Conceitos e Resultados sobre Álgebras de Jordan

Domingos M. Cardoso (dcardoso@mat.ua.pt)
Universidade de Aveiro, Departamento de Matemática, 3810-193 Aveiro, Portugal

Luís A. Vieira (lvieira@fe.up.pt)
Faculdade de Engenharia do Porto, Departamento de Engenharia Civil,
Secção de Matemática e Física, R. Dr. Roberto Frias, 4200-465 Porto, Portugal

Julho de 2003

Resumo. Apresenta-se um resumo dos principais resultados associados às àlgebras de Jordan e às álgebras de Jordan euclidianas, com demonstrações detalhadas, quer nos casos em que não se conhecem publicações que as apresentem, quer nos casos em que, embora se conheçam tais publicações, a abordagem seguida ou é demasiado sucinta ou afasta-se do contexto deste relatório.

Keywords: Commutative Algebras, Euclidean Jordan Algebras.

1. Álgebras reais associativas em potência.

Seja V um espaço vectorial real de dimensão n munido de uma aplicação bilinear:

$$\begin{array}{rcl} V \times V & \rightarrow & V \\ (x, y) & \rightarrow & x \circ y, \end{array}$$

Se para todo $x \in V$ $(x \circ x) \circ x = x \circ (x \circ x)$ então diz-se que V é uma álgebra associativa em potência.
Numa álgebra associativa em potência, V, para todo o $x \in V$ e quaisquer que sejam $p, q \in I\!N$, verifica-se a igualdade

$$x^p \circ x^q = x^{p+q}.$$

Se $\mathbf{e} \in V$ é tal que

$$\forall x \in V \ \ x \circ \mathbf{e} = \mathbf{e} \circ x = x,$$

então $\mathbf{e}$ designa-se por elemento unidade de V.
Seja V uma álgebra associativa em potência com elemento unidade $\mathbf{e}$. Para cada $x \in V$ seja k o menor inteiro tal que

$$\{e, x, x^2, \ldots, x^k\}$$

é linearmente dependente. Então k designa-se por característica de x e escrevemos $rank(x) = k$. Define-se caracteristíca de V como sendo o número r tal que

$$r = \text{rank}(V) = \max\{rank(x) : x \in V\}.$$

Um elemento $x \in V$ diz-se regular se a sua característica é igual á característica da álgebra V.
Dado um elemento regular, x, numa álgebra asssociativa em potência, V, com elemento unidade, $\mathbf{e}$, e característica r, uma vez que o conjunto $\{\mathbf{e}, x, x^2, \ldots, x^r\}$ é linearmente dependente e o conjunto $\{\mathbf{e}, x, x^2, \ldots, x^{r-1}\}$ é linearmente independente, podemos concluir que existem r números reais únicos, $a_1(x)$, $a_2(x)$, $\ldots$, $a_r(x)$, tais que

$$x^r - a_1(x)x^{r-1} + \ldots + (-1)^r a_r(x)\mathbf{e} = 0,$$

onde 0 é o vector nulo de V.
O polinómio

$$p(x, \lambda) = \lambda^r - a_1(x)\lambda^{r-1} + \ldots + (-1)^r a_r(x) \tag{1}$$

designa-se por polinómio característico de x, onde, como se provará de seguida, os coeficientes $a_i(x)$ são funções multinomiais nas coordenadas de x numa base fixa de V. A definição de polinómio característico pode ser estendida a qualquer elemento de V, uma vez que o conjunto dos elementos regulares de uma álgebra associativa em potência, V, é um conjunto denso de V, pelo que se $x \in V$ e V é uma álgebra real associativa em potência com elemento unidade $\mathbf{e}$, então existe uma sucessão $\{x_n\}_{n\in I\!\!N}$, de elementos regulares de V, convergindo para x. Assim, definindo

$$a_i(x) = \lim_{n\to\infty} a_i(x_n) = a_i(\lim_{n\to\infty} x_n) = a_i(x),$$

obtém-se o polinómio característico de um elemento não regular como sendo o polinómio

$$p(x, \lambda) = \lambda^r - a_1(x)\lambda^{r-1} + \ldots + (-1)^r a_r(x).$$

A justificação da utilização do termo "polinómio característico", advém da seguinte propriedade dos elementos regulares: sendo x um elemento regular de V, se considerarmos a subálgebra real de V, $I\!\!R[x]$, gerado por $\{e, x, \ldots, x^{r-1}\}$, então a aplicação linear, $L_0(x)$, tal que $L_0(x)y = x \circ y$, restringida a $I\!\!R[x]$ tem uma matriz na base $B = \{e, x, \ldots, x^{r-1}\}$ dada por

$$M_{L_0(x)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & (-1)^{r-1}a_r(x) \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & (-1)^{r-2}a_{r-1}(x) \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & (-1)^{r-3}a_{r-2}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_1(x) \end{bmatrix},$$

cujo polinómio característico coincide como o polinómio (1). Com efeito, calculando o determinante de $\lambda I - M_{L_0(x)}$, obtém-se

$$|\lambda\, I - M_{L_0(x)}| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 & -(-1)^{r-1}a_r(x) \\ -1 & \lambda & \ldots & 0 & -(-1)^{r-2}a_{r-1}(x) \\ 0 & -1 & \ldots & 0 & -(-1)^{r-3}a_{r-2}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & \lambda - a_1(x) \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)a_r(x)\begin{vmatrix} -1 & \lambda & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} + \\
&\quad +\lambda \begin{vmatrix} \lambda & \dots & 0 & -(-1)^{r-2}a_{r-1}(x) \\ -1 & \dots & 0 & -(-1)^{r-3}a_{r-2}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & \lambda - a_1(x) \end{vmatrix} \\
&= (-1)(-1)^{r-1}a_r(x) + \lambda \begin{vmatrix} \lambda & \dots & 0 & -(-1)^{r-2}a_{r-1}(x) \\ -1 & \dots & 0 & -(-1)^{r-3}a_{r-2}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & \lambda - a_1(x) \end{vmatrix} \\
&= (-1)^r a_r(x) + \lambda \begin{vmatrix} \lambda & \dots & 0 & -(-1)^{r-2}a_{r-1}(x) \\ -1 & \dots & 0 & -(-1)^{r-3}a_{r-2}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & \lambda - a_1(x) \end{vmatrix} \\
&= (-1)^r a_r(x) + \lambda(-1)^{r-1}a_{r-1} + \ldots + \lambda^r \\
&= \lambda^r - a_1(x)\lambda^{r-1} + a_2(x)\lambda^{r-2} + \ldots + (-1)^r a_r(x).
\end{aligned}
$$

De agora em diante, sempre que nos referirmos ao polinómio característico de um elemento x de uma álgebra associativa em potência com elemento unidade, utilizaremos a notação $p(x, \lambda)$.
Prova-se, facilmente, que quando x é regular, $a_r(x)$ coincide com o determinante da matriz $M_{L_0(x)}$ e $a_1(x)$ coincide com o traço da matriz $M_{L_0(x)}$. Por esta razão, numa álgebra real associativa em potência com elemento unidade, V, define-se para cada elemento x de V o traço e o determinante de x e denota-se, respectivamente, por $\mathrm{tr}(x)$ e $\det(x)$, como sendo, respectivamente, os coeficientes $a_1(x)$ e $a_r(x)$ do polinómio característico de x. Muitas vezes, quando x é regular, o polinómio característico também se designa por polinómio mínimo de x.
Note-se que, sendo x um elemento regular, se

$$p(x, \lambda) = \lambda^r - a_1(x)\lambda^{r-1} + a_2(x)\lambda^{r-2} + \ldots + (-1)^r a_r(x)$$

então $x^r - a_1(x)x^{r-1} + a_2(x)x^{r-2} + \ldots + (-1)^r a_r(x)\mathbf{e} = 0$, e $p(x, \lambda)$ é o polinómio mónico de menor grau tal que $p(x, x) = 0$.

1.1. A Álgebra associativa em potência $I\!R^n$

Como exemplo dos conceitos definidos anteriormente vamos considerar a álgebra associativa $V = (I\!R^n, \circ)$, tal que

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \circ (y_1, y_2, \ldots, y_n) \;=\; (x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n).$$

Fácilmente se prova que V é uma álgebra onde se verifica que

$$\forall \bar{x} \in I\!R^n \ (\bar{x} \circ \bar{x}) \circ \bar{x} = \ \bar{x} \circ (\bar{x} \circ \bar{x}).$$

Ou seja, V é uma álgebra associativa em potência onde $(1, \ldots, 1)$ é o elemento unidade. Como $I\!R^n$ tem dimensão n, a caraterística de $I\!R^n$ é menor ou igual a n. Por outro lado, como o conjunto

$$\{(1, 1, \ldots, 1), (x_1, x_2, \ldots, x_n), (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2), \ldots, (x_1^{n-1}, x_2^{n-1}, \ldots, x_n^{n-1})\}$$

é linearmente independente se e só se

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2}$$

conclui-se que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tem característica n se e só se a desigualdade (2) se verifica. Porém, como

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \Pi_{i>j}(x_i - x_j),$$

conclui-se que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tem característica n sse $x_i \neq x_j \ \ \forall i \neq j$. Logo, se as componentes de $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ são todas distintas, então o menor $k \in I\!N$ tal que o conjunto

$$\{(1, \ldots, 1), (x_1, \ldots, x_n), (x_1^2, \ldots, x_n^2), \ \ldots, \ (x_1^k, \ldots, x_n^k)\}$$

é linearmente dependente é $k = n$, pelo que $\mathrm{rank}(x_1, \ldots, x_n) = n$. Como consequência, uma vez que

$$\mathrm{rank}(x_1, \ldots, x_n) \leq n, \ \ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in I\!R^n$$

conclui-se que a característica de $I\!R^n$ é n. [1] Assim, os elementos regulares de $I\!R^n$ são os vectores $(x_1, \ldots, x_n)$ tais que $x_i \neq x_j \ \forall i \neq j$.
Determinemos, agora, o polinómio característico de um elemento regular de $I\!R^n$, $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
Como o conjunto

$$\{(1, \ldots, 1), (x_1, \ldots, x_n), \ \ldots, \ (x_1^{n-1}, \ldots, x_n^{n-1})\}$$

[1] Note-se que, por definição, a característica de $I\!R^n$ é

$$\mathrm{rank}(I\!R^n) = \max\{\mathrm{rank}(x_1, \ldots, x_n) : (x_1, \ldots, x_n) \in I\!R^n\}.$$

é linearmente independente e

$$\{(1,\dots,1),(x_1,\dots,x_n),\ \dots,\ (x_1^n,\dots,x_n^n)\}$$

é linearmente dependente, então existem n números reais $a_i(\bar{x})$, para $i = 1,\dots,n$, tais que

$$(x_1^n,\dots,x_n^n) = a_1(\bar{x})(x_1^{n-1},\dots,x_n^{n-1}) + \dots + (-1)^{n+1}a_n(\bar{x})(1,1,\dots,1).$$

Consequentemente vem que

$$\begin{bmatrix} x_1^n \\ x_2^n \\ \vdots \\ x_n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^{n+1}a_n(\bar{x}) \\ (-1)^n a_{n-1}(\bar{x}) \\ \vdots \\ (-1)^2 a_1(\bar{x}) \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Como $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ é regular, então

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

e (3) admite uma única solução

$$((-1)^{n+1}a_n(\bar{x}), (-1)^n a_{n-1}(\bar{x}), \dots, (-1)^2 a_1(\bar{x})).$$

Assim, as variáveis $a_j(\bar{x})$ ficam determinadas, de maneira única, através da igualdade:

$$(-1)^{n-j+2}a_{n-j+1}(\bar{x}) \ = \ \frac{\begin{array}{c|ccccccc|} & & & & & j & & \\ & 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n & \dots & x_1^{n-1} \\ & 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n & \dots & x_2^{n-1} \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ j & 1 & x_j & x_j^2 & \dots & x_j^n & \dots & x_j^{n-1} \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_j^n & \dots & x_n^{n-1} \end{array}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}}, j = 1,\dots,n$$

Para se determinarem os coeficientes $a_j(\bar{x})$ de um modo mais simples, note-se que

$$(\lambda - x_1)\dots(\lambda - x_n) \ = \ 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda^n - (x_1 + \ldots + x_n)\lambda^{n-1} + \ \ldots\ + (-1)^j \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_j \leq n} \Pi_{k=1}^{j} x_{i_k} \lambda^{n-j} + \\ + \ \ldots\ + (-1)^n \Pi_{i=1}^{n} x_i = 0$$

Mas então, fazendo $\lambda = x_l$, para $l = 1, \ldots, n$ vem que

$$x_l^n - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)x_l^{n-1} + \ \ldots\ + (-1)^j (\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_j \leq n} \Pi_{k=1}^{j} x_{i_k}) x_l^{n-j} + \\ + \ \ldots\ + (-1)^n \Pi_{i=1}^{n} x_i = 0,$$

ou seja,

$$x_l^n = (x_1 + \ldots + x_n)x_l^{n-1} - \ \ldots\ - (-1)^j (\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_j \leq n} \Pi_{k=1}^{j} x_{i_k}) x_l^{n-j} - \\ - \ \ldots\ - (-1)^n \Pi_{i=1}^{n} x_i.$$

Logo

$$\begin{aligned} (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_n^n) \ = \ & (x_1 + \ldots + x_n)(x_1^{n-1}, \ldots, x_n^{n-1}) + \ldots + \\ & + (-1)^{j+1} (\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_j < \leq n} \Pi_{k=1}^{j} x_{i_k})(x_1^{n-j}, x_2^{n-j}, \ldots, x_n^{n-j}) + \\ & + \ldots + (-1)^{n+1} (\Pi_{i=1}^{n} x_i)(1, 1, \ldots, 1). \end{aligned} \tag{4}$$

Assim, quando $(x_1, \ldots, x_n)$ é regular o polinómio característico $p((x_1, \ldots, x_n), \lambda)$ vem dado por

$$\begin{aligned} p((x_1, \ldots, x_n), \lambda) \ = \ & \lambda^n - (x_1 + \ldots + x_n)\lambda^{n-1} + \\ & + \ldots + (-1)^j (\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_j \leq n} \Pi_{k=1}^{j} x_{i_k}) \lambda^{n-j} + \\ & + \ldots + (-1)^n \Pi_{i=1}^{n} x_i. \end{aligned}$$

Logo, para $j = 1, \ldots, n$, vem que

$$a_j(x_1 \ldots, x_n) \ = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_j \leq n} \Pi_{k=1}^{j} x_{i_k},$$

donde $\det(x) = \Pi_{i=1}^{n} x_i$ e $\mathrm{tr}(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Para verificar que o conjunto dos elementos regulares é um conjunto denso de $I\!R^n$, considere-se um elemento não regular $(x_1, \ldots, x_n) \in I\!R^n$. Então $(x_1, \ldots, x_n)$ tem pelo menos duas coordenadas iguais. Consideremos o conjunto J tal que J é um subconjunto maximal do conjunto de ídices $\{1, \ldots, n\}$ com a propriedade $\forall i \in J \setminus \{j\} \quad x_i \neq x_j$, ou seja, $J \subset \{1, \ldots, n\}$ é tal que $\forall i, j \in J$

$$i \neq j \ \Rightarrow\ (x_i \neq x_j) \ \wedge\ (\nexists l \in \{1, \ldots, n\} \setminus J : x_l \neq x_k \ \ \forall k \in J).$$

Seja $\delta = \min\{|x_i - x_j|, i, j \in J \wedge i \neq j\}$ e escolha-se $s \in I\!N$ tal que $\frac{1}{s} < \delta$. Então

$$\bar{x}^k = (x_1 + \frac{1}{s+k+1}, x_2 + \frac{1}{s+k+2}, \dots, x_n + \frac{1}{s+k+n})$$

com $k \in I\!N$, possui todas as coordenadas distintas e, por conseguinte, é um ponto regular de $I\!R^n$. Por outro lado, é evidente que a sucessão $\{\bar{x}^k\}_{k \in N}$ converge para $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Determinemos, agora, o polinómio característico de um elemento não regular de $I\!R^n$.

Sendo $\{(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)\}_{k \in I\!N}$ uma sucessão de elementos regulares de $I\!R^n$ convergindo para $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, sabe-se que

$$a_j(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq n} \Pi_{l=1}^{j} x_{i_l}^k$$

logo, definindo

$$\begin{aligned} a_j(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \lim_{k \to \infty} a_j(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \\ &= \lim_{k \to \infty} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq n} \Pi_{l=1}^{j} x_{i_l}^k \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq n} \Pi_{l=1}^{j} \lim_{k \to \infty} x_{i_l}^k \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq n} \Pi_{l=1}^{j} x_{i_l}, \end{aligned}$$

obtém-se o polinómio característico no ponto não regular $(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$$\begin{aligned} p((x_1, x_2, \dots, x_n), \lambda) &= \lambda^n - (x_1 + x_2 + \dots + x_n)\lambda^{n-1} + \\ &+ \dots + ((-1)^j \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq n} \Pi_{k=1}^{j} x_{i_k})\lambda^{n-j} + \\ &+ \dots + (-1)^n \Pi_{i=1}^{n} x_i. \end{aligned}$$

Desta forma, provamos que o traço e o determinante de um elemento arbitrário $(x_1, \dots, x_n) \in I\!R^n$ ficam definidos pelas igualdades

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \det(x_1, \dots, x_n) &= \Pi_{i=1}^{n} x_i \end{aligned}$$

e que na álgebra associativa em potência, $I\!R^n$, se constroi o polinómio característico de um elemento não regular à custa dos polinómios característicos dos elementos regulares. Uma tal construção, baseia-se no facto dos elementos regulares constituirem um conjunto denso de $\mathbb{R}^n$ e no facto dos coeficientes $a_j(x)$ do polinómio característico de um elemento regular x serem funções polinomiais homógeneas de grau j, nas coordenadas de x numa base fixa de $\mathbb{R}^n$.

2. Polinómio característico de um elemento regular de uma álgebra associativa em potência real com elemento unidade

Nesta secção, prova-se que as conclusões obtidas anteriormente, sobre o polinómio característico de um elemento arbitrário de $\mathbb{R}^n$ se estendem aos polinómios característicos dos elementos de qualquer álgebra associativa em potência com elemento unidade.

TEOREMA 2.1. *Seja V uma álgebra real associativa em potência de dimensão finita com característica r e elemento unidade* $\mathbf{e}$, *e x um elemento regular de V. Então existem polinómios $a_1(x), \ldots, a_r(x)$ em V que determinam o polinómio característico associado a x*

$$p(x, \lambda) = \lambda^r - a_1(x)\lambda^{r-1} + a_2(x)\lambda^{r-2} + \ldots + (-1)^r a_r(x),$$

onde os polinómios $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_r(x)$ são únicos e tais que cada $a_j(x)$, para $j = 1, \ldots, r$, é um polinómio homógeneo de grau j nas coordenadas de x numa base fixa de V.

Demonstração. Suponhamos que a dimensão de V é n, a característica é r e que x é um elemento regular de V. Como a característica de V é r então existem números reais únicos, $a_j(x)$, com $j = 1, \ldots, r$, tais que

$$x^r = a_1(x)x^{r-1} - a_2(x)x^{r-2} - \ldots - (-1)^r a_r(x)e.$$

Esta unicidade dos coeficientes $a_j(x)$ decorre da própria definição de elemento regular de uma álgebra associativa em potência com elemento unidade V.
Fixe-se uma base de V, $B =< u_1, u_2, \ldots, u_n >$, e considere-se que as coordenadas de $\mathbf{e}$ e de x, na base B, são dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_n u_n \\ x &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n. \end{aligned}$$

Exprimindo os produtos $u_i \circ u_j$ na base B, da forma

$$u_i \circ u_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} u_k,$$

obtém-se

$$x^2 = x \circ x$$

$$
\begin{aligned}
&= x \circ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j \\
&= (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i) \circ (\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j) \\
&= \sum_{1\leq i<j\leq n} \alpha_i\alpha_j(2u_i \circ u_j) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 u_i \circ u_i \\
&= \sum_{1\leq i<j\leq n} (\alpha_i\alpha_j(2\sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk}u_k)) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 u_i \circ u_i \\
&= \sum_{1\leq i<j\leq n} (\alpha_i\alpha_j(2\sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk}u_k)) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_i^2 \gamma_{iik}u_k \\
&= \sum_{k=1}^{n}(\sum_{1\leq i<j\leq n} 2\alpha_i\alpha_j\gamma_{ijk} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\gamma_{iik})u_k.
\end{aligned}
$$

Assim, provamos que

$$x^2 = \sum_{k=1}^{n} p_{2k}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)u_k,$$

onde

$$p_{2k}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \sum_{1\leq i<j\leq n} 2\alpha_i\alpha_j\gamma_{ijk} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\gamma_{iik}$$

é um polinómio homógeneo de grau dois nas varáveis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.
Procedendo de modo análogo, chegaríamos á conclusão que

$$x^j = \sum_{k=1}^{n} p_{jk}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)u_k,$$

onde p_{jk} é um polinómio homógeneo de grau j nas variáveis $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.
Mas então, se x é regular, existem constantes únicas, $a_1(x), \ldots, a_r(x)$, tais que

$$x^r = a_1(x)x^{r-1} - a_2(x)x^{r-2} + \ldots - (-1)^r a_r(x)e. \tag{5}$$

Como consequência, substituindo em (5) x^j por $\sum_{k=1}^{n} p_{jk}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)u_k$, para $j = 1, \ldots r$, e substituindo **e** por $\sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i$, obtém-se

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} p_{r\,k}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)u_k &= a_1(x)\sum_{k=1}^{n} p_{(r-1)\,k}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)u_k - \\
&- a_2(x)\sum_{k=1}^{n} p_{(r-2)\,k}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)u_k + \cdot s + \\
&+ (-1)^{r+1}a_r(x)\sum_{k=1}^{n} \beta_k u_k.
\end{aligned}
$$

Utilizando uma notação menos pesada, denotando $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ por α, obtém-se

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} p_{r\,k}(\alpha) u_k &= a_1(x) \sum_{k=1}^{n} p_{(r-1)\,k}(\alpha) u_k + \\
&+ (-1)^3 a_2(x) \sum_{k=1}^{n} p_{(r-2)\,k}(\alpha) u_k + \ldots + \\
&+ (-1)^{r+1} a_r(x) \sum_{k=1}^{n} \beta_k u_k
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} p_{r1}(\alpha) \\ p_{r2}(\alpha) \\ \vdots \\ p_{rn}(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{(r-1)\,1}(\alpha) & p_{(r-2)\,1}(\alpha) & \ldots & p_{11}(\alpha) & \beta_1 \\ p_{(r-1)\,2}(\alpha) & p_{(r-2)\,2}(\alpha) & \ldots & p_{12}(\alpha) & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{(r-1)\,n}(\alpha) & p_{(r-2)\,n}(\alpha) & \ldots & p_{1n}(\alpha) & \beta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1(x) \\ -a_2(x) \\ \vdots \\ -(-1)^r a_r(x) \end{bmatrix}.$$

Mas como as colunas são linearmente independentes (uma vez que x é regular), então existem r linhas linearmente independentes, a saber, $j_1, j_2, \ldots, j_r$. Assim, os $a_i(x)$ ficam univocamente determinados pelo sistema de equações

$$\begin{bmatrix} p_{r\,j_1}(\alpha) \\ p_{r\,j_2}(\alpha) \\ \vdots \\ p_{r\,j_r}(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{(r-1)\,j_1}(\alpha) & p_{(r-2)\,j_1}(\alpha) & \ldots & p_{1\,j_1}(\alpha) & \beta_{j_1} \\ p_{(r-1)\,j_2}(\alpha) & p_{(r-2)\,j_2}(\alpha) & \ldots & p_{1\,j_2}(\alpha) & \beta_{j_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{(r-1)\,j_r}(\alpha) & p_{(r-2)\,j_r}(\alpha) & \ldots & p_{1\,j_r}(\alpha) & \beta_{j_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1(x) \\ -a_2(x) \\ \vdots \\ -(-1)^r a_r(x) \end{bmatrix} \tag{6}$$

Logo, utilizando a regra de Cramer, vem

$$-(-1)^j a_j = \frac{\begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad j \\ \begin{vmatrix} p_{(r-1)\,j_1}(\alpha) & p_{(r-2)\,j_1}(\alpha) & \ldots & p_{r\,j_1}(\alpha) & \ldots & p_{1j_1}(\alpha) & \beta_{j_1} \\ p_{(r-1)\,j_2}(\alpha) & p_{(r-2)\,j_2}(\alpha) & \ldots & p_{r\,j_2}(\alpha) & \ldots & p_{1j_2}(\alpha) & \beta_{j_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ p_{(r-1)\,j_r}(\alpha) & p_{(r-2)\,j_r}(\alpha) & \ldots & p_{r\,j_r}(\alpha) & \ldots & p_{1j_r}(\alpha) & \beta_{j_r} \end{vmatrix} \end{array}}{\begin{vmatrix} p_{(r-1)\,j_1}(\alpha) & p_{(r-2)\,j_1}(\alpha) & \ldots & p_{(j-1)\,j_1}(\alpha) & \ldots & p_{1j_1}(\alpha) & \beta_{j_1} \\ p_{(r-1)\,j_2}(\alpha) & p_{(r-2)\,j_2}(\alpha) & \ldots & p_{(j-1)\,j_2}(\alpha) & \ldots & p_{1j_2}(\alpha) & \beta_{j_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{(r-1)\,j_r}(\alpha) & p_{(r-2)\,j_r}(\alpha) & \ldots & p_{(j-1)\,j_r}(\alpha) & \ldots & p_{1j_r}(\alpha) & \beta_{j_r} \end{vmatrix}},$$

pelo que, os coeficientes do polinómio característico de x, $p(x, \lambda)$ (que, uma vez que x é regular, coincide com o polinómio mínimo de x), pertencem ao corpo dos quocientes de polinómios de $I\!R[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$.
Segue-se a prova que o polinómio mínimo de um elemento regular x, $p(x, \lambda)$, divide o polinómio característico do operador linear

$$\begin{aligned} L(x) : V &\to V \\ y &\to L(x)y = x \circ y, \end{aligned}$$

o qual vamos denotar por $p(\lambda)$. Antes, porém, vamos considerar a restrição de $L(x)$ ao espaço vectorial real gerado por

$$\{\mathbf{e}, x, x^2, \dots, x^{r-1}\},$$

que passamos a designar por $L_0(x)$, devendo ter-se em conta que os polinómios mónicos de grau mínimo de x e $L_0(x)$ coincidem. Tal facto decorre da álgebra V ser uma álgebra associativa em potência com elemento unidade o que, por sua vez, implica que se tenha

$$L_0(x^r)u = (L_0(x))^r u \qquad \forall u \in I\!R[x]. \tag{7}$$

Com efeito, sendo

$$p_0(\lambda) = \lambda^s + \sum_{i=1}^{s-1} b_i \lambda^i$$

o polinómio mónico de grau mínimo que se anula para $L_0(x)$ (i.e., tal que $p_0(L_0(x)) = 0$), vem que

$$p_0(L_0(x))e = (L_0(x))^s e + \sum_{i=1}^{s-1} b_i (L_0(x))^i e = L_0^s(x)e + \sum_{i=1}^{s-1} b_i L_0^i(x)e = 0,$$

donde, tendo em conta (7), se obtém

$$L_0(x^s)e + \sum_{i=1}^{s-1} b_i L_0(x^i)e = 0 \Leftrightarrow L_0(x^s + \sum_{i=1}^{s-1} b_i x^i)e = 0.$$

Da última igualdade decorre que

$$x^s + \sum_{i=1}^{s-1} b_i x^i = 0$$

e que grau$(p(x,\lambda)) = r \leq s$.
Para a conclusão da prova da coincidência dos polinómios $p(x,\lambda)$ e $p_0(\lambda)$, resta demonstrar que $s \leq r$. Assim, dado que $p(x,x) = 0$, então $\forall u \in I\!R[x]$

$$\begin{aligned}
0 \circ u &= p(x,x) \circ u = (x^r - a_1(x)x^{r-1} + a_2(x)x^{r-2} + \dots + (-1)^r a_r(x)\mathbf{e}) \circ u \\
&= L_0(x^r - a_1(x)x^{r-1} + a_2(x)x^{r-2} + \dots + (-1)^r a_r(x)\mathbf{e})u \\
&= L_0(x^r)u - a_1(x)L_0(x^{r-1})u + a_2(x)L_0(x^{r-2})u + \dots + (-1)^r a_r(x)L(e)u \\
&= (L_0(x))^r u - a_1(x)(L_0(x))^{r-1}u + a_2(x)(L_0(x))^{r-2}u + \dots + (-1)^r a_r(x)Iu.
\end{aligned}$$

Logo

$$(L_0(x))^r - a_1(x)(L_0(x))^{r-1} + a_2(x)(L_0(x))^{r-2} + \dots + (-1)^r a_r(x)I = 0,$$

pelo que, o grau do polinómio mínimo de $L_0(x)$, s, é não superior a r (i.e., $s \leq r$).

Assim provamos que $r = s$ e, consequentemente, como o polinómio mónico de grau mínimo de x é único, provamos que os polinómios mínimos de x e de $L_0(x)$ coincidem. Porém, uma vez que o polinómio mínimo de $L_0(x)$ é um divisor do polinómio característico de $L_0(x)$, que por sua vez é um divisor do polinómio característico de $L(x)$, $p(\lambda) = \det(\lambda I - L(x))$, podemos concluir que o polinómio $p(x, \lambda)$ divide $p(\lambda)$. Para completar a prova deste teorema, vamos demonstrar que $p(\lambda)$ é um polinómio homógeneo de grau n nas variáveis $\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Para tal, a partir das imagens dos elementos u_j, pelo operador linear $L(x)$,

$$\begin{aligned} L(x)u_j &= (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i) \circ u_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i u_i \circ u_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} u_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \gamma_{ijk}) u_k, \end{aligned}$$

determina-se

$$|\lambda I - L(x)| = \begin{vmatrix} \lambda - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \gamma_{i11} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \gamma_{ij1} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \gamma_{in1} \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \gamma_{i12} & \cdots & \lambda - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \gamma_{ij2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \gamma_{in2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \gamma_{i1n} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \gamma_{ijn} & \cdots & \lambda - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \gamma_{inn} \end{vmatrix}.$$

Desenvolvendo o determinante, chegamos á conclusão que o polinómio $p(\lambda) = \mathrm{Det}(\lambda I - L(x))$ é um polinómio homogéneo de grau n nas variáveis (λ, α_1, α_2, ..., α_n). Por outro lado, conclui-se ainda que p é um polinómio mónico com coeficientes no anel de factorização $I\!R[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$. [2] Mas então, como $p(x, \lambda)$ é um polinómio mónico de grau r, com coeficientes no corpo K dos quocientes do anel de factorização, $C = I\!R[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$, $p(\lambda)$ é um polinómio mónico também de K e $p(x, \lambda)$ divide $p(\lambda)$. Logo, pelo teorema de Gauss (Van Der Waerden, 1966), como os coeficientes de $p(\lambda)$ pertencem a $I\!R[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$, conclui-se que os coeficientes de $p(x, \lambda)$ pertencem a $I\!R[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$. [3] Porém, como todo o polinómio que divide um polinómio homógeneo é homogéneo, conclui-se que $p(x, \lambda)$ é um polinómio homógeneo de grau r e, por conseguinte, tal que os coeficientes $a_j(x)$ são funções hómogeneas de grau j em $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

■

OBSERVAÇÃO 2.1. *A demonstração deste teorema permite-nos concluir que o conjunto dos elementos regulares de V é um aberto de V.*
Com efeito, dado um elemento regular, x, existe um determinante não nulo, idêntico ao da matriz dos coeficientes do sistema de equações (6), ou seja,

$$\triangle(x) = \begin{vmatrix} p_{r-1\,j_1}(\alpha) & p_{r-2\,j_1}(\alpha) & \ldots & p_{j-1\,j_1}(\alpha) & \ldots & p_{1j_1}(\alpha) & \beta_{j_1} \\ p_{r-1\,j_2}(\alpha) & p_{r-2\,j_2}(\alpha) & \ldots & p_{j-1\,j_2}(\alpha) & \ldots & p_{1j_2}(\alpha) & \beta_{j_2} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{r-1\,j_r}(\alpha) & p_{r-2\,j_r}(\alpha) & \ldots & p_{j-1\,j_r}(\alpha) & \ldots & p_{1j_r}(\alpha) & \beta_{j_r} \end{vmatrix}$$

e, como $\triangle(x) \in I\!R[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, então existe uma bola centrada em x tal que $\triangle(x) \neq 0$, para todo o x nessa bola.
De igual modo se pode concluir que o conjunto dos elementos regulares é denso em V, dado que $\triangle(x)$ é um polinómio em $I\!R[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ e se $\triangle(x) = 0$, então existe um ponto $y \in V$, tão próximo de x quanto se queira, tal que $\triangle(y) \neq 0$, o que equivale a afirmar que y é um elemento regular.
A densidade do conjuntos dos elementos regulares em V permite estender a definição de polinómio característico a elementos não regulares.

[2] Trata-se do anel de polinómios nas variáveis α_i, com coeficientes em $I\!R$, que é um domínio de factorização único devido ao facto de $I\!R$ ser um corpo (Spindler, 1994).

[3] O teorema de Gauss afirma que dado o anel de factorização $I\!R[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$ e dado o corpo dos quocientes de $I\!R[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$, K, supondo que f e g são dois polinómios mónicos de $K[x]$ e que os coeficientes de g pertencem $I\!R[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$, se f é um factor de g, então os coeficientes de f estão em $I\!R[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$ (Van Der Waerden, 1966).

3. Álgebras de Jordan reais de dimensão finita com elemento unidade

Como exemplo de álgebras reais associativas em potência com elemento unidade podem referir-se as álgebras de Jordan reais de dimensão finita com elemento unidade que passamos a descrever.

Seja V um espaço vectorial real com dimensão finita, onde está definida a operação de multiplicação de vectores $\circ$, determinada pela aplicação bilinear $(x, y) \to x \circ y$. Diz-se que V é uma álgebra de Jordan se

i)
$$x \circ y = y \circ x$$

ii)
$$x \circ (x^2 \circ y) = x^2 \circ (x \circ y),$$

onde $x^2 = x \circ x$

A propriedade *ii)* pode ser escrita na forma

$$[L(x), L(x^2)] = 0,$$

onde $[,]$ denota o parênteses de Lie.

TEOREMA 3.1. *Se V é uma álgebra de Jordan, então $\forall x, y, z \in V$ verificam-se as seguintes igualdades:*

(i) $[L(x), L(y^2)] + 2[L(y), L(xy)] = 0$

(ii) $[L(x), L(yz)] + [L(z), L(xy)] + [L(y), L(zx)] = 0$

(iii) $L(x^2y) - L(x^2)L(y) = 2(L(xy) - L(x)L(y))L(x)$

Demonstração. Ver (Faraut and Korányi, 1994). ∎

Daqui em diante, sempre que nos referirmos a uma álgebra de Jordan V, supomos que V é uma álgebra de Jordan real de dimensão finita com elemento unidade $\mathbf{e}$. Logo, uma vez que se V é uma álgebra de Jordan então V é uma álgebra associativa em potência (Koecher, 1999), a cada elemento $x \in V$ podemos associar o respectivo polinómio característico. Assim, se r é a característica de V, então o polinómio característico de x é o polinómio

$$p(x, \lambda) = \lambda^r - a_1(x)\lambda^{r-1} + \ldots + (-1)^r a_r(x),$$

onde $a_j(x)$ para $j = 1, \ldots, r$, é um polinómio homogéneo de grau j nas coordenadas de x relativas a uma base fixa de V. A partir deste polinómio define-se determinante e traço de x e denota-se, respectivamente, $det(x)$ e $tr(x)$, por intermédio das seguintes igualdades

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(x) &= a_1(x),\\ \det(x) &= a_r(x).\end{aligned}$$

3.1. Noção de Invertibilidade de um Elemento de V

Numa álgebra de Jordan real diz-se que um elemento x é invertível se existe $y \in \mathbb{R}[x]$ [4] tal que

$$x \circ y = e.$$

Netas condições, y designa-se por inverso de x e denota-se por x^{-1}.

OBSERVAÇÃO 3.1. *Note-se que como a álgebra $\mathbb{R}[x]$ é associativa, o inverso x^{-1} é único.*

Seguem-se alguns resultados de grande utilidade para as restantes secções.

TEOREMA 3.2. *Seja V uma álgebra de Jordan real com elemento unidade. Então $\forall u \in V$ e $\forall x, y \in \mathbb{R}[u]$*

$$\det(x \circ y) = \det(x)\det(y).$$

Demonstração. Ver (Faraut and Korányi, 1994) ∎

TEOREMA 3.3. *Seja V uma álgebra de Jordan real com elemento unidade $\mathbf{e}$. Se $L(x)$ é invertível então $x^{-1} = L^{-1}(x)\mathbf{e}$.*

Demonstração. Uma vez que $L(x)$ é invertível, podemos concluir que a sua restrição a $\mathbb{R}[x]$, $L_0(x)$, é também invertível, pelo que o operador linear

$$L_0(x) : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$$

é injectivo e, como a dimensão de $\mathbb{R}[x]$ é finita, então

$$\dim(\mathbb{R}[x]) = \dim(Ker(L_0(x))) + \dim(Im(L_0(x))) = 0 + \dim(Im(L_0(x))).$$

Consequentemente, $L_0(x)$ é um operador sobrejectivo (i.e., trata-se de um isomorfismo) e, uma vez que $\mathbf{e} \in \mathbb{R}[x]$, existe um único elemento $x^{-1} \in \mathbb{R}[x]$ tal que $L_0(x)x^{-1} = \mathbf{e} \Leftrightarrow x \circ x^{-1} = \mathbf{e}$. Logo, vem que

$$\mathbf{e} = x \circ x^{-1} = L(x)x^{-1} \Leftrightarrow L^{-1}(x)\mathbf{e} = x^{-1}.$$

∎

Da demonstração deste teorema decorre que $x \in V$ é invertível sse $L_0(x)$ é invertível e, sendo x invertível, $x^{-1} = L_0^{-1}(x)\mathbf{e}$. O teorema a seguir fornece um critério de verificação da invertibilidade (ou não) de um elemento x de uma álgebra Jordan com elemento unidade.

[4] Subálgebra de V gerada por $\mathbf{e}$ e x.

TEOREMA 3.4. *Um elemento de uma álgebra de Jordan com elemento unidade é invertível se e só se* $\det(x) \neq 0$.

Demonstração. Se x é invertível, uma vez que $x^{-1} \in I\!R[x]$, a conclusão que $\det(x) \neq 0$ decorre, de modo imediato, do teorema 3.2. Reciprocamente, se $\det(x) \neq 0$, utilizando o polinómio característico de x, com facilidade se conclui que x é invertível. ∎

Antes de prosseguirmos convém introduzir a definição de idempotente.

DEFINIÇÃO 3.1. *Sendo V uma álgebra de Jordan, diz-se que $c \in V$ é um idempotente se $c^2 = c$.*

Como consequência do teorema 3.1 - (iii) decorre o seguinte resultado.

TEOREMA 3.5. *Se c é um idempotente de uma álgebra de Jordan V, então os valores próprios do operador linear $L(c)$ de V em V pertencem ao conjunto* $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

Demonstração. Com efeito, se considerarmos em $(3.1 - (iii))$, $x = y = c$, obtém-se

$$L(c^3) - L(c^2)L(c) \;=\; 2(L(c^2) - (L(c))^2)L(c),$$

ou seja,

$$L(c) \;=\; 3(L(c))^2 - 2(L(c))^3.$$

Logo, se λ é um valor próprio de $L(c)$, então λ é raiz do polinómio

$$2\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda \;=\; 0,$$

ou seja, $\lambda = 0 \vee \lambda = \frac{1}{2} \vee \lambda = 1$. ∎

4. Álgebras de Jordan euclidianas

DEFINIÇÃO 4.1. *Uma álgebra de Jordan real V com elemento unidade diz-se uma álgebra de Jordan euclidiana se existe uma forma bilinear simétrica, associativa, defenida positiva em V, ou seja, se existe em V um produto interno $< u, v >$ tal que*

$$< u \circ v, w >=< u, v \circ w > .$$

OBSERVAÇÃO 4.1. *Desta definição decorre que $\forall u \in V \;\; L(u)$ é um operador autoadjunto.*

Conforme já se referiu anteriormente, se c é um idempotente de uma álgebra de Jordan real, V, então o operador linear $L(c)$ de V em V só admite valores próprios $\lambda = 0, \lambda = \frac{1}{2}$ ou $\lambda = 1$. Vejamos agora como se comporta o operador linear $L(c)$ quando c é um idempotente de uma álgebra de Jordan euclidiana.

Sendo $(V, \circ)$ uma álgebra de Jordan euclidiana, considerem-se os subespaços invariantes do operador $L(c)$ relativamente a cada um dos seus valores próprios, i.e.,

$$\begin{aligned} V(c,0) &= \{x \in V : L(c)x = 0\} \\ V(c,1) &= \{x \in V : L(c)x = x\} \\ V(c,\frac{1}{2}) &= \{x \in V : L(c)x = \frac{1}{2}x\}. \end{aligned}$$

Como $L(c)$ é um operador autoadjunto relativamente ao produto interno de V então os subespaços invariantes associados a valores próprios distintos são ortogonais e tais que

$$V = V(c,0) \oplus V(c,\frac{1}{2}) \oplus V(c,1).$$

Os subespaços invaraiantes $V(c,0), V(c,1), V(c,\frac{1}{2})$, pelo facto de V ser uma álgebra de Jordan euclidiana, verificam ainda as seguintes propriedades:

i) $V(c,0)$ e $V(c,1)$ são subálgebras de V.

ii) $V(c,0) \circ V(c,1) = \{0\}$

iii) $(V(c,0) \oplus V(c,1)) \circ V(c,\frac{1}{2}) \subset V(c,\frac{1}{2})$.

iv) $(V(c,\frac{1}{2}) \circ V(c,\frac{1}{2})) \subset V(c,1) \oplus V(c,0)$.

As provas destas propriedades podem ser encontrada em (Faraut and Korányi, 1994).

4.1. Sistema de Jordan de uma Álgebra de Jordan euclidiana

Convém, nesta altura, introduzir o conceito de ortogonalidade relativamente à operação da álgebra.

DEFINIÇÃO 4.2. *Sendo V uma álgebra de Jordan euclidiana, dois elementos $c, d \in V$ são ortogonais, relativamente à àlgebra, se $c \circ d = 0$.*

De acordo com esta defininição, é claro que se dois idempotentes $c, d \in V$ são ortogonais relativamente à álgebra, então também são ortogonais relativamente ao produto interno. Com efeito

$$\begin{aligned} < c, d > &= < c, d \circ e > \\ &= < c \circ d, e > \\ &= < 0, e > \\ &= 0. \end{aligned}$$

DEFINIÇÃO 4.3. *Diz-se que* $\{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ *é um sistema de idempotentes ortogonais completo se verifica as propriedades:*

$$\begin{array}{rl} (i) & c_i^2 = c_i \;\; \forall i \in \{1, \ldots, k\}, \\ (ii) & c_i \circ c_j = 0 \;\; \forall i \neq j, \\ (iii) & c_1 + c_2 + \ldots + c_k = \boldsymbol{e}. \end{array}$$

DEFINIÇÃO 4.4. *Um idempotente* c *é primitivo se é um idempotente não nulo e não se pode escrever como soma de dois idempotentes ortogonais (relativamente à álgebra) não nulos.*

Note-se que a soma de idempotentes ortogonais, relativamente à álgebra, é também um idempotente.

DEFINIÇÃO 4.5. *Diz-se que* $\{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ *é um sistema de idempotentes primitivos ortogonais completo ou um sistema de Jordan, se* $\{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ *é um sistema de idempotentes ortogonais completo onde cada idempotente é primitivo.*

Embora em (Faraut and Korányi, 1994) se demonstrem os resultados sobre a decomposição espectral de um elemento de uma álgebra de Jordan euclidiana, que a seguir se descrevem, dada a sua especial importância para a compreensão das álgebras de Jordan euclidianas, no que se segue, optamos por incluir as respectivas provas devidamente detalhadas.

TEOREMA 4.1. *Seja* V *uma álgebra de Jordan euclidiana e* $x \in V$ *tal que* $L_0(x)$ *(restrição do operador* $L(x)$ *a* $I\!R[x]$*) tem pelo menos dois valores próprios distintos. Se* λ_j *é um valor próprio do operador autoadjunto* $L_0(x)$ *e* P_j *é a projecção sobre o subespaço invariante* V_j *associado ao valor próprio* λ_j*, então existe* $p_j \in I\!R[X]$*, tal que* $p_j(L_0(x)) = P_j$*.*

Demonstração. Considerando o polinómio

$$p_j(X) \;=\; \frac{\Pi_{k:k\neq j}(X - \lambda_k)}{\Pi_{k:k\neq j}(\lambda_j - \lambda_k)},$$

onde λ_j, para $j = 1, \ldots, p$, são os valores próprios distintos de $L_0(x)$, obtém-se

$$p_j(\lambda_k) \;=\; \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad k = j \\ 0 & \text{se} \quad k \neq j. \end{cases}$$

Para se provar que $P_j = p_j(L_0(x))$, basta provar que $P_j u = p_j(L_0(x))u$, (a) $\forall u \in V_j$ e (b) $\forall u \in V_s$ com $s \neq j$.

(a) Seja $u \in V_j$, então

$$\begin{aligned}
p_j(L_0(x))u &= \frac{\Pi_{k:k\neq j}(L_0(x) - \lambda_k I)}{\Pi_{k:k\neq j}(\lambda_j - \lambda_k)} u \\
&= \frac{\Pi_{k:k\neq j}(\sum_{l=1}^{p} \lambda_l P_l u) - \lambda_k u)}{\Pi_{k:k\neq j}(\lambda_j - \lambda_k)} \\
&= \frac{\Pi_{k:k\neq j}(\lambda_j P_j u - \lambda_k u)}{\Pi_{k:k\neq j}(\lambda_j - \lambda_k)} \\
&= \frac{\Pi_{k:k\neq j}(\lambda_j u - \lambda_k u)}{\Pi_{k:k\neq j}(\lambda_j - \lambda_k)} \\
&= \frac{\Pi_{k:k\neq j}(\lambda_j - \lambda_k)}{\Pi_{k:k\neq j}(\lambda_j - \lambda_k)} u \\
&= u \\
&= P_j u.
\end{aligned}$$

(b) Seja $u \in V_s, s \neq j$ então

$$\begin{aligned}
p_j(L_0(x))u &= \frac{\Pi_{k:k\neq j}(L_0(x) - \lambda_k I)}{\Pi_{k:k\neq j}(\lambda_j - \lambda_k)} u \\
&= \frac{\Pi_{k:k\neq j}(\sum_{l=1}^{p} \lambda_l P_l u - \lambda_k u)}{\Pi_{k:k\neq j}(\lambda_j - \lambda_k)} \\
&= \frac{\Pi_{k:k\neq j}(\lambda_s P_s u - \lambda_k u)}{\Pi_{k:k\neq j}(\lambda_j - \lambda_k)} \\
&= \frac{\Pi_{k:k\neq j}(\lambda_s u - \lambda_k u)}{\Pi_{k:k\neq j}(\lambda_j - \lambda_k)} \\
&= \frac{\Pi_{k:k\neq j}(\lambda_s - \lambda_k)}{\Pi_{k:k\neq j}(\lambda_j - \lambda_k)} u \\
&= 0 \\
&= P_j u.
\end{aligned}$$

Tendo em conta (a) e (b), conclui-se que $P_j = p_j(L_0(x))$. ■

■

TEOREMA 4.2. *Seja V uma álgebra de Jordan euclidiana com elemento unidade $\boldsymbol{e}$ e $x \in V$. Então existem k números reais, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, únicos, todos distintos e um único sistema de idempotentes ortogonais completo, $\{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$, (não necessariamente primitivos) tais que*

$$x = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \ldots + \lambda_k c_k. \tag{8}$$

Adicionalmente, tem-se que $c_j \in \mathbb{R}[x]$ para $j = 1, \ldots, k$. [5]

[5] Dada a decomposição (8), os números λ_j dizem-se os valores próprios de x e $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i c_i$ diz-se a decomposição espectral de x.

Demonstração. Seja $I\!R[x]$ a subálgebra real de V gerado por $\mathbf{e}$ e $x \in V$ e considere-se $L_0(x)$ a restrição do operador $L(x)$ a $I\!R[x]$. Como a álgebra de Jordan, V, é uma álgebra de Jordan euclidiana, então $L_0(x)$ é um operador autoadjunto relativamente ao produto interno $<,>$. Com efeito, se $y, z \in I\!R[x]$, então

$$\begin{aligned} < L_0(x)y, z > &= < x \circ y, z > \\ &= < y \circ x, z > \\ &= < y, x \circ z > \\ &= < y, L_0(x)z > . \end{aligned}$$

Assim, uma vez que $L_0(x)$ é autoadjunto, os subespaços invariantes associados a valores próprios distintos são ortogonais.
Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ os valores próprios reais distintos de $L_0(x)$ e $V_1, V_2, \ldots, V_k$ os correspondentes subespaços invariantes. Nesta altura vamos dividir a prova em duas partes, considerando $k = 1$ e $k > 1$, respectivamente.

1. Suponha-se k=1, pelo que $L_0(x)y = \lambda_1 y \;\; \forall y \in I\!R[x]$. Nestas condições, temos dois casos (1.1) $\lambda_1 = 0$ ou (1.2) $\lambda_1 \neq 0$.
   (1.1) Se $\lambda_1 = 0$, então $L_0(x)y = 0 \;\; \forall y \in I\!R[x]$ e, consequentemente, $x \circ y = 0 \;\; \forall y \in I\!R[x]$. Em particular, $x \circ e = 0$, onde $\mathbf{e}$ é o elemento unidade de V, pelo que $x = 0 \Leftrightarrow x = 0\mathbf{e}$, com $\{\mathbf{e}\}$ definindo um sistema de idempotentes ortogonais completo de V.
   (1.2) Se $\lambda_1 \neq 0$, então $L_0(x)\mathbf{e} = \lambda_1\mathbf{e}$, uma vez que $\mathbf{e}$ pertence ao respectivo subespaço invariante. Por outro lado, $L_0(x)\mathbf{e} = x \circ \mathbf{e} = x$, pelo que $x = \lambda_1\mathbf{e}$ e $\{\mathbf{e}\}$ é um sistema de idempotentes ortgonais completo de V.
2. Suponhamos $k > 1$. Então

$$L_0(x) \;=\; \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$$

onde P_i é a projecção no subespaço próprio $V_i \;\; \forall i \in \{1, \ldots, k\}$ e, consequentemente,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} P_i &= I, \\ P_i \circ P_i &= P_i \;\; \forall i \in \{1, \ldots, k\}, \\ P_i \circ P_j &= 0 \;\; \forall i \neq j. \end{aligned}$$

Tendo em conta o teorema 4.1, donde se conclui que $\forall j \in \{1, \ldots, k\} \quad P_j = p_j(L_0(x))$, com $p_j(X) = \frac{\Pi_{l:l\neq j}(X-\lambda_l)}{\Pi_{l:l\neq j}(\lambda_j-\lambda_l)}$, vamos definir os idempotentes c_j para $j = 1, \ldots, k$, por

$$c_j = p_j(x) = \frac{\Pi_{l:l\neq j}(x - \lambda_l e)}{\Pi_{l:l\neq j}(\lambda_j - \lambda_l)} = \sum_{i=0}^{k-1} b_i x^i,$$

A prova deste teorema completa-se (2.1) demonstrando que $S = \{c_1, \ldots, c_k\}$ é um sistema de idempotentes ortogonais completo, (2.2) que $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c_i$ e, finalmente, (2.3) com a prova da unicidade desta decomposição.

(2.1) Uma vez que a subálgebra $I\!R[x]$ é associativa, convém observar que

$$\begin{aligned} L_0(c_j) &= L_0(p_j(x)) \\ &= L_0(\sum_{i=0}^{k-1} b_i x^i) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} b_i L_0(x^i) \qquad (9) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} b_i (L_0(x))^i \qquad (10) \\ &= p_j(L_0(x)). \end{aligned}$$

Nas igualdades anteriores, a passagem de (9) para (10) é obtida tendo em conta que $\forall v \in I\!R[x]$, $v = \sum_{i=0}^{l} \alpha_i x^i$, com $\alpha_i \in I\!R \quad \forall i \in \{0, \ldots, l\}$ e, consequentemente,

$$\begin{aligned} L_0(x^j)v &= L_0(x^j)(\sum_{i=0}^{l} \alpha_i x^i) = x^j \circ (\sum_{i=0}^{l} \alpha_i x^i) \\ &= \sum_{i=0}^{l} \alpha_i (x^j \circ x^i) \\ &= \sum_{i=0}^{l} (\alpha_i((x \circ x \circ x \ldots \circ x) \circ x^i)) \\ &= \sum_{i=0}^{l} (\alpha_i(x \circ (x \circ (x \ldots (x \circ x^i))))) \\ &= \sum_{i=0}^{l} (\alpha_i(L_0(x)(L_0(x)(L_0(x) \ldots (L_0(x)(x^i))))) \\ &= \sum_{i=0}^{l} (\alpha_i((L_0(x))^j(x^i))) \\ &= (L_0(x))^j(\sum_{i=0}^{l} (\alpha_i(x^i))) \\ &= (L_0(x))^j v, \end{aligned}$$

pelo que $L_0(x^j) = (L_0(x))^j$.

Tendo em conta que L_0 é um operador linear de V no conjunto dos operadores lineares de V em V, que a cada $x \in V$ associa o operador linear $L_0(x)$, pelo que L_0 é um operador injectivo (note-se que $L_0(y)e = 0 \Leftrightarrow y \circ e = 0 \Leftrightarrow y = 0$), para demonstrar que o conjunto S é um sistema de idempotentes ortogonais completo vamos provar que

(2.1.1) os elementos de S são idempotentes, i.e.,

$$\forall i \in \{1, \ldots, k\} \;\; c_i^2 = c_i,$$

(2.1.2) os elementos de S são ortogonais, i.e.,

$$\forall i \neq j \;\; c_i \circ c_j = 0,$$

(2.1.3) e $\sum_{j=1}^{k} c_j = \mathbf{e}$.

Seguem-se as demonstrações de cada uma destas afirmações.

(2.1.1) Dado que $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$

$$\begin{aligned} L_0(c_i^2) &= L_0(c_i \circ c_i) \\ &= L_0(c_i)L_0(c_i) \\ &= P_i^2 \\ &= P_i \\ &= L_0(c_i), \end{aligned}$$

pela injectividade de L_0, conclui-se que $\forall i \in \{1, \ldots, k\} \;\; c_i^2 = c_i$.

(2.1.2) Supondo $c_i = \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i$ e $c_j = \sum_{i=0}^{k-1} b_i x^i$, com $i \neq j$, vem que

$$c_i \circ c_j = \sum_{l=0}^{2k-2} \Big(\sum_{k_1+k_2=l, k_1,k_2 \in N_0} (a_{k_1} b_{k_2}) x^l \Big)$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned} L_0(c_i \circ c_j) &= L_0\Big(\Big(\sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i\Big)\Big(\sum_{i=0}^{k-1} b_i x^i\Big)\Big) \\ &= L_0\Big(\sum_{i=0}^{2k-2} \sum_{k_1+k_2=i, k_1,k_2 \in N_0} (a_{k_1} b_{k_2}) x^i\Big) \\ &= \sum_{i=0}^{2k-2} \sum_{k_1+k_2=i, k_1,k_2 \in N_0} (a_{k_1} b_{k_2}) L_0(x^i) \\ &= \sum_{i=0}^{2k-2} \sum_{k_1+k_2=i, k_1,k_2 \in N_0} (a_{k_1} b_{k_2}) (L_0(x))^i \\ &= \Big(\sum_{i=0}^{k-1} a_i (L_0(x))^i\Big)\Big(\sum_{i=0}^{k-1} b_i (L_0(x))^i\Big)\Big) \\ &= \Big(\sum_{i=0}^{k-1} a_i L_0(x^i)\Big)\Big(\sum_{i=0}^{k-1} b_i L_0(x^i)\Big)\Big) \\ &= L_0\Big(\sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i\Big) L_0\Big(\sum_{i=0}^{k-1} b_i x^i\Big)\Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= L_0(c_i)L_0(c_j) \\ &= p_i(L_0(x))p_j(L_0(x)) \\ &= P_iP_j \\ &= 0. \end{aligned}$$

Tal como anteriormente, tendo em conta a injectividade de L_0, vem que $\forall i \neq j \ \ c_i \circ c_j = 0$.

(2.1.3) Dado que

$$\begin{aligned} L_0(\sum_{j=1}^{k} c_j) &= \sum_{j=1}^{k} L_0(c_j) \\ &= \sum_{j=1}^{k} p_j(L_0(x)) \\ &= \sum_{j=1}^{k} P_j \\ &= I \\ &= L_0(\mathbf{e}), \end{aligned}$$

mais uma vez, pela injectividade de L_0, conclui-se que $\sum_{j=1}^{k} c_j = \mathbf{e}$.

(2.2) Para se provar que $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c_i$, basta mostrar que $L_0(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i c_i) = L_0(x)$, o que decorre, de modo imediato, de

$$\begin{aligned} L_0(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i c_i) &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i L_0(c_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i(L_0(x)) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i \\ &= L_0(x). \end{aligned}$$

(2.3) Finalmente, resta provar a unicidade da decomposição de x em

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c_i.$$

Suponhamos que

$$x = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j d_j, \tag{11}$$

com os α_js (para $j = 1, \ldots, l$) todos distintos e que $\{d_1, d_2, \ldots, d_l\}$ é um sistema de idempotentes ortogonais completo. Mas então, para qualquer polinómio $p \in I\!R[X]$, vem que

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{i=0}^{k} a_i x^i \\ &= \sum_{i=0}^{k} a_i (\sum_{j=1}^{l} \alpha_j d_j)^i \\ &= \sum_{i=0}^{k} a_i (\sum_{j=1}^{l} \alpha_j^i d_j) \\ &= \sum_{j=1}^{l} (\sum_{i=0}^{k} a_i \alpha_j^i) d_j \\ &= \sum_{j=0}^{l} p(\alpha_j) d_j. \end{aligned}$$

Para $j = 1, \ldots, l$, definindo

$$p_j(X) = \Pi_{i \neq j}(X - \alpha_i),$$

onbtém-se

$$p_j(x) = \Pi_{i \neq j}(\alpha_j - \alpha_i) d_j.$$

Mas então, uma vez que os α_is são todos distintos,

$$d_j = \frac{p_j(x)}{\Pi_{i \neq j}(\alpha_j - \alpha_i)} \in I\!R[x]$$

e, dado que $x = \sum_{i=1}^{l} \alpha_j d_j$, então

$$L_0(x) = \sum_{i=0}^{l} \alpha_i L_0(d_i).$$

Por outro lado, como $\{d_1, d_2, \ldots, d_l\}$ é um sistema de idempotentes ortogonais completo, então $\mathbf{e} = \sum_{i=1}^{l} d_i$ e, consequentemente,

$$I = \sum_{i=1}^{l} L_0(d_i)$$

Uma vez que $d_i \circ d_j = 0$, então

$$\begin{aligned} L_0(d_i)L_0(d_j) = L_0(d_i \circ d_j) &= L_0(0) \\ &= 0 \\ L_0^2(d_i) &= L_0(d_i)L_0(d_i) \\ &= L_0(d_i^2) \\ &= L_0(d_i). \end{aligned}$$

Logo, os α_i são os valores próprios de $L_0(x)$, pois $L_0(d_j), j = 1, \ldots, l$ são projeções mutuamente ortogonais tais que $L_0(x) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i L_0(d_i)$ e $\sum_{i=1}^{l} L_0(d_i) = I$. Mas então os d_js ficam determinados de uma maneira única, pois

$$\begin{aligned} d_j &= L_0(d_j)e \\ &= d_j \circ e \\ &= d_j \end{aligned}$$

e, por conseguinte, cada d_j é a projeção ortogonal de **e** no subespaço próprio de $L_0(x)$ associado ao valor próprio α_j. Assim realmente a decomposição em (11) é única.

■

Convém observar que os λ_is, referidos neste teorema, não são mais que as raizes distintas do polinómio característico de x. A prova desta afirmação decorre, directamente, do resultado que se segue.

TEOREMA 4.3. *Se V é uma álgebra de Jordan euclidiana com característica r e elemento unidade* **e***, então, para cada $x \in V$, existe um sistema de Jordan $\{c_1, c_2, \ldots, c_r\}$ e existem números reais $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ tais que*

$$x = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j c_j.$$

Os λ_is, juntamente com as suas multiplicidades, são univocamente determinados por x. Adicionalmente, verifica-se que

$$\begin{aligned} \det(x) &= \Pi_{j=1}^{r} \lambda_j \\ tr(x) &= \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \\ a_k(x) &= \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le r} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \ldots \lambda_{i_k}, \end{aligned}$$

onde os coeficiente $a_k(x)$ $(1 \le k \le r)$ são os coeficientes do polinómio característico de x.

Demonstração. Pelo teorema 4.2, se $x \in V$, então

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c_i,$$

onde $\{c_1, \ldots, c_k\}$ constitui um sistema de idempotentes ortogonais completo, e, para $p \in I\!R(X)$,

$$p(x) = \sum_{i=1}^{k} p(\lambda_i) c_i.$$

Consequentemente, o polinómio característico de x vem dado por

$$p(x,\lambda) \ = \ \Pi_{i=1}^{k}(\lambda-\lambda_i).$$

Com efeito, todo o polinómio que se anule em x tem de ter, necessariamente, os λ_is como raizes e, como o polinómio mónico de menor grau que admite os λ_i, para $i=1,\ldots,k$, como raizes é o polinómio

$$\Pi_{i=1}^{k}(\lambda-\lambda_i),$$

conclui-se que este polinómio coincide com o polinómio característico de x (que é o polinómio mónico de menor grau que se anula em x).
Como estamos a supor que V é uma álgebra de Jordan euclidiana com característica r, conclui-se que $k \leq r$, com $k=r$ quando x é regular [6]. Porém, quando x é regular os idempotentes c_i, para $i=1,\ldots,r$, são primitivos [7]. Adicionalmente, no caso de x ser regular, então x é combinação linear de idempotentes primitivos, i.e.,

$$x \ = \ \sum_{i=1}^{r}\lambda_i c_i$$

onde $\{c_1,c_2,\ldots,c_r\}$ é um sistema de Jordan e os λ_is são todos distintos [8]. Como consequência, os coeficientes do polinómio mínimo de x, quando x é regular, determinam-se facilmente, uma vez que o polinómio mínimo de x é $p(x,\lambda)=\Pi_{i=1}^{r}(\lambda-\lambda_i)$.
Analisemos agora o caso em que x não é regular.
Seja x um elemento não regular de V. Como o conjunto de elementos regulares é denso em V, existe uma sucessão $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos regulares de V tendendo para x. Então, para cada elemento desta sucessão, x^n, existe um sistema de Jordan $\{c_1^n,\ldots,c_r^n\}$ e existem escalares $\lambda_1^n,\ldots,\lambda_r^n$, todos distintos tais que

$$x^n \ = \ \sum_{i=1}^{r}\lambda_i^n c_i^n$$

e verifica-se que

$$\begin{aligned}
\det(x^n) \ &= \ \Pi_{j=1}^{r}\lambda_j^n \\
\mathrm{tr}(x^n) \ &= \ \sum_{j=1}^{r}\lambda_j^n \\
a_k(x^n) \ &= \ \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq r}\lambda_{i_1}^n\lambda_{i_2}^n\ldots\lambda_{i_k}^n.
\end{aligned}$$

[6] Com efeito, nestas circunstâncias, o polinómio característico de x tem de ter grau r.

[7] Caso os idempotentes não fossem primitivos, seria possível construir um sistema de Jordan com mais do que r elementos, o que nos permitiria exibir elementos da álgebra de Jordan euclidiana com característica maior que r o que é contraditório.

[8] Caso existam dois λ_is iguais, associando convenientemente os respectivos idempotentes, x vem como combinação linear de menos do que r idempotentes ortogonais, o que implica a existência de um polinómio de grau inferior a r que se anula em x, contrariando a definição de elemento regular.

Por outro lado, como $\mathbf{e} = c_1^n + c_2^n + \ldots + c_r^n$, determinando os produtos internos $< c_i^n, \mathbf{e} >$, para $i = 1, \ldots, r$, obtém-se

$$< c_i^n, e >=< c_i^n, c_i^n > \quad \forall i \in \{1, \ldots, r\}.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy–Schwartz vem

$$\begin{aligned} ||c_i^n||||e|| &\geq | < c_i^n|e > | \\ &\geq < c_i^n|c_i^n > \\ &= ||c_i^n||^2, \end{aligned}$$

donde decorre que

$$\begin{aligned} ||c_i^n||||e|| &\geq ||c_i^n||||c_i^n|| \\ &\Updownarrow \\ ||e|| &\geq ||c_i^n||. \end{aligned}$$

Assim, conclui-se que a sucessão $\{c_i^n\}_{n\in N}$ é uma sucessão limitada e todos os seus termos pertencem à bola fechada $\overline{B(0, ||e||)}$. Consequentemente, $\{c_i^n\}_{n\in N}$ admite uma subsucessão convergente para $x \in \overline{B(0, ||e||)}$.
Analisando, agora, a sucessão $\{\lambda_i^n\}_{n\in N}$, uma vez que $x^n \to x$, existe $p \in I\!N$ tal que para $\forall n > p$ $||x^n - x|| \leq 1$. Mas então, para $n > p$

$$\begin{aligned} ||x_n|| &= ||x_n - x + x|| \\ &\leq ||x_n - x|| + ||x|| \\ &\leq 1 + ||x||. \end{aligned}$$

Por outro lado, tendo em conta que $x^n = \sum_{i=1}^r \lambda_i^n c_i^n$, vem que

$$\begin{aligned} x^n \circ c_i^n &= \sum_{j=1}^r \lambda_j^n c_j^n \circ c_i^n \\ &= \lambda_i^n (c_i^n \circ c_i^n), \end{aligned}$$

e, consequentemente, que

$$\begin{aligned} ||x^n \circ c_i^n|| &= ||\lambda_i^n c_i^n \circ c_i^n|| \\ &= |\lambda_i^n|.||c_i^n||. \end{aligned}$$

Tendo em conta que nas álgebras de Jordan euclidianas o operador $L(x)$ é um operador contínuo de V em V, pelo que $\exists M > 0$ tal que

$$||x^n \circ c_i^n|| \leq M||x^n||.||c_i^n||,$$

para $n > p$, conclui-se que

$$|\lambda_i^n|.||c_i^n|| \leq M(1 + ||x||)||c_i^n|| \Leftrightarrow |\lambda_i^n| \leq M(1 + ||x||),$$

o que implica que a sucessão $\{\lambda_i^n\}_{n\in I\!N}$ tenha uma subsucessão convergente. Logo, sem perda de generalidade, podemos concluir que existe uma subsucessão de índices,

definida no conjunto $N_1 \subseteq I\!N$, tal que $\{\lambda_1^n\}_{n\in N_1}$ e $\{c_1^n\}_{n\in N_1}$ são sucessões convergentes para λ_1 e c_1, respectivamente. De igual modo se conclui que existe uma subsucessão de índices, definida no conjunto $N_2 \subseteq N_1$, tal que $\{\lambda_2^n\}_{n\in N_2}$ e $\{c_2^n\}_{n\in N_2}$ são sucessões convergentes para λ_2 e c_2, respectivamente. Admitindo $r \geq 3$, procedendo tal como anteriormente para $j = 3, \ldots, r$, conclui-se que existe um subsucessão de índices, definida no conjunto $N_j \subseteq N_{j-1}$, tal que $\{\lambda_j^n\}_{n\in N_j}$ e $\{c_j^n\}_{n\in N_j}$ são sucessões convergentes para λ_j e c_j, respectivamente. Como consequência, podemos concluir que a sucessão de decomposições espectrais $\{x^n\}_{n\in N_r} = \{\sum_{i=1}^r \lambda_i^n c_i^n\}_{n\in N_r}$, converge para a decomposição espectral $\sum_{i=1}^r \lambda_i c_i = x$.
Tendo em conta que

$$\begin{aligned}
\det(x^n) &= \Pi_{j=1}^r \lambda_j^n, \\
\operatorname{tr}(x^n) &= \sum_{j=1}^r \lambda_j^n, \\
a_j(x^n) &= \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_j\leq r} \lambda_{i_1}^n \lambda_{i_2}^n \ldots \lambda_{i_j}^n \quad \forall j \in \{2, \ldots, r-1\},
\end{aligned}$$

conclui-se que

$$\begin{aligned}
\lim_{N_r \ni n\to\infty} \det(x^n) &= \lim_{N_r \ni n\to\infty} \Pi_{j=1}^r \lambda_j^n \\
\lim_{N_r \ni n\to\infty} \operatorname{tr}(x^n) &= \lim_{N_r \ni n\to\infty} \sum_{j=1}^r \lambda_j^n \\
\lim_{N_r \ni n\to\infty} a_j(x^n) &= \lim_{N_r \ni n\to\infty} \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_j\leq r} \lambda_{i_1}^n \lambda_{i_2}^n \ldots \lambda_{i_j}^n \quad \forall j \in \{2, \ldots, r-1\},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\det(\lim_{N_r \ni n\to\infty} x^n) &= \Pi_{j=1}^r \lim_{N_r \ni n\to\infty} \lambda_j^n \\
\operatorname{tr}(\lim_{N_r \ni n\to\infty} x^n) &= \sum_{j=1}^r \lim_{N_r \ni n\to\infty} \lambda_j^n \\
a_j(\lim_{N_r \ni n\to\infty} x^n) &= \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_j\leq r} \lim_{N_r \ni n\to\infty} \lambda_{i_1}^n \lambda_{i_2}^n \ldots \lambda_{i_j}^n \quad \forall j \in \{2, \ldots, r-1\},
\end{aligned}$$

Logo, vem que

$$\begin{aligned}
\det(x) &= \Pi_{j=1}^r \lambda_j \\
\operatorname{tr}(x) &= \sum_{j=1}^r \lambda_j \\
a_j(x) &= \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_j\leq r} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \ldots \lambda_{i_j} \quad \forall j \in \{2, \ldots, r-1\}.
\end{aligned}$$

Finalmente, segue-se a prova de que o conjunto $\{c_1, \ldots, c_r\}$ constitui um sistema de Jordan, i.e., que os seus elementos (i) são ortogonais, (ii) idempotentes (iii) a sua soma é igual à unidade da álgebra e (iv) são primitivos.

(i) Uma vez que $\forall n \in N_r \ \ \forall i \neq j \ \ < c_i^n, c_j^n >= 0$, conclui-se que $\forall i \neq j$

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{N_r \ni n \to \infty} < c_i^n, c_j^n > \\ &= < \lim_{N_r \ni n \to \infty} c_i^n, \lim_{N_r \ni n \to \infty} c_j^n > \\ &= < c_i, c_j > . \end{aligned}$$

(ii) Tendo em conta que $\forall n \in N_r \ \ \forall i \in \{1, \ldots, r\} \ \ (c_i^n)^2 = c_i^n$ então

$$\begin{aligned} c_i^2 &= \lim_{N_r \ni n \to \infty} (c_i^n)^2 \\ &= \lim_{N_r \ni n \to \infty} c_i^n \\ &= c_i. \end{aligned}$$

(iii) Dado que $\forall n \in N_r \ \ e = \sum_{i=1}^r c_i^n$, vem que

$$\begin{aligned} e &= \lim_{N_r \ni n \to \infty} (\sum_{i=1}^r c_i^n) \\ &= \sum_{i=1}^r \lim_{N_r \ni n \to \infty} c_i^n \\ &= \sum_{i=1}^r c_i. \end{aligned}$$

(iv) A prova que os idempotentes $\{c_1, \ldots, c_r\}$ são idempotentes primitivos decorre, de modo imediato, do facto da álgebra ter característica r.

■

Uma das consequências deste teorema é que as raizes do polinómio

$$p(x, \lambda) = \lambda^r - a_1(x)\lambda^{r-1} + \ldots + (-1)^r a_r(x).$$

são os números reais $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$.

Note-se que quer no teorema 4.2, quer no teorema 4.3, os λ_is não são mais do que as raízes do polinómio caracteristico $p(x, \lambda)$. Porém, no teorema 4.3 entramos com as multiplicidades das raízes de $p(x, \lambda)$, enquanto no teorema 4.2 os λ_is são as raízes distintas de $p(x, \lambda)$.

Uma propriedade fundamental de uma álgebra de Jordan euclidianas, V, consiste em que qualquer sistema de Jordan, S, tem o mesmo número de elementos. O teorema que se segue estabelece, precisamente, este resultado.

TEOREMA 4.4. *Seja V uma álgebra de Jordan euclidiana com característica r. Se $\{c_1, c_2, \ldots, c_t\}$ é um sistema de Jordan de V, então $t = r$.*

Demonstração. Seja V uma álgebra de Jordan euclidiana com característica r e $\{c_1, c_2, \ldots, c_t\}$ um sistema de Jordan de V. É evidente que t é não superior a r. Caso

contrário, existiriam elementos com polinómio minimo de grau superior a r, [9] o que é absurdo, concluindo-se assim, que $t \leq r$.
Provemos agora que t não pode ser inferior a r. Para tal, suponhamos que $t < r$ e seja $x \in V$ tal que

$$x \;=\; \sum_{i=1}^{t} \lambda_i c_i,$$

com os λ_is todos distintos. Então, pelo teorema 4.3, existem escalares α_i, para $i = 1, \ldots, r$, e um sistema de Jordan $\{d_1, d_2, \ldots d_r\}$, tais que

$$x = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i d_i.$$

Logo, pelo teorema 4.2, uma vez que $\{d_1, d_2, \ldots, d_r\}$ é um sistema de idempotentes ortogonais completo, o número de α s distintos é precisamente igual a k e os seus valores devem coincidir com os valores dos λ s. Assim, vem que

$$x \;=\; \sum_{i=1}^{t} \lambda_i c_i,$$

onde cada c_i, para $i = 1, \ldots, t$, é tal que $c_i = \sum_{l=1}^{K_i} d_{i_l}$. Mas então, existe pelo menos um somatório, $\sum_{l=1}^{K_i} d_{i_l}$, com mais do que um elemento, pelo facto de se ter $t < r$. Sendo este somatório, por exemplo $\sum_{l=1}^{K_j} d_{j_l}$, então $c_j = \sum_{l=1}^{K_j} d_{j_l}$, o que é absurdo, uma vez que por hipótese c_j é um idempotente primitivo. O absurdo resultou de ter suposto que o sistema de Jordan $\{c_1, c_2, \ldots, c_t\}$ tinha um número de elementos, t, inferior a r.
Tendo conta que já haviamos concluido a desigualdade $t \leq r$, fica completa a prova de que $t = r$. ■

Uma das questões que se podem colocar sobre as álgebras de Jordan euclidianas, consiste em saber se, dado um idempotente primitivo $\mathbf{c}$, é possível construir um sistema de Jordan que o inclua, e a resposta a esta questão é afirmativa. Porém, antes de a provarmos, torna-se necessário introduzir o resultado que o teorema a seguir estabelece.

TEOREMA 4.5. *Seja V uma álgebra de Jordan euclidiana com elemento unidade $\boldsymbol{e}$ e seja $\mathbf{c}$ um seu idempotente não trivial. Então $V(c, 1)$ [10] tem dimensão um se e só se $\mathbf{c}$ é um idempotente primitivo de V.*

Demonstração. Seja $\mathbf{c}$ um idempotente não trivial de V.

[9] Note-se que se $t > r$, sendo $y = \sum_{i=1}^{t}(\frac{1}{i} c_i)$, o polinómio mínimo de y vem dado por $p(y, \lambda) = \Pi_{i=1}^{t}(\lambda - \frac{1}{i})$. Tal implica que a característica de y seja $t > r$, o que constitui uma contradição, uma vez que V tem caracteríıstica r.
[10] Note-se que $V(c, 1) = \{x \in V : L(c)x = x\}$.

($\Leftarrow$) Supondo que $\dim(V(c,1)) > 1$, uma vez que $V(c,1)$ é uma subálgebra de V, (Faraut and Korányi, 1994), cujo elemento unidade é c, e como $\dim(V(c,1)) > 1$ implica a existência de $x \in V(c,1)$ tal que $\{c, x\}$ é um conjunto linearmente independente, então a característica de $V(c,1)$ é $r_1 > 1$. Logo existe um sistema de idempotentes $\{c_1, \ldots, c_{r_1}\}$ de $(V(c,1)$ tal que

$$c = \sum_{i=1}^{r_1} c_i,$$

pelo que c não é um idempotente primitivo.
Deste modo provou-se que se **c** é um idempotente primitivo então

$$\dim(V(c,1)) = 1.$$

($\Rightarrow$) Reciprocamente, suponha-se que $\dim(V(c,1)) = 1$ (pelo que a característica de $V(c,1)$ é $r_1 = 1$) e admita-se que **c** não é primitivo. Então existem dois idempotentes não nulos, $d_1, d_2 \in V$, tais que $c = d_1 + d_2$ e $d_1 \circ d_2 = 0$, verificando-se que $(d_1 + d_2) \circ d_1 = d_1$ e $(d_1 + d_2) \circ d_2 = d_2$, ou seja, que $d_1, d_2 \in V(c,1)$. Uma vez que $d_1 \circ d_2 = 0$, então d_1 e d_2 são ortogonais em relação ao produto interno da álgebra euclidiana V. Consequentemente, estes vectores (d_1 e d_2) são linearmente independentes, o que contraria a hipótese de se ter $\dim(V(c,1)) = 1$. Esta contradição decorre de se ter admitido que **c** não seria primitivo.

∎

Estamos agora em condições de demonstrar o seguinte resultado.

TEOREMA 4.6. *Seja V uma álgebra de Jordan euclidiana com característica r e* **c** *um idempotente primitivo de V. Então a subálgebra $V(c,0)$* [11] *de V tem característica $r-1$.*

[11] Note-se que $V(c,0) = \{x \in V : L(c)x = 0\}$

Demonstração. Tendo em conta que $V(c,0)$ é uma subálgebra de V, (Faraut and Korányi, 1994), suponhamos que a sua característica é $k \neq r-1$ e seja $S = \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ um sistema de Jordan de $V(c,0)$.
Uma vez que $V(c,0) \circ V(c,1) = \{0\}$, $c \in V(c,1)$ e $\mathbf{e} - \mathbf{c}$ é o elemento unidade de $V(c,0)$, [12] então $S_1 = \{c, c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ é um sistema de jordan de V. Com efeito, todos os elementos de S_1 são idempotentes primitivos e é evidente que qualquer dois destes idempotentes distintos são ortogonais. [13] Por outro lado, como $e - c$ é o elemento unidade de $V(c,0)$ e $\{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ é um sistema de Jordan de $V(c,0)$, conclui-se que $e - c = \sum_{i=1}^{k} c_i$ e, por conseguinte, que $e = c + (e - c) = c + \sum_{i=1}^{k} c_i$. Assim, prova-se que S_1 é um sistema de Jordan de V com um número de elementos diferente de r, o que é absurdo, uma vez que, por hipótese, V é uma álgebra de Jordan euclidiana com característica r e, pelo teorema 4.4, todo o sistema de Jordan de V tem r elementos.
$\blacksquare$

Como consequência imediata dos teoremas 4.5 e 4.6 decorre que, se V é uma álgebra de Jordan euclidiana com característica r e $\exists \mathbf{c} \in V$ tal que $\mathbf{c}$ é um idempotente primitivo, então $r + \dim(V(c, \frac{1}{2})) \leq \dim(V)$.

TEOREMA 4.7. *Se V é uma álgebra de Jordan euclidiana com característica r e $\mathbf{c}$ é um idempotente primitivo de V, então $tr(c) = 1$.*

Demonstração. Pelo teorema 4.6, $V(c,0)$ tem característica $r-1$, pelo que, sendo S_0 um sistema de Jordan de $V(c,0)$, $S_0 = \{c_1, c_2, \ldots, c_{r-1}\}$. Então $S = \{c, c_1, \ldots, c_{r-1}\}$ é um sistema de Jordan de V e, considerando a sucessão de elementos regulares de V, $\{x^n\}_{n>1, n \in N}$, definida por

$$x^n \;=\; c + \frac{1}{n} c_1 + \frac{1}{n+1} c_2 + \ldots + \frac{1}{n+r-2} c_{r-1},$$

vem que $p(x^n, \lambda) = (\lambda - 1)\Pi_{i=1}^{r-1}(\lambda - \frac{1}{n+i-1})$, ou seja,

$$p(x^n, \lambda) = \lambda^r - (1 + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{1}{n+i-1})\lambda^{r-1} + \c{d}ots + (-1)^r \Pi_{i=1}^{r-1} \frac{1}{n+i-1}.$$

Mas então $\mathrm{tr}(c) = a_1(c) = \lim_{n \to \infty}(1 + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{1}{n+i-1}) = 1$. $\blacksquare$

Deste teorema decorre imediatamente que $\mathrm{tr}(e) = r$.

---

[12]

$$\begin{aligned} (e-c) \circ x &= e \circ x - c \circ x \\ &= x - L(c)x \\ &= x - 0 \\ &= x \;\; \forall x \in V(c,0) \end{aligned}$$

[13] Note-se que $c \in V(c,1)$, $c_i \in V(c,0)$ para $i = 1, \ldots r-1$ e $V(c,1) \circ V(c,0) = \{0\}$ (podendo consultar-se a demonstração desta última igualdade em (Faraut and Korányi, 1994), página 63.

4.2. Algebras de Jordan euclidianas irredutíveis e redutíveis

DEFINIÇÃO 4.6. *Uma álgebra de Jordan euclidiana diz-se irredutível se não contiver nenhum ideal não trivial.*

É de grande utilidade poder contar-se com um critério que permita verificar se uma dada álgebra de Jordan euclidiana é ou não irredutível. O próximo teorema fornece-nos um tal critério.

TEOREMA 4.8. *Uma álgebra de Jordan euclidiana, V, é irredutível se e só se $V(c, \frac{1}{2}) \neq \{0\}$, para todo idempotente não trivial $c \in V$.*

Demonstração. Ver (Faraut and Korányi, 1994). ∎

Este resultado permite-nos concluir que as álgebras de Jordan euclidianas irredutíveis cujo conjunto dos idempotentes primitivos não triviais é não vazio, têm, necessariamente, característica inferior à sua dimensão. Como exemplo de aplicação desta conclusão, uma vez que $(1, 0, \ldots, 0)$ é um idempotente primitivo não trivial, para a álgebra de Jordan euclidiana $I\!R^n$ e a característica desta álgebra é igual à sua dimensão, podemos concluir que se trata de uma álgebra de Jordan euclidiana redutível (i. e., não é irredutível).

Para $i \in \{1, \ldots, n\}$, a subálgebra de V, $V_i = \{(0, 0, \ldots, x_i, \ldots, 0) : x_i \in I\!R\}$, com a operação

$$(0, 0, \ldots, x_i, \ldots, 0) \circ (0, 0, \ldots, y_i, \ldots, 0) = (0, 0, \ldots, x_i y_i, \ldots, 0)$$

é uma álgebra de Jordan euclidiana irredutível, cujo elemento unidade é

$$(0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0).$$

Com efeito, uma vez que os únicos idempotentes de V_i são os idempotentes triviais $(0, 0, \ldots, 0, \ldots, 0)$ e $(0, 0, \cdots, 1, \ldots, 0)$, podemos afirmar que não existe nenhum idempotente não trivial tal que $V_i(c, \frac{1}{2}) = \{0\}$, ou seja, podemos afirmar que V_i é uma álgebra de Jordan euclidiana irredutível.

Deve observar-se ainda que a álgebra de Jordan euclidiana, $V = I\!R^n$, é soma directa das subálgebras de Jordan euclidianas irredutíveis, V_i, para $i = 1, \ldots, n$, i. e.,

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_n.$$

Verifica-se ainda que estas álgebras de Jordan euclidianas, V_i, são ideais de V, pelo que são duas a duas ortogonais [14], i. e., $V_i \circ V_j = 0 \;\; \forall i \neq j$.

Esta propriedade da álgebra de Jordan euclidiana, $V = I\!R^n$, é partilhada por qualquer álgebra de Jordan euclidiana não irredutível, conforme estabelece o teorema a seguir.

[14] Note-se que $\forall i \neq j$, uma vez que V_i e V_j são ideais de V, tem-se que $V_i \circ V_j \subseteq V_j$ e $V_j \circ V_i \subseteq V_i$. Logo $V_i \circ V_j \subseteq V_i \cap V_j = \{0\}$.

TEOREMA 4.9. *Se V é uma álgebra de Jordan euclidiana, então V é de um modo único a soma directa de l subálgebras de Jordan euclidianas irredutíveis V_i de V que são ideais de V.*

Demonstração. Ver (Faraut and Korányi, 1994). ■

Considere-se, novamente, a álgebra de Jordan euclidiana $V = \mathbb{R}^n$, seja $i \in \{1, \ldots, n\}$ e V_i a subálgebra euclidiana irredutível de V. Então o conjunto $\{(0, \ldots, 1, \ldots, 0), (0, 0, \ldots, x_i, \ldots, 0)\}$ é linearmente dependente $\forall x_i \in \mathbb{R}$ e, consequentemente, $\mathrm{rank}(V_i) = 1$.
Se $(0, \ldots, x_i, \ldots, 0)$ é um elemento regular de V_i, então

$$p((0, \ldots, x_i, \ldots, 0), \lambda) = \lambda - x_i.$$

e, consequentemente,

$$\det(0, \ldots, x_i, \ldots, 0) = x_i$$

e

$$\mathrm{tr}(0, \ldots, x_i, \ldots, 0) = x_i.$$

Adicionalmente, verifica-se que

$$\begin{aligned} p((x_1, x_2, \ldots, x_n), \lambda) &= p((x_1, 0, \ldots, 0), \lambda) \ldots p((0, \ldots, x_n), \lambda), \\ \det(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \det(x_1, 0, \ldots, 0) \det(0, x_2, \ldots, 0) \ldots \det(0, 0, \ldots, x_n), \\ \mathrm{tr}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \mathrm{tr}(x_1, 0, \ldots, 0) + \mathrm{tr}(0, x_2, \ldots, 0) + \cdots + \mathrm{tr}(0, 0, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

O teorema a seguir estende estas propriedades associadas à álgebra de Jordan euclidiana, $\mathbb{R}^n$, a todas as álgebras de Jordan euclidianas redutíveis.

TEOREMA 4.10. *Seja V uma álgebra de Jordan euclidiana com característica r e suponhamos que*

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_l,$$

onde cada V_i, para $i = 1, \ldots, l$, com $l \geq 2$, é uma subálgebra de Jordan euclidiana irredutível de V que é um ideal de V [15]. *Se $x \in V$, então*

(a) $V_i \circ V_j = 0 \ \forall i \neq j$.

(b) $rank(V) = \sum_{i=1}^{l} rank(V_i)$.

(c) $p(x, \lambda) = p(x_1, \lambda) p(x_2, \lambda) \ldots p(x_l, \lambda)$.

(d) $tr(x) = \sum_{i=1}^{l} tr(x_i)$.

(e) $\det(x) = \Pi_{i=1}^{l} \det(x_i)$.

[15] Deve observar-se que, de acordo com o teorema 4.9, qualquer que seja a álgebra de Jordan euclidiana redutível, estas hipóteses verificam-se.

Demonstração. As provas dos itens $(b)-(e)$, serão feitas apenas no caso em que V se decompõe como soma de duas álgebras de Jordan euclidianas irredutíveis, que são ideais de V, uma vez que, no caso geral, a prova é análoga.

(a) O item (a) decorre imediatamente de se verificar que $i \neq j \Rightarrow V_i \circ V_j \subset V_i \cap V_j = \{0\}$.

(b) Suponhamos que $V = V_1 \oplus V_2$, que $V_1 \circ V_2 = 0$, que a característica de V_1 é r_1 e que a característica de V_2 é r_2.
Esta prova pode fazer-se demonstrando que se S_1 é um sistema de Jordan de V_1 e S_2 é um sistema de Jordan de V_2, então $S_1 \cup S_2$ é um sistema de Jordan de V.
Sejam $S_1 = \{c_1, c_2, \dots, c_{r_1}\}$ e $S_2 = \{d_1, d_2, \dots, d_{r_2}\}$ sistemas de Jordan de V_1 e V_2, respectivamente. Provemos então que

$$S = \{c_1, c_2, \dots, c_{r_1}, d_1, d_2, \dots, d_{r_2}\}$$

é um sistema de Jordan de V, pelo que $r_1 + r_2 = r$ [16].
Uma vez que é evidente que os elementos de S são idempotentes primitivos ortogonais [17] de V, resta provar que

$$\sum_{i=1}^{r_1} c_i + \sum_{i=1}^{r_2} d_i = \mathbf{e},$$

onde $\mathbf{e}$ é o elemento unidade de V.
Como $V = V_1 \oplus V_2$, então $e = e_1 + e_2$, onde e_1 e e_2 são as unidades das álgebras de Jordan V_1 e V_2 [18] e verifica-se que

$$\begin{aligned} e &= e_1 + e_2 \\ &= (c_1 + c_2 + \dots + c_{r_1}) + (d_1 + d_2 + \dots + d_{r_2}) \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\{c_1, c_2, \dots, c_{r_1}, d_1, d_2, \dots, d_{r_2}\}$$

é um sistema de Jordan de V, pelo que $\operatorname{rank}(V) = r_1 + r_2 = \operatorname{rank}(V_1) + \operatorname{rank}(V_2)$, o que completa a prova de (2) para $l = 2$.

---

[16] Note-se que os sistemas de Jordan, numa álgebra de Jordan euclidiana irredutível, têm todos o mesmo número de elementos.

[17] Observe-se que $V_1 \circ V_2 = \{0\}$.

[18] Com efeito, se $x_1 \in V_1$ e $x_2 \in V_2$, então

$$(x_1 + x_2) \circ (e_1 + e_2) = x_1 \circ e_1 + x_2 \circ e_2.$$

Por outro lado, como

$$(x_1 + x_2) \circ (e_1 + e_2) = x_1 + x_2$$

então

$$x_1 + x_2 = x_1 \circ e_1 + x_2 \circ e_2.$$

Logo

$$x_1 = x_1 \circ e_1 \wedge x_2 = x_2 \circ e_2.$$

Ou seja, e_1 e e_2 são os elementos unidade de V_1 e V_2, respectivamente.

(c) Se $x \in V$, então sabe-se que $x = x_1 + x_2$, com $x_1 \in V_1$ e $x_2 \in V_2$. Logo, tudo se resume a provar a igualdade $p(x,\lambda) = p(x_1,\lambda)p(x_2,\lambda)$, no caso em que (c-1) x é regular e no caso em que (c-2) x não é regular.

(c-1) Sendo x um elemento regular de V, como $V = V_1 \oplus V_2$, então $x = x_1 + x_2$, com $x_1 \in V_1$ e $x_2 \in V_2$. Consequentemente, x_1 e x_2 são elementos regulares de V_1 e V_2, respectivamente.
Com efeito, uma vez que V_1 e V_2 são álgebras de Jordan euclidianas, vem que

$$x_1 = \sum_{i=1}^{r_1} \lambda_i c_i \ \wedge \ x_2 = \sum_{j=r_1+1}^{r_1+r_2} \lambda_j d_{j-r_1},$$

onde $\{c_1, c_2, \ldots, c_{r_1}\}$ e $\{d_1, d_2, \ldots, d_{r_2}\}$ são sistemas de Jordan de V_1 e V_2, respectivamente. Por outro lado, como

$$S = \{c_1, \ldots, c_{r_1}, d_1, \ldots, d_{r_2}\}$$

é um sistema de Jordan de V, e x é um elemento regular tal que

$$x = \sum_{i=1}^{r_1} \lambda_i c_i + \sum_{j=r_1+1}^{r_1+r_2} \lambda_j d_{j-r_1}$$

Podemos concluir que todos os λ_is são distintos. Mas então, obtêm-se as decomposições

$$x_1 = \sum_{i=1}^{r_1} \lambda_i c_i \text{ e } x_2 = \sum_{j=r_1+1}^{r_1+r_2} \lambda_j d_{j-r_1}$$

onde, tanto para x_1 como para x_2, os escalares são todos distintos, pelo que x_1 e x_2 são elementos regulares de V_1 e V_2, respectivamente.

Assim, uma vez que x, x_1 e x_2 são regulares, conclui-se que os respectivos polinómios característicos vêm dados por

$$\begin{aligned} p(x,\lambda) &= \Pi_{k=1}^{r_1+r_2}(\lambda - \lambda_k) \\ p(x_1,\lambda) &= \Pi_{i=1}^{r_1}(\lambda - \lambda_i) \\ p(x_2,\lambda) &= \Pi_{j=r_1+1}^{r_1+r_2}(\lambda - \lambda_j). \end{aligned}$$

Desta forma, podemos concluir que

$$p(x,\lambda) = p(x_1,\lambda)p(x_2,\lambda). \tag{12}$$

(c-2) Seja x um elemento não regular de V tal que $x = x_1 + x_2$ e considerem-se os polinómios característicos de x, x_1 e x_2, ou seja, $p(x,\lambda)$, $p(x_1,\lambda)$ e $p(x_2,\lambda)$, os quais podemos escrever na forma

$$\begin{aligned} p(x,\lambda) &= \lambda^{r_1+r_2} + \sum_{i=1}^{r_1+r_2} (-1)^i \gamma_i(x) \lambda^{r_1+r_2-i} \\ p(x_1,\lambda) &= \lambda^{r_1} + \sum_{i=1}^{r_1} (-1)^i \alpha_i(x_1) \lambda^{r_1-i} \end{aligned}$$

$$p(x_2, \lambda) \;=\; \lambda^{r_2} + \sum_{i=1}^{r_2} (-1)^i \beta_i(x_2) \lambda^{r_2 - i}.$$

Mas então

$$p(x_1, \lambda) p(x_2, \lambda) \;=\; \lambda^{r_1 + r_2} + \sum_{k=1}^{r_1 + r_2} \mu_k \lambda^{r_1 + r_2 - k}$$

com $\mu_k = \sum_{(i,j) \in E_k} (-1)^{i+j} \alpha_i(x_1) \beta_j(x_2)$ para $k = 1, \ldots r_1 + r_2$, onde

$$E_k = \{(i,j) \in I\!N_0 \times I\!N_0 : i + j = k, \;\; 0 \leq i \leq r_1 \;\;\wedge\;\; 0 \leq j \leq r_2\}$$

e $\alpha_0(x_1) = \beta_0(x_2) = 1$.
Nestas condições, provar que

$$p(x, \lambda) = p(x_1, \lambda) p(x_2, \lambda)$$

é equivalente a mostrar que $\mu_k = (-1)^k \gamma_k(x)$, para $k = 1, \ldots, r_1 + r_2$, ou seja, que

$$(-1)^k \gamma_k(x) = \sum_{(i,j) \in E_k} (-1)^{i+j} \alpha_i(x_1) \beta_j(x_2) \tag{13}$$

para $k = 1, \ldots, r_1 + r_2$.
Deve observar-se que a igualdade (13) é verificada quando x é um elemento regular de V, facto que será utilizado, mais adiante, para a conclusão desta prova.
Seja $\{x^n\}_{n \in I\!N}$ uma sucessão de elementos regulares de V convergindo para x, pelo que $\forall n \in I\!N$

$$x^n \;=\; x_1^n + x_2^n,$$

com $x_1^n \in V_1$ e $x_2^n \in V_2$.
Vamos mostrar que as sucessões $\{x_1^n\}_{n \in I\!N}$ e $\{x_2^n\}_{n \in I\!N}$ são sucessões convergentes em V_1 e V_2, respectivamente.

Considere-se em V o produto interno $.|.$ definido por $x|y = \mathrm{tr}(x \circ y)$ e a norma $||.||$ definida por $||x|| = \sqrt{\mathrm{tr}(x \circ x)}$. Designando-se a norma de V_1 por $||.||_{V_1}$ e a norma de V_2 por $||.||_{V_2}$. Se $y = y_1 + y_2 \in V$, com $y_1 \in V_1$ e $y_2 \in V_2$, dada a ortogonalidade (relativamente à operação da álgebra) existente entre V_1 e V_2 vem que

$$||y|| \;=\; \sqrt{||y_1||_{V_1}^2 + ||y_2||_{V_2}^2}. \tag{14}$$

Uma vez que a sucessão $\{x^n\}_{n \in I\!N}$ é convergente, então é uma sucessão de Cauchy e, tendo em conta a igualdade (14), as sucessões $\{x_1^n\}_{n \in I\!N}$ e $\{x_2^n\}_{n \in I\!N}$ são também sucessões de Cauchy de V_1 e de V_2, respectivamente. Por outro lado, como V_1 e V_2 são subespaços normadas de dimensão finita, então são espaços de Banach e, consequentemente, completos. Logo, as sucessões $\{x_1^n\}_{n\in I\!N}$ e $\{x_2^n\}_{n\in I\!N}$ são sucessões de V_1 e V_2 convergentes, respectivamente, para $x_1 \in V_1$ e $x_2 \in V_2$, pelo que

$$x = \lim_{n\to\infty} x^n = \lim_{n\to\infty}(x_1^n + x_2^n) = \lim_{n\to\infty} x_1^n + \lim_{n\to\infty} x_2^n = x_1 + x_2.$$

Tendo em conta que $\forall n \in I\!N$, x^n, x_1^n e x_2^n são elementos regulares, sabe-se que $p(x^n,\lambda) = p(x_1^n,\lambda)p(x_2^n,\lambda)$ e, consequentemente, que

$$\gamma_k(x^n) \ = \ (-1)^k \sum_{(i,j)\in E_k} (-1)^{i+j}\alpha_i(x_1^n)\beta_j(x_2^n)$$

para $k = 1,\ldots,r_1+r_2$, com $E_k = \{(i,j) \in I\!N_0 \times I\!N_0 : i+j = k, \ \ 0 \le i \le r_1 \ \ \wedge \ \ 0 \le j \le r_2\}$.
Mas então

$$\begin{aligned}
\gamma_k(x) &= \lim_{n\to\infty} \gamma_k(x^n) \\
&= (-1)^k \sum_{(i,j)\in E_k} \lim_{n\to\infty}(-1)^{i+j}\alpha_i(x_1^n)\beta_i(x_2^n) \\
&= (-1)^k \sum_{(i,j)\in E_k} (-1)^{i+j}\alpha_i(\lim_{n\to\infty} x_1^n)\beta_j(\lim_{n\to\infty} x_2^n) \\
&= (-1)^k \sum_{(i,j)\in E_k} (-1)^{i+j}\alpha_i(x_1)\beta_j(x_2),
\end{aligned}$$

para $k = 1,\ldots,r_1+r_2$.
Logo

$$(-1)^k\gamma_k = \mu_k, \ \text{ para } k = 1,\ldots,r_1+r_2,$$

o que permite concluir que

$$p(x,\lambda) \ = \ p(x_1,\lambda)p(x_2,\lambda).$$

(d) Dados os polinómios característicos de $x \in V$, $x_1 \in V_1$ e $x_2 \in V_2$

$$\begin{aligned}
p(x,\lambda) &= \lambda^{r_1+r_2} + \sum_{k=1}^{r_1+r_2} (-1)^k\gamma_k(x)\lambda^{r_1+r_2-k}, \\
p(x_1,\lambda) &= \lambda^{r_1} + \sum_{i=1}^{r_1} (-1)^i\alpha_i(x)\lambda^{r_1-i}, \\
p(x_2,\lambda) &= \lambda^{r_2} + \sum_{j=1}^{r_2} (-1)^j\beta_j(x)\lambda^{r_2-j},
\end{aligned}$$

sabe-se que $tr(x) = \gamma_1(x)$, $tr(x_1) = \alpha_1(x_1)$, e $tr(x_2) = \beta_1(x_2)$. Porém, do item (c) decorre que $\gamma_1(x) = \alpha_1(x_1)+\beta_1(x_2)$, donde se conclui que $tr(x) = tr(x_1)+tr(x_2)$.

(e) De um modo semelhante ao seguido na prova do item (d) se conclui que $\gamma_{r_1+r_2}(x) = \alpha_{r_1}(x_1)\beta_{r_2}(x_2)$ e, consequentemente, que

$$\det(x) = \det(x_1)\det(x_2).$$

■

O facto de uma álgebra de Jordan euclidiana se decompor como soma de álgebras de Jordan euclidianas irredutíveis tem a vantagem de permitir obter resultados sobre álgebras de Jordan redutíveis à custa dos obtidos nas irredutíveis.

Em (Faraut and Korányi, 1994) demostra-se que numa álgebra de Jordan euclidiana irredutível (ou seja, simples) se verifica que

$$\forall x, y \in V \ \ \det(P(x)y) = (\det(x))^2 \det(y),$$

onde $P(x)$ é o operador linear definido por

$$\begin{aligned} P(x) : V &\mapsto V \\ y &\rightsquigarrow P(x)y = (2L^2(x) - L(x^2))y. \end{aligned}$$

O teorema que se segue estende este resultado às álgebras de Jordan euclidianas redutíveis.

TEOREMA 4.11. *Se V é uma álgebra de Jordan euclidiana redutível, então*

$$\forall x, y \in V \quad \det(P(x)y) = \det(x)^2 \det(y).$$

Demonstração. Suponha-se que $V = \bigoplus_{i=1}^k V_i$ e que $V_i \circ V_j = \{0\} \ \ \forall i \neq j$, onde os subespaços V_i, para $i = 1, \ldots, k$, são subálgebras de Jordan euclidianas irredutíveis de V. Então, dados $x, y \in V$,

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 + \ldots + x_k \\ y &= y_1 + y_2 + \ldots + y_k, \end{aligned}$$

com $x_i, y_i \in V_i$ para $i = 1, \ldots, k$, pode concluir-se que

$$\begin{aligned} P(x)y &= 2L(x)(L(x)y) - L(x^2)(y) \\ &= 2x \circ (x \circ y) - (x \circ x) \circ y \\ &= 2(\sum_{i=1}^k x_i) \circ (\sum_{i=1}^k x_i \circ \sum_{i=1}^k y_i) - (\sum_{i=1}^k x_i \circ \sum_{i=1}^k x_i) \circ \sum_{i=1}^k y_i \\ &= 2(\sum_{i=1}^k x_i) \circ (\sum_{i=1}^k x_i \circ y_i) - (\sum_{i=1}^k x_i^2) \circ \sum_{i=1}^k y_i \\ &= 2\sum_{i=1}^k (x_i \circ (x_i \circ y_i)) - \sum_{i=1}^k (x_i^2 \circ y_i) \\ &= \sum_{i=1}^k (2x_i \circ (x_i \circ y_i) - x_i^2 \circ y_i) \\ &= \sum_{i=1}^k P(x_i)y_i. \end{aligned} \tag{15}$$

Uma vez que, dados dois quaisquer elementos u e v de um álgebra de Jordan euclidiana irredutível, se verifica que $\det(P(u)v) = (\det(u))^2 \det(v)$, (Faraut and Korányi, 1994), e como, para $i = 1, \ldots, k$, V_i é uma álgebra de Jordan euclidiana irredutível, tendo em conta (15), por aplicação do teorema 4.10 vem que

$$\begin{aligned}
\det(P(x)y) &= \Pi_{i=1}^{k} \det(P(x_i)y_i) \\
&= \Pi_{i=1}^{k}((\det(x_i))^2 \det(y_i)) \\
&= (\Pi_{i=1}^{k}(\det(x_i))^2)(\Pi_{i=1}^{k} \det(y_i)) \\
&= (\Pi_{i=1}^{k} \det(x_i))^2 \Pi_{i=1}^{k} \det(y_i) \\
&= (\det(x))^2 \det(y)
\end{aligned}$$

∎

Segue-se uma propriedade importante dos idempotentes ortogonais (relativamente à operação da álgebra), com aplicação na determinação da decomposoição de Pierce (a descrever na secção seguinte) de uma álgebra de Jordan euclidiana associada a um sistema de Jordan, S.

TEOREMA 4.12. *Seja V uma álgebra de Jordan euclidiana. Se $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ são dois idempotentes ortogonais de V, então*

$$L(a)L(b) = L(b)L(a).$$

Demonstração. Sejam **a** e **b** dois idempotentes ortogonais da álgebra de Jordan euclidiana V. Então, de acordo com o teorema 3.1, $\forall x, y \in V$, verifica-se

$$[L(x), L(y^2)] + 2[L(y), L(x \circ y)] = 0. \qquad (16)$$

Considerarando em (16) $x = \mathbf{a}$ e $y = \mathbf{b}$ obtém-se

$$[L(a), L(b^2)] + 2[L(a), L(a \circ b)] = 0.$$

Logo, como **a** e **b** são dois idempotentes ortogonais de V, pelo que $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = 0$, vem que

$$[L(a), L(b)] = 0 \Leftrightarrow L(a)L(b) = L(b)L(a).$$

∎

4.3. Decomposição de Pierce de uma álgebra de Jordan euclidiana

Seja V uma álgebra de Jordan euclidiana com característica r e elemento unidade **e** e seja $S = \{c_1, c_2, \ldots, c_r\}$ um sistema de Jordan de V. Como os idempotentes de S são ortogonais dois a dois, do teorema 4.12 decorre que os operadores $L(c_i)$ e $L(c_j)$ comutam, para $i \neq j$. Por outro lado, uma vez que os operadores $L(c_i)$, com $i \in \{1, \ldots, r\}$, são autoadjuntos relativamente ao produto interno de V e dois a dois comutativos, então $L(c_i)_{\{i \in \{1,\ldots,r\}\}}$ constitui uma família de operadores lineares de V em V, simultaneamente diagonalizáveis, ou seja, tais que os $L(c_i)$s, para $i = 1, \ldots, r$, admitem subespaços invariantes

comuns.
Vamos provar, agora, que esses subespaços invariantes não são mais do que os subespaços de V

$$\begin{aligned} V_{ii} &= V(c_i, 1), \text{ para } i = 1, \ldots, r, \\ V_{ij} &= V(c_i, \frac{1}{2}) \cap V(c_j, \frac{1}{2}), \text{ com } 1 \leq i < j \leq r. \end{aligned}$$

Com efeito, como $\mathbf{e} = \sum_{i=1}^{r} c_i$, $L(e) = \sum_{i=1}^{r} L(c_i)$, i.e.,

$$I = \sum_{i=1}^{r} L(c_i).$$

Logo, sendo U um subespaço invariante comum a todos os operadores $L(c_i)$, para $i = 1, \ldots, r$, dado $u \in U$, $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$ $L(c_i)u = \lambda_i u$, com $\lambda_i \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ [19]. Mas então, $u = \sum_{i=1}^{r} L(c_i)u$, ou seja, $u = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u$, pelo que, $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$. Uma vez que cada λ_i, para $i = 1, \ldots, r$, só pode assumir os valores 0, $\frac{1}{2}$ ou 1, então

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$$

se e só se existe um único $j \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $\lambda_i = 1$ ou existem apenas dois índices distintos $p, q \in \{1, \ldots, r\}$ tais que $\lambda_p = \lambda_q = \frac{1}{2}$. Consequentemente, vem que $U = V(c_j, 1) = V_{jj}$ ou $U = V(c_p, \frac{1}{2}) \cap V(c_q, \frac{1}{2}) = V_{pq}$ com $p < q$. Assim obtém-se a decomposição

$$V = \bigoplus_{i \leq j} V_{ij}$$

a qual se designa por decomposição de Pierce de V associada ao sistema de Jordan $\{c_1, c_2, \ldots, c_r\}$. Sobre estes subespaços podem concluir-se ainda as propiedades estabelecidas no teorema que se segue.

TEOREMA 4.13. *Sendo V uma ágebra de Jordan euclidiana, $S = \{c_1, \ldots, c_r\}$ um sistema de Jordam e considerando os subespaços V_{ii}, para $i = 1, \ldots, r$ e V_{ij}, com $1 \leq i < j \leq r$, referidos anteriormente, verificam-se as seguintes propriedades:*

$$\begin{aligned} V_{ij} \circ V_{ij} &\subset V_{ii} + V_{jj}, \textit{ para } 1 \leq i < j \leq r, \\ V_{ij} \circ V_{jk} &\subset V_{ik}, \textit{ para } i \neq k, \\ V_{ij} \circ V_{kl} &= \{0\} \textit{ se } \{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset. \end{aligned}$$

[19] Note-se que, de acordo com o teorema 3.5, sendo $\mathbf{c}$ um idempotente da álgebra de Jordan euclidiana V, o operador linear $L(c)$ tem os seus valores próprios no conjunto $\{0, 1, \frac{1}{2}\}$.

Demonstração. Ver prova em (Faraut and Korányi, 1994). ∎

5. Caracterização do cone dos quadrados de uma álgebra de Jordan euclidiana

Em (Faraut and Korányi, 1994) demonstra-se que o cone dos quadrados de V, $Q = \{x^2 : x \in V\}$, pode ser definido como o conjunto dos elementos $x \in V$ tais que $L(x)$ é um operador de V em V, semidefinido positivo. Por outro lado, na mesma publicação, demonstra-se que $\text{int}(Q)$ pode ser definido como o conjunto dos pontos $x \in V$ tais que $L(x)$ é definido positivo. No que se segue, vamos provar que $\text{int}(Q)$ não é mais do que o conjunto dos elementos $x \in V$ cuja decomposição espectral apresenta todos os valores próprios positivos. Por sua vez, prova-se ainda, que o cone Q não é mais do que o conjunto dos elementos $x \in V$ cuja decomposição espectral apresenta todos valores próprios não negativos.

TEOREMA 5.1. *Seja V uma álgebra de Jordan euclidiana com característica r e Q o seu cone dos quadrados. Se $x \in V$ é tal que $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i$, onde $\{c_1, c_2, \ldots, c_r\}$ é um sistema de Jordan de V, então*

(i) $\lambda_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, r$, sse se $x \in Q$.

(ii) $\lambda_i > 0$ para $i = 1, \ldots, r$, sse $x \in \mathit{int}(Q)$.

Demonstração.

(i) Se $x \in V$, pelo teorema 4.3, existe um sistema de Jordan $\{c_1, c_2, \ldots, c_r\}$ tal que $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i$ e obtém-se a decomposição de Pierce de V

$$V = \bigoplus_{1 \leq i < j \leq r} V_{ij},$$

onde $V_{ij} \circ V_{kl} = 0$, se $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset$.
Sejam $i, j \in \{1, \ldots, r\}$, dois índices tais que $1 \leq i < j \leq r$ e suponhamos que $V_{ij} \neq \{0\}$. Tendo em conta a definição do subespaço V_{ij}, se $v \in V_{ij} \setminus \{0\}$, então $L(c_i)v = \frac{1}{2}v$, $L(c_j)v = \frac{1}{2}v$ e $L(c_k)v = 0 \; \forall k \notin \{i, j\}$ [20]. Mas então

$$\begin{aligned} L(x)v &= L(\sum_{l=1}^{r} \lambda_l c_l)v \\ &= \sum_{l=1}^{r} (\lambda_l L(c_l)v) \\ &= \lambda_i L(c_i)v + \lambda_j L(c_j)v \\ &= \lambda_i \frac{1}{2} v + \lambda_j \frac{1}{2} v \\ &= \frac{\lambda_i + \lambda_j}{2} v. \end{aligned}$$

[20] Note-se que $c_k \in V_{kk} = \{x \in V : L(c_k)x = x\}$ e $\{(k, k)\} \cap \{(i, j)\} = \emptyset$, se $k \neq i \, \wedge \, k \neq j$.

Logo, o os vectores não nulos do subespaço V_{ij} são vectores próprios do operador $L(x)$, associados ao valor próprio $\frac{\lambda_i+\lambda_j}{2}$.
Por outro lado, sendo s um número natural tal que $1 \leq s \leq r$, se $v \in V_{ss} \setminus \{0\}$, então, devido á definição de V_{ss}, $L(c_s)v = v$, e $L(c_i)v = 0 \ \forall i \neq s$. Consequentemente, vem que

$$\begin{aligned} L(x)v &= \sum_{l=1}^{r} \lambda_l L(c_l)v \\ &= \lambda_s L(c_s)v \\ &= \lambda_s v, \end{aligned}$$

donde se pode concluir que qualquer vector não nulo do subespaço V_{ss} é um vector próprio do operador $L(x)$ associado ao valor próprio λ_s. Em conclusão, a decomposição $V = \bigoplus_{1\leq i<j\leq r} V_{ij}$ implica que os valores próprios de $L(x)$ sejam os escalares λ_i, para $i = 1, \ldots, r$ e os escalares $\frac{\lambda_i+\lambda_j}{2}, i < j$, para todos os i, j, com $1 \leq i < j \leq r$, tais que $V_{ij} \neq \{0\}$.
Por outro lado, sabendo-se que Q é o conjunto dos elementos $x \in V$ tais que $L(x)$ é semidefinido positivo, uma vez que $L(x)$ é semidefinido positivo se e só se os seus valores próprios são não negativos, podemos concluir que $x \in Q$ se e só se $\lambda_i \geq 0$, para $i = 1, \ldots, r$.

(ii) A prova é idêntica à anterior.

■

Este teorema permite-nos obter uma caracterização alternativa, quer do cone dos quadrados Q, quer do cone $\text{int}(Q)$. Antes porém, vamos introduzir os conceitos de elemento definido positivo e de elemento semidefinido positivo de uma álgebra de Jordan euclidiana.

DEFINIÇÃO 5.1. *Se V é uma álgebra de Jordan euclidiana com característica r e $x \in V$ admite a decomposição espectral $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c_i$, então x diz-se definido positivo se $\forall i \in \{1, \ldots, k\} \ \ \lambda_i > 0$ e diz-se semidefinido positivo se $\forall i \in \{1, \ldots, k\} \ \ \lambda_i \geq 0$.*

OBSERVAÇÃO 5.1. *Note-se que a consistência desta definição decorre da unicidade da decomposição espectral de qualquer elemento x de uma álgebra de Jordan.*

Assim, de acordo com o teorema 5.1, podemos redefinir Q e $\text{int}(Q)$ do modo que a seguir se indica.

$$\begin{aligned} Q &= \{x \in V : \ x \text{ é semidefinido positivo}\} \\ \text{int}(Q) &= \{x \in V : \ x \text{ é definido positivo}\}. \end{aligned}$$

Sendo V uma álgebra de Jordan euclidiana com elemento unidade $\mathbf{e}$ e Q o seu cone dos quadrados, como consequência do teorema 4.2, conforme se prova a seguir, podemos concluir que se $x \in \text{int}(Q)$ então (i) x é invertível e (ii) $x^{-1} \in \text{int}(Q)$. Com efeito, seja $x \in \text{int}(Q)$.

(i) Se $x \in \text{int}(Q)$, então x é definido positivo e, consequentemente, sendo $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i$ onde, $\{c_1, c_2, \ldots, c_r\}$ é um sistema de Jordan de V, então $\lambda_i > 0$, para $i = 1, \ldots, r$. Logo, $\det(x) = \Pi_{i=1}^{r} \lambda_i > 0$ e, de acordo com o teorema 3.4, x é invertível.

(ii) Se x é definido positivo, pelo teorema 4.2, vem que

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i d_i,$$

onde $\lambda_i > 0$, para $i = 1, \ldots, k$, com os λ_is todos distintos e onde $\{d_1, \ldots, d_k\}$ é um sistema de idempotentes ortogonais completo de V, tal que $d_j \in I\!R[x]$, para $j = 1, \ldots, k$. Logo $x^{-1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\lambda_i} d_i$, uma vez que $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\lambda_i} d_i \in I\!R[x]$ e, tendo em conta que $\{d_1, \ldots, d_k\}$ é um sistema de idempotentes ortogonais completo, vem que

$$(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\lambda_i} d_i) \circ (\sum_{i=1}^{k} \lambda_i d_i) = \sum_{i=1}^{k} d_i = \mathbf{e}.$$

Assim, conclui-se que $x^{-1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\lambda_i} d_i$, com $\frac{1}{\lambda_i} > 0$, para $i = 1, \ldots, k$, ou seja, $x^{-1} \in \text{int}(Q)$.

Referências

J. Faraut and A. Korányi. Analysis on Symmetric Cones. Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press (1994).

M. Koecher. The Minnesota Notes on Jordan Álgebras and Their Applications. Edited and annotated by Aloys Krieg and Sebastian Walcher, Lecture Notes in Mathematics, Springer (1999).

K. Spindler. Abstract Algebra with Applications, vol. I and vol. II. Marcel Dekker, Inc. (1994).

B. L. Van Der Waerden. Algebra. Springer (1966).