se provar que x é invertível, resta mostrar que $P^{-1}(x)x \in \mathbb{R}[x]$.
Com efeito, o operador $P(x)$, quando restringido ao subespaço $\mathbb{R}[x]$ é um operador injectivo de $\mathbb{R}[x]$ em $\mathbb{R}[x]$. Por outro lado, uma vez que V tem dimensão finita, $\mathbb{R}[x] \subset V$ também tem, o que implica que $P(x)$ seja sobrejectivo em $\mathbb{R}[x]$. Logo, a restrição de $P(x)$ a $\mathbb{R}[x]$ é uma aplicação bijectiva de $\mathbb{R}[x]$ em $\mathbb{R}[x]$ e, consequentemente, $P^{-1}(x)$ também. Logo $P^{-1}(x)x \in \mathbb{R}[x]$.
Desta forma concluiu-se, não só que x é invertível, como também

$$x^{-1} = P^{-1}(x)x$$

■

OBSERVAÇÃO 4.2. *Da demonstração do teorema anterior decorre que quando $x \in V$ é invertível $P^{-1}(x) = P(x^{-1})$ (conforme igualdade (26)).*

TEOREMA 4.6. *Seja V uma álgebra de Jordan real com elemento unidade $\boldsymbol{e}$ e $J \subseteq V$ o conjunto dos elementos invertíveis. Se $x, y \in J$ e $Det(L(P(x)y)) \neq 0$ então*

i) $(P(x)y)^{-1} = P(x^{-1})y^{-1}$

ii) $P(P(x)y) = P(x)P(y)P(x)$.

Demonstração.

i) Supondo que $x \in J$, tendo em conta que $P(x)L(x^{-1}) = L(x^{-1})P(x)$, pelo teorema 4.3, $L(x^{-1})P(x) = L(x)$. Logo, $\forall y \in J$

$$L(x^{-1})P(x)y = L(x)y$$

e, consequentemente,

$$x^{-1} \circ (P(x)y) = x \circ y. \tag{27}$$

Considerando ambos os membros de (27) como funções de x e calculando as respectivas derivadas direccionais no ponto x, segundo a direção y^{-1}, obtém-se

$$D_{y^{-1}}(x^{-1} \circ (P(x)y)) \;=\; D_{y^{-1}}(x \circ y).$$

Aplicando o teorema 4.1 vem

$$D_{y^{-1}}(x^{-1}) \circ (P(x)y) + x^{-1} \circ D_{y^{-1}}(P(x)y) \;=\; (D_{y^{-1}}x) \circ y,$$

pelo que

$$(D(x^{-1})y^{-1}) \circ (P(x)y) + x^{-1} \circ D_{y^{-1}}(P(x)y) \;=\; (D(x)y^{-1}) \circ y.$$

Logo,

$$(D(x^{-1})y^{-1}) \circ (P(x)y) + x^{-1} \circ D_{y^{-1}}(P(x)y) \;=\; (Iy^{-1}) \circ y,$$

$$\Updownarrow$$

$$(D(x^{-1})y^{-1}) \circ (P(x)y) + x^{-1} \circ D_{y^{-1}}(P(x)y) \;=\; y^{-1} \circ y.$$

Como consequência, tendo em conta que (pelo teorema 4.2)

$$D(x^{-1}) = -P^{-1}(x),$$

obtém-se

$$(-P^{-1}(x)y^{-1}) \circ (P(x)y) + x^{-1} \circ D_{y^{-1}}(P(x)y) \;=\; e. \tag{28}$$

Os cálculos da derivada direccional $D_{y^{-1}}(P(x)y)$, conduzem-nos ao desenvolvimento

$$\begin{aligned}
D_{y^{-1}}(P(x)y) &= D_{y^{-1}}(2x \circ (x \circ y) - (x \circ x) \circ y) \\
&= D_{y^{-1}}(2x \circ (x \circ y)) - D_{y^{-1}}((x \circ x) \circ y) \\
&= 2D_{y^{-1}}(x) \circ (x \circ y) + 2x \circ (D_{y^{-1}}(x \circ y)) - (D_{y^{-1}}(x \circ x)) \circ y) \\
&= 2D_{y^{-1}}(x) \circ (x \circ y) + 2x \circ ((D_{y^{-1}}x) \circ y) - \\
&\quad -((D_{y^{-1}}x) \circ x + x \circ (D_{y^{-1}}x)) \circ y \\
&= 2y^{-1} \circ (x \circ y) + 2x \circ (y^{-1} \circ y) - (y^{-1} \circ x + x \circ y^{-1}) \circ y \\
&= 2y^{-1} \circ (x \circ y) + 2x \circ e - 2(x \circ y^{-1}) \circ y \\
&= 2y^{-1} \circ (x \circ y) + 2x - 2y \circ (x \circ y^{-1}) \\
&= 2y^{-1} \circ (x \circ y) + 2x - 2y \circ (y^{-1} \circ x) \\
&= 2y^{-1} \circ (x \circ y) + 2x - 2y \circ (y^{-1} \circ x) \\
&= 2y^{-1} \circ (x \circ y) + 2x - 2L(y)(L(y^{-1})x) \\
&= 2y^{-1} \circ (x \circ y) + 2x - 2L(y^{-1})(L(y)x) \\
&= 2y^{-1} \circ (x \circ y) + 2x - 2y^{-1} \circ (y \circ x) \\
&= 2x.
\end{aligned}$$

Consequentemente, substituindo $D_{y^{-1}}(P(x)y)$ em (28) por $2x$, obtém-se

$$(-P^{-1}(x)y^{-1}) \circ (P(x)y) + x^{-1} \circ (2x) \;=\; e$$

$$\Updownarrow$$

$$(-P^{-1}(x)y^{-1}) \circ (P(x)y) + 2e \;=\; e$$

$$\Updownarrow$$

$$(P^{-1}(x)y^{-1}) \circ (P(x)y) \;=\; e,$$

ou seja,

$$L(P(x)y)P(x^{-1})y^{-1} \;=\; e. \tag{29}$$

Porém, uma vez que $L(P(x)y)$ é invertível, pelo teorema 6.2 (em apêndice), $P(x)y$ é invertível e, adicionalmente, $(P(x)y)^{-1} = L^{-1}(P(x)y)e$. Logo, tendo em conta que (29) se pode escrever na forma $P(x^{-1})y^{-1} = L^{-1}(P(x)y)e$, vem que

$$P(x^{-1})y^{-1} \;=\; (P(x)y)^{-1}.$$

ii) Dado que J é um aberto de V, se $y \in J$, então $y + \tau u \in J$ para todo o τ suficientemente pequeno e $\forall u \in V$. Por outro lado, pode concluir-se que quando τ toma valores suficientemente pequenos [5]

$$\mathrm{Det}(L(P(x)(y + \tau u))) \neq 0.$$

De acordo com $i)$, tendo em conta que (por hipótese) x e y são invertíveis e $\mathrm{Det}(L(P(x)y)) \neq 0$ e tendo ainda em conta que, para τ suficientemente pequeno, $\mathrm{Det}(L(P(x)(y + \tau u)) \neq 0$ e $y + \tau u$ é invertível, vem que

$$(P(x)(y + tu))^{-1} = P(x^{-1})(y + \tau u)^{-1} \quad \text{e} \quad (P(x)y)^{-1} = P(x^{-1})y^{-1}.$$

Logo,

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{(P(x)(y + \tau u))^{-1} - (P(x)y)^{-1}}{\tau} \;=\; \lim_{\tau \to 0} \frac{P(x^{-1})(y + \tau u)^{-1} - P(x^{-1})y^{-1}}{\tau}$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{(P(x)y + \tau P(x)u)^{-1} - (P(x)y)^{-1}}{\tau} \;=\; P(x^{-1}) \lim_{\tau \to 0} \frac{(y + \tau u)^{-1} - y^{-1}}{\tau}. \tag{30}$$

[5] Com efeito,

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(L(P(x)y + \tau P(x)u)) &= \mathrm{Det}(L(P(x)y)(I + \tau L^{-1}(P(x)y)L(P(x)u))) \\ &= \mathrm{Det}(L(P(x)y))\mathrm{Det}(I + \tau L^{-1}(P(x)y)L(P(x)u)). \end{aligned}$$

Considerando a aplicação

$$\begin{aligned} \eta : J &\mapsto V \\ z &\rightsquigarrow \eta(z) = z^{-1}, \end{aligned}$$

a igualdade (30) pode escrever-se na forma

$$D_{P(x)u}\eta(P(x)y) \;=\; P(x^{-1})D_u\eta(y),$$

a qual, tendo em conta que

$$D_{P(x)u}\eta(P(x)y) = D\eta(P(x)y)(P(x)u) \text{ e } D_u\eta(y) = D\eta(y)(u)$$

e que $D\eta(z) = -P^{-1}(z)$, por sua vez, se pode escrever na forma

$$-P^{-1}(P(x)y)(P(x)u) = -P(x^{-1})(P^{-1}(y)u).$$

Logo, tendo em conta que u foi escolhido arbitrariamente em V, conclui-se que

$$P^{-1}(P(x)y)P(x) \;=\; P(x^{-1})P^{-1}(y)$$

$$\Updownarrow$$

$$P^{-1}(P(x)y)P(x) = P^{-1}(x)P^{-1}(y).$$

$$\Updownarrow$$

$$P^{-1}(P(x)y)P(x)P(y)P(x) \;=\; I$$

$$\Updownarrow$$

$$P(x)P(y)P(x) \;=\; P(P(x)y).$$

■

Neste teorema demonstramos que sendo V uma álgebra de Jordan real com elemento unidade e $x, y \in J$ (conjunto dos elementos invertíveis) tais que $\mathrm{Det}(L(P(x)y)) \neq 0$, verifica-se a igualdade

$$P(P(x)y) = P(x)P(y)P(x).$$

No que se segue prova-se que a igualdade anterior é verificada $\forall x, y \in V$.

TEOREMA 4.7. *Se V é uma álgebra de Jordan real com elemento unidade, $\mathbf{e}$, então $\forall x, y \in V$*

$$P(P(x)y) = P(x)P(y)P(x).$$

Demonstração. Como o conjunto

$$A = \{(x,y) \in V \times V : x, y \in J \ \wedge \ \mathrm{Det}(L(P(x)y)) \neq 0\}$$

é um aberto de $V \times V$ (ver teorema 6.3 em apêndice) e como $(e,e) \in A$ [6], então $\forall u, v \in V$, para $\lambda, \mu \in I\!R$ suficientemente pequenos sabe-se que

$$(e + \lambda u, e + \mu v) \in A.$$

Mas então, pelo teorema 4.6, para λ, μ suficientemente pequenos obtém-se a igualdade:

$$P(P(e+\lambda u)(e+\mu v)) \ = \ P(e+\lambda u)P(e+\mu v)P(e+\lambda u). \tag{31}$$

Considerando os desenvolvimentos

$$\begin{aligned}
P(e+\lambda u) &= 2L(e+\lambda u)L(e+\lambda u) - L(e+\lambda u)^2 \\
&= 2(L(e) + \lambda L(u))(L(e) + \lambda L(u)) - L(2\lambda u + e + \lambda^2 u^2) \\
&= 2(2\lambda L(u) + L^2(e) + \lambda^2 L^2(u)) - 2\lambda L(u) - L(e) - \lambda^2 L(u^2) \\
&= 2\lambda L(u) + L(e) + \lambda^2 (2L^2(u) - L(u^2)) \\
&= 2\lambda L(u) + I + \lambda^2 P(u),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(e+\lambda u)(e+\mu v) &= (2\lambda L(u) + I + \lambda^2 P(u))(e+\mu v) \\
&= 2\lambda L(u)e + e + \lambda^2 P(u)e + 2\lambda\mu L(u)v + \mu v + \lambda^2 \mu P(u)v \\
&= 2\lambda u + e + \lambda^2 u^2 + 2\lambda\mu u \circ v + \mu v + \lambda^2 \mu P(u)v,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
P(P(e+\lambda u)(e+\mu v)) &= 2L(2\lambda u + e + \lambda^2 u^2 + 2\lambda\mu u \circ v + \mu v + \\
&\quad + \lambda^2 \mu P(u)v)L(2\lambda u + e + \lambda^2 u^2 + 2\lambda\mu u \circ v + \\
&\quad + \mu v + \lambda^2 \mu P(u)v) - \\
&\quad - L(2\lambda u + e + \lambda^2 u^2 + 2\lambda\mu u \circ v + \mu v + \lambda^2 \mu P(u)v)^2
\end{aligned}$$

vem que

$$\begin{aligned}
P(P(e+\lambda u)(e+\mu v)) &= \lambda^4 \mu^2 (2L^2(P(u)v) - L^2(P(u)v)) + ... \\
&= \lambda^4 \mu^2 P(P(u)v) + \cdots
\end{aligned}$$

Por sua vez, procedendo de igual modo para o segundo membro da igualdade (31), obtém-se

$$\begin{aligned}
P(e+\lambda u)P(e+\mu v)P(e+\lambda u) &= (2\lambda L(u) + I + \lambda^2 P(u))(2\mu L(v) + I + \\
&\quad + \mu^2 P(v))(2\lambda L(u) + I + \lambda^2 P(u)) \\
&= \lambda^4 \mu^2 P(u)P(v)P(u) + ...
\end{aligned}$$

Consequentemente, como os coeficientes de $\lambda^4\mu^2$ dos desenvolvimentos de ambos os membros de (31) têm de ser iguais para todo o λ e μ suficientemente pequenos, vem que $P(P(u)v) = P(u)P(v)P(u)$, o que completa a prova. ∎

A propriedade que acabamos de demonstrar permite-nos generalizar o teorema 4.6 $i)$ conforme segue.

[6] Note-se que **e** é invertivel e $\mathrm{Det}(L(P(e)e)) = \mathrm{Det}(L(e)) = \mathrm{Det}(I) = n \neq 0$.

TEOREMA 4.8. *Se V é uma álgebra de Jordan e $x, y \in V$, então $P(x)y$ é invertível se e só se x e y são invertíveis. Verificando-se, neste caso, que*

$$(P(x)y)^{-1} = P(x^{-1})y^{-1}.$$

Demonstração. Suponhamos, em primeiro lugar, que $x, y \in V$ são invertíveis. Então, uma vez que

$$P(P(x)y) = P(x)P(y)P(x)$$

podemos concluir que tanto $P(x)$ como $P(y)$ são operadores invertíveis [7] e, consequentemente, $P(P(x)y)$ é invertível, o que, por sua vez, implica que $P(x)y$ seja também invertível. Por outro lado, sendo u um elemento invertível de V, como

$$u^{-1} = P^{-1}(u)u,$$

e $P(x)y$ é invertível, então fazendo $u = P(x)y$ obtém-se

$$(P(x)y)^{-1} \ = \ P^{-1}(P(x)y)(P(x)y).$$

Mas então, pelo teorema 4.7,

$$(P(x)y)^{-1} \ = \ (P(x)P(y)P(x))^{-1}(P(x)y).$$

Logo

$$(P(x)y)^{-1} \ = \ (P^{-1}(x)P^{-1}(y)P^{-1}(x))(P(x)y),$$

ou seja,

$$(P(x)y)^{-1} \ = \ P^{-1}(x)(P^{-1}(y)(P^{-1}(x)(P(x)y)).$$

$$\Updownarrow$$

$$(P(x)y)^{-1} \ = \ P^{-1}(x)(P^{-1}(y)y).$$

$$\Updownarrow$$

$$(P(x)y)^{-1} \ = \ P^{-1}(x)(P(y^{-1})y).$$

Assim, vem que

$$\begin{aligned}(P(x)y)^{-1} &= P^{-1}(x)(y^{-1}) \\ &= P(x^{-1})y^{-1}.\end{aligned}$$

Reciprocamente, supondo que $P(x)y$ é invertível, da aplicação do teorema 4.7 decorre imediatamente que $P(x)$ e $P(y)$ são operadores invertíveis o que, por sua vez, implica que x e y sejam também invertíveis. ∎

[7] Note-se que numa álgebra de Jordan V um elemento x é invertível se e só se $P(x)$ é invertível.

OBSERVAÇÃO 4.3. *O teorema 4.7 permite ainda relacionar as potências de x com as potências de $P(x)$. Com efeito,*

$$\begin{aligned} P(P(x)e) &= P(x)P(e)P(x) \\ &= (P(x))^2 \end{aligned}$$

e como $P(x)e = x^2$, vem que

$$P(x^2) = (P(x))^2.$$

Logo, por hipótese de indução, supondo que

$$P(x^j) = (P(x))^j \ \forall j \in \{1, \cdots, n-1\},$$

conclui-se que

$$\begin{aligned} P(x^n) &= P(P(x)x^{n-2}) \\ &= P(x)P(x^{n-2})P(x) \\ &= P(x)(P(x))^{n-2}P(x) \\ &= (P(x))^n. \end{aligned}$$

5. Propriedades adicionais da representação quadrática P

Seja V uma álgebra de Jordan euclidiana com caracteristica r e $x \in V$ um elemento invertível, cuja decomposição espectral vem dada por

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c_i. \tag{32}$$

Assumindo que, na igualdade (32), $\lambda_i \geq 0$, para $i = 1, \cdots, k$, define-se $x^{\frac{1}{2}}$ como sendo o elemento de V tal que

$$x^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{\lambda_i} c_i.$$

Por sua vez, se na igualdade (32), $\lambda_i > 0$, para $i = 1, \cdots, k$, define-se $x^{-\frac{1}{2}} = (x^{\frac{1}{2}})^{-1}$.

TEOREMA 5.1. *Se V é uma álgebra de Jordan euclidiana e $x \in V$ é um elemento definido positivo* [8], *então $P(x)$ é definido positivo.*

[8] Ver (Cardoso e Vieira, 2003)

Demonstração. Uma vez que x é definido positivo, a partir da sua decomposição espectral ($x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_j c_j$, com $\lambda_j > 0$, para $j = 1, \cdots, k$) vem que

$$\begin{aligned} x &= (\sum_{i=1}^{k} \sqrt{\lambda_i} c_i)^2 \\ &= (x^{\frac{1}{2}})^2. \end{aligned}$$

Logo, uma vez que $x = P(x^{\frac{1}{2}})\mathbf{e}$ [9], vem que

$$\begin{aligned} P(x) &= P(P(x^{\frac{1}{2}})e) \\ &= P(x^{\frac{1}{2}})P(e)P(x^{\frac{1}{2}}) \\ &= P(x^{\frac{1}{2}})IP(x^{\frac{1}{2}}) \\ &= P(x^{\frac{1}{2}})P(x^{\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Tendo em conta que o operador $P(y)$ é um operador autoadjunto, para todo o elemento arbitrário $y \in V$, $\forall u \in V$ vem que

$$\begin{aligned} < P(x)u, u > &= < P(x^{\frac{1}{2}})P(x^{\frac{1}{2}})u, u > \\ &= < P(x^{\frac{1}{2}})u, P(x^{\frac{1}{2}})u > \\ &= ||P(x^{\frac{1}{2}})u||^2 \\ &\geq 0. \end{aligned} \tag{33}$$

Por outro lado, como $x^{\frac{1}{2}}$ é um elemento invertível de V, então $P(x^{\frac{1}{2}})$ é também invertível. Logo, a inequação (33) é satisfeita na forma de igualdade sse $u = 0$, o que significa que $P(x)$ é um operador definido positivo. ∎

O facto de numa álgebra de Jordan euclidiana, V, para todo o $x, y \in V$ se verificar a igualdade

$$P(P(x)y) = P(x)P(y)P(x)$$

permite que a dedução das propriedades da representação quadrática de V se faça relacionando as potências de um elemento $u \in V$ com as potências de $P(u)$, conforme se descreve nos dois teoremas a seguir.

TEOREMA 5.2. *Se V é uma álgebra de Jordan euclidiana e $x \in V$ é um elemento definido positivo, então*

[9] Note-se que

$$\begin{aligned} P(x^{\frac{1}{2}})e &= 2L(x^{\frac{1}{2}})(L(x^{\frac{1}{2}})e) - L((x^{\frac{1}{2}})^2)e \\ &= 2x^{\frac{1}{2}} \circ (x^{\frac{1}{2}} \circ e) - (x^{\frac{1}{2}} \circ x^{\frac{1}{2}}) \circ e \\ &= 2x^{\frac{1}{2}} \circ x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} \circ x^{\frac{1}{2}} \\ &= x^{\frac{1}{2}} \circ x^{\frac{1}{2}} \\ &= (x^{\frac{1}{2}})^2 \\ &= x. \end{aligned}$$

i)

$$P(x) \;=\; P(x^{\frac{1}{2}})P(x^{\frac{1}{2}}). \tag{34}$$

ii)

$$P(x^{-\frac{1}{2}}) \;=\; P^{-1}(x^{\frac{1}{2}}). \tag{35}$$

Demonstração.

i) Esta prova já foi feita anteriormente.

ii) Esta demonstração decorre directamente das igualdades

$$\begin{aligned} P(x^{-\frac{1}{2}}) &= P((x^{\frac{1}{2}})^{-1}) \\ &= P^{-1}(x^{\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Note-se que sendo x um elemento definido positivo, se $P^{\frac{1}{2}}(x) = P(x^{\frac{1}{2}})$ e $P^{-\frac{1}{2}}(x) = (P^{\frac{1}{2}}(x))^{-1}$, então $P^{-\frac{1}{2}}(x) = P(x^{-\frac{1}{2}})$.
Com efeito

$$\begin{aligned} P^{-\frac{1}{2}}(x) &= (P^{\frac{1}{2}}(x))^{-1} && \text{(por definição)} \\ &= (P(x^{\frac{1}{2}}))^{-1} && \text{(por definição)} \\ &= P((x^{\frac{1}{2}})^{-1}) && \text{(uma vez que } x^{\frac{1}{2}} \text{ é invertível)} \\ &= P(x^{-\frac{1}{2}}) && \text{(por definição).} \end{aligned}$$

■

De acordo com a observação 4.2, numa álgebra de Jordan V com elemento unidade, se $x \in V$ é invertível, então $P(x^{-1}) = P^{-1}(x)$. Por outro lado, tendo em conta a observação 4.3, sabe-se que $\forall u \in V$ e $\forall p \in I\!N$

$$P(u^p) = (P(u))^p.$$

O teorema que se segue estabelece esta última propriedade para as potências de um elemento invertível $u \in V$ com expoente negativo, definidas por $u^{-p} = (u^p)^{-1} \;\; \forall p \in I\!N$.

TEOREMA 5.3. *Se V é uma álgebra de Jordan euclidiana com elemento unidade* $\mathbf{e}$ *e $u \in V$ é um elemento invertível, então $\forall p \in I\!N$*

$$(u^{-1})^p \;=\; u^{-p} \tag{36}$$

$$P(u^{-p}) \;=\; (P(u))^{-p}. \tag{37}$$

Demonstração. Como $I\!R[x]$ é uma subálgebra associativa de V e $u^{-1} \in I\!R[x]$, então $\forall p \in I\!N$

$$u^p \circ (u^{-1})^p \;=\; e$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} (u^{-1})^p &= (u^p)^{-1} \\ &= u^{-p}, \end{aligned}$$

donde se conclui a igualdade (36).
A prova de (37) decorre, directamente, do desenvolvimento

$$\begin{aligned} P(u^{-p}) &= P((u^{-1})^p) \\ &= (P(u^{-1}))^p \\ &= (P^{-1}(u))^p \\ &= (P(u))^{-p} \quad \forall p \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

6. Apêndice

TEOREMA 6.1. *Seja V uma álgebra de Jordan real com elemento unidade, então $x \in V$ é invertivel se e só se* $\det(x) \neq 0$.

Demonstração. Ver (Cardoso e Vieira, 2003). ∎

TEOREMA 6.2. *Seja V uma álgebra de Jordan real com elemento unidade e $x \in V$. Se $L(x)$ é invertivel, então x é invertivel e $x^{-1} = L^{-1}(x)e$.*

Demonstração. Ver (Cardoso e Vieira, 2003). ∎

TEOREMA 6.3. *Seja V uma álgebra de Jordan real e $J \subseteq V$ o conjunto dos elementos invertíveis. Então o conjunto*

$$A = \{(x,y) \in V \times V : x, y \in J \wedge Det(L(P(x)y)) \neq 0\}$$

é aberto.

Demonstração. Seja $(x,y) \in A$ e escolham-se os números reais positivos ϵ_1 e μ_1, tais que $B(x,\epsilon_1) \subset J$ e $B(y,\mu_1) \subset J$ [10]. Dado que $\exists M > 0$ tal que $\forall x, y \in V$ $||L(x)y|| \leq M||x||.||y||$, considerando os escalares ϵ_2 e μ_2 dados por

$$\begin{aligned}\epsilon_2 &= \min\{\epsilon_1, \frac{1}{2}, \frac{1}{M^3||L^{-1}(P(x)y)||(6||x||.||y|| + 3||y|| + 3||x||^2 + 6||x|| + 3)}\}\\ \mu_2 &= \min\{\mu_1, \frac{1}{2}, \frac{1}{M^3||L^{-1}(P(x)y)||(6||x||.||y|| + 3||y|| + 3||x||^2 + 6||x|| + 3)}\},\end{aligned}$$

vamos provar que

$$B(x,\epsilon_2) \times B(y,\mu_2) \ \subset \ A. \tag{38}$$

Porém, para a demonstração desta inclusão, uma vez que

$$B(x,\epsilon_2) \subseteq B(x,\epsilon_1) \text{ e } B(y,\mu_2) \subseteq B(y,\mu_1),$$

basta provar que $\forall u \in B(x,\epsilon_2)$ e $\forall v \in B(y,\mu_2)$ $\mathrm{Det}(L(P(u)v)) \neq 0$.
Para tal, no que se segue, e para maior facilidade de exposição, vamos considerar a família de operadores $\{Q(u,v) : (u,v) \in V \times V\}$ tal que $\forall u, v \in V$

$$Q(u,v) = L(u)L(v) + L(v)L(u) - L(v \circ u).$$

Se $u \in B(x,\epsilon_2)$ e $v \in B(y,\mu_2)$ então

$$u = x + \alpha u_1 \text{ e } v = y + \beta v_1,$$

[10] Note-se que J é um aberto de V (ver (Cardoso e Vieira, 2003)).

onde $|\alpha| < \epsilon_2$, $|\beta| < \mu_2$, $u_1 = \frac{u-x}{||u-x||}$ e $v_1 = \frac{(v-y)}{||v-y||}$.
Considerando o desenvolvimento

$$\begin{aligned}
L(P(u)v) &= L(P(x+\alpha u_1)(y+\beta v_1)) \\
&= L\big((2L(x+\alpha u_1)L(x+\alpha u_1) - L(x+\alpha u_1)^2)(y+\beta v_1)\big) \\
&= L\big((2L^2(x) + 2\alpha L(u_1)L(x) + 2\alpha L(x)L(u_1) + 2\alpha^2 L^2(u_1) - \\
&\quad -L(x^2 + 2\alpha x \circ u_1 + \alpha^2 u_1^2))(y+\beta v_1)\big) \\
&= L\left((P(x) + 2\alpha Q(x,u_1) + \alpha^2 P(u_1))(y+\beta v_1)\right) \\
&= L(P(x)y) + 2\alpha L(Q(x,u_1)y) + \alpha^2 L(P(u_1)y) + \\
&\quad +\beta L(P(x)v_1) + 2\alpha\beta L(Q(x,u_1)v_1) + \beta\alpha^2 L(P(u_1)v_1) \\
&= L(P(x)y)\Big(I + 2\alpha L^{-1}(P(x)y)L(Q(x,u_1)y) + \\
&\quad +\alpha^2 L^{-1}(P(x)y)L(P(u_1)y) + \\
&\quad +\beta L^{-1}(P(x)y)L(P(x)v_1) + 2\alpha\beta L^{-1}(P(x)y)L(Q(x,u_1)v_1) + \\
&\quad +\beta\alpha^2 L^{-1}(P(x)y)L(P(u_1)v_1)\Big).
\end{aligned}$$

e definindo o operador linear

$$\begin{aligned}
R(x,y,u_1,v_1,\alpha,\beta) &= 2\alpha L^{-1}(P(x)y)L(Q(x,u_1)y) + \alpha^2 L^{-1}(P(x)y)L(P(u_1)y) + \\
&\quad +\beta L^{-1}(P(x)y)L(P(x)v_1) + 2\alpha\beta L^{-1}(P(x)y)L(Q(x,u_1)v_1) \\
&\quad +\beta\alpha^2 L^{-1}(P(x)y)L(P(u_1)v_1),
\end{aligned}$$

uma vez que

$$L(P(u)v) = L(P(x)y)(I + R(x,y,u_1,v_1,\alpha,\beta)),$$

a prova da invertibilidade de $L(P(u)v)$ é equivalente à prova da desigualdade

$$||R(x,y,u_1,v_1,\alpha,\beta)|| < 1.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
||R(x,y,u_1,v_1,\alpha,\beta)|| &\leq 2|\alpha|.||L^{-1}(P(x)y)L(Q(x,u_1)y)|| + \\
&\quad +\alpha^2||L^{-1}(P(x)y)L(P(u_1)y)|| + \\
&\quad +|\beta|.||L^{-1}(P(x)y)L(P(x)v_1)|| + \\
&\quad +2|\alpha\beta|.||L^{-1}(P(x)y)L(Q(x,u_1)v_1)|| + \\
&\quad +\alpha^2.|\beta|\ ||L^{-1}(P(x)y)L(P(u_1)v_1)|| \\
&\leq ||L^{-1}(P(x)y)||(2\epsilon_2||L(Q(x,u_1)y)|| + \\
&\quad +\epsilon_2^2||L(P(u_1)y)|| + \mu_2||L(P(x)v_1)|| + \\
&\quad +2\epsilon_2\mu_2||L(Q(x,u_1)v_1)|| + \mu_2\epsilon_2^2||L(P(u_1)v_1)||) \\
&\leq ||L^{-1}(P(x)y)||(2\epsilon_2 \sup_{||z||\leq 1}||L(Q(x,u_1)y)z|| + \\
&\quad +\epsilon_2^2 \sup_{||z||\leq 1}||L(P(u_1)y)z|| + \\
&\quad +\mu_2 \sup_{||z||\leq 1}||L(P(x)v_1)z|| +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +2\epsilon_2\mu_2 \sup_{||z||\leq 1}||L(Q(x,u_1)v_1)z|| + \\
& +\mu_2\epsilon_2^2 \sup_{||z||\leq 1}||L(P(u_1)v_1)z||) \quad (39)\\
\leq\ & M^3||L^{-1}(P(x)y)||(2\epsilon_2 3||x||||u_1||||y|| + 3\epsilon_2^2||u_1||^2||y|| + \\
& +3\mu_2||x||^2||v_1|| + 2\epsilon_2\mu_2\, 3||x||.||u_1||.||v_1|| \\
& +\mu_2\epsilon_2^2\, 3||u_1||^2||v_1||) \quad (40)\\
\leq\ & M^3||L^{-1}(P(x)y)||(6\epsilon_2||x||||y|| + 3\epsilon_2^2||y|| + 3\mu_2||x||^2 + \\
& +6\epsilon_2\mu_2||x|| + 3\mu_2\epsilon_2^2) \\
\leq\ & M^3||L^{-1}(P(x)y)||(6||x||||y|| + 3||y|| + 3||x||^2 + 6||x|| + 3) \\
\leq\ & \frac{1}{2} \\
<\ & 1.
\end{aligned}
$$

A passagem de (39) para (40) deve-se ao facto da desigualdade $||L(x)y|| \leq M||x||.||y||$ se verificar $\forall x, y \in V$. ■

Referências

Cardoso, D. M.,e Vieira, L. A. Conceitos e Resultados sobre Álgebras de Jordan. Cadernos de Matemática do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, CM03/I-20 (2003).

Faraut, J. and A. Korányi Analysis on Symmetric Cones. Oxford Science Publications, New York(1994).

Koecher, M. The Minnesota Notes on Jordan Álgebras and Their Applications. Edited and annotated by Aloys Krieg and Sebastian Walcher, Springer, Berlin(1999).

Luenberger, D.G. Optimization by Vector Space Metheods. John Wiley & Sons, Inc. New York(1969).

Spindler, K. Abstract Algebra with Applications. Marcel Dekker, Inc, New York, vol. I e II (1994).