Tópicos sobre Redes e Grafos

Domingos Moreira Cardoso
Universidade de Aveiro, Departamento de Matemática
1999

Índice

1. Conceitos e Resultados Básicos Sobre Grafos 1

2. Representação de Grafos 21

3. Poliedros Combinatórios e Teorema de Konig 33

Índice Remissivo 41

1. Conceitos e Resultados Básicos Sobre Grafos

Um **grafo** é um par ordenado de conjuntos disjuntos (V,E), onde V é um conjunto arbitrário que se designa por conjunto dos **vértices** (ou nodos) e E é um subconjunto do conjunto de pares não ordenados de elementos de V que se designa por conjunto de **arestas**. Nestas condições, pode considerar-se E como sendo uma relação simétrica no conjunto dos vértices, onde os conjuntos de cardinalidade 2, $\{x,y\} \in E$, indicam que os vérices x e y estão relacionados. No caso da relação não ser simétrica, o conjunto das arestas, E, é substituido pelo subconjunto dos pares ordenados de vértices que definem a relação, os quais se designam por arcos. Em tais condições, o grafo (V,E) designa-se por **grafo dirigido**.

Ao longo deste texto, quano o grafo é simplesmente identificado por G, o conjunto de arestas (ou arcos) denota-se por E(G) e o conjunto de vértices por V(G) e, usualmente, quando nos referirmos a um arco, (x,y), ou a uma aresta, {x,y}, indistintamente, adoptaremos a notação [x,y] e consideramo-lo como um elemento do conjunto E(G).

Em geral, quando, num determinado contexto, é irrelevante distinguir se o grafo é dirigido ou não, adopta-se toda a terminologia associada aos grafos não dirigidos que designaremos, simplesmente, por grafos.

Graficamente um grafo não dirigido representa-se por um conjunto de pontos que denotam os vértices e por um conjunto de linhas ou segmentos, ligando diferentes pares de pontos, que denotam as arestas. Quando o grafo é dirigido, cada uma destas linhas é representada com a orientação determinada pelos arcos a que se referem. Como exemplo, na figura a seguir representa-se um grafo dirigido, (V,E'), e um grafo não dirigido (V,E"), onde V={1,2,3,4,5,6}, E'={(4,1),(2,3),(2,4),(6,5)} e E"={{1,2},{1,3},{1,5},{2,4},{4,6}}.

Mais geralmente, designa-se por **hipergrafo**, todo o par (V,E), onde V é um conjunto arbitrário e E é um subconjunto de $P(V)$ (i. e, um subconjunto do conjunto das

partes de V) tal que $V \cap E = \varnothing$ [1]. Neste caso, cada elemento de V designa-se por vértice e cada elemento de E designa-se por **hiperaresta**.

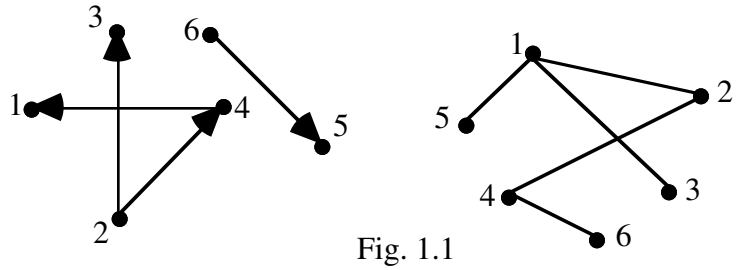


Fig. 1.1

Na figura 1.2, exemplifica-se um hipergrafo H=(V,E), onde V={1,2,3,4,5,6,7,8,9} e E={{1,2,3}{2,3,6,7},{4,5},{5,8},{9}}.

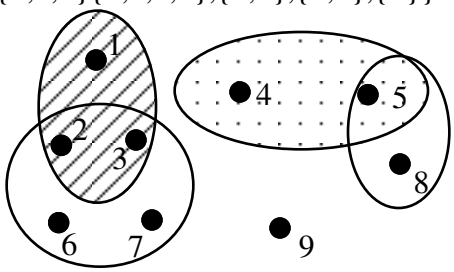


Fig. 1.2

Dois vértices, x e y, de um grafo G=(V,E) dizem-se **adjacentes** se [x,y] é um arco ou aresta de G (i. e, se $[x,y] \in E$). Neste caso, diz-se que o arco ou aresta [x,y] é **incidente** no vértice x e no vértice y.

Um grafo com arcos ou arestas repetidas (i. e, com mais do que um arco ou aresta entre os mesmos vértices) ou com lacetes (i. e, arcos ou arestas com extremos incidentes no mesmo vértice), diz-se um **multigrafo**. Na figura a seguir representa-se um multigrafo com um lacete no vértice 3 e com duas arestas entre os vértices 2 e 3 [2].

---

[1] Esta condição tem como objectivo evitar quaquer ambiguidade, nomeadamente, na distinção a fazer entre um elemento $v \in V$ e o conjunto singular {v}.

[2] Em certos textos os grafos são designados por grafos simples de modo a realçar a ausência de arestas repetidas e lacetes.

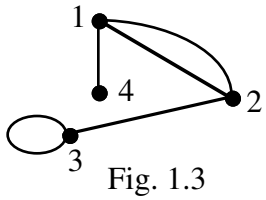


Fig. 1.3

Dado um grafo G, designa-se por **ordem** de G o seu número de vértices ($|V(G)|$) e por **dimensão** de G o seu número de arcos ou arestas ($|E(G)|$). A dimensão de um grafo, G, de ordem n varia entre 0 e $\binom{n}{2}$, i. e, $0 \leq |E(G)| \leq \binom{|V(G)|}{2}$.

Sendo G um grafo de orden n, se G tem dimensão $\binom{n}{2}$ (o que significa que todos os pares de vértices são adjacentes), então diz-se um **grafo completo** e denota-se por K_n; se G tem dimensão nula, então diz-se um **grafo nulo** e denota-se por N_n.

O grafo trivial, $(\varnothing,\varnothing)$, designa-se por **grafo vazio** e denota-se por $\varnothing$.

Designa-se por **grau** (ou valência) de um vértice de um grafo G, x, e denota-se por d(x), o número de arcos ou arestas que lhe são incidentes. Quando todos os vértices do grafo têm o mesmo grau o grafo diz-se **regular**.

Em geral, dado um grafo G, denota-se por $\delta(G)$ e por $\Delta(G)$, respectivamente, o menor e o maior dos graus dos respectivos vértices, i. e,

$$\delta(G)=\min\{d(v): v\in V(G)\} \text{ e } \Delta(G)=\max\{d(v): v\in V(G)\}.$$

Como exemplo no grafo, G, representado na figura 1.4, a seguir, $\delta(G)=d(5)=1$ e $\Delta(G)=d(1)=3$.

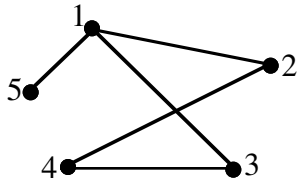


Fig. 1.4

Tendo em conta que ao adicionarmos os graus de todos os vértices de um grafo arbitrário, G, cada arco ou aresta conta duas vezes, com facilidade se verifica que

$$\sum_{x\in V(G)} d(x)=2|E(G)| \qquad (*),$$

e, consequentemente, que $\sum_{x\in V(G)} d(x)=0 \pmod 2$.

De (*) decorre, de um modo imediato, que em qualquer grafo, o número de vértices de grau impar é par e ainda que

$$\delta(G) \leq \lfloor 2\frac{|E(G)|}{n} \rfloor \leq \Delta(G)$$ [3].

A aplicação do "pingeonhole principle" aos graus dos vértices de um grafo, G, de ordem $n\geq 2$, permite concluir que existem (pelo menos) dois vértices $x,y\in V(G)$ tais que $d(x)=d(y)$. Com efeito, supondo que, em G, todos os vértices têm graus distintos, se $\exists x\in V(G)$ tal que $d(x)=0$ (i. e, tal que x é um vértice isolado), então $\Delta(G)\leq n-2$ (ou seja, qualquer dos restantes vértices é adjacente, no máximo, a n-2 vértices) e, consequentemente, os graus dos vértices variam entre 0 e n-2. Logo, os n vértices têm n-1 graus possíveis, pelo que (pelo menos) dois deles têm o mesmo grau. Se o grafo não tem vértices isolados, então os graus dos vértices variam entre 1 e n-1 e, mais uma vez, existem n-1 graus possíveis para n vértices.

Dados dois grafos G e G' tais que $V(G)\supseteq V(G')$ e $E(G)\supseteq E(G')$, diz-se que G' é um **subgrafo** de G e que G é um **supergrafo** de G' e denota-se esta relação entre G e G' por $G\supseteq G'$. Sendo $V'=V(G')$ e $E'=E(G')$, se E' contém todos os arcos ou arestas de G que ligam os vértices de V', então diz-se que $G'=(V',E')$ é o **subgrafo induzido** ou gerado por V' e denota-se este subgrafo de G por $G[V']$ (pelo que, neste caso, $G'=G[V(G')]$).

No exemplo da figura 1.5, verifica-se que $G\supseteq G'$ e que $G'=G[\{1,2,3,4\}]$.

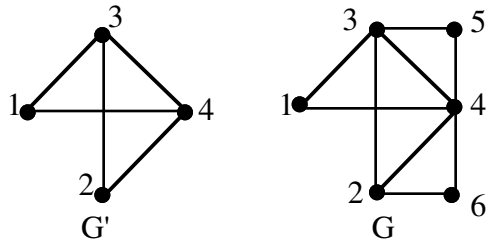


Fig. 1.5

[3] Note-se que $n\delta(G)\leq \sum_{x\in V(G)} d(x)=2|E(G)|\leq n\Delta(G)$.

Pela sua especial importância, em Teoria dos Grafos, vamos destacar as sequências de vértices e de arcos ou arestas que se designam, respectivamente, por passeios, caminhos e trajectos.

Designa-se por **passeio** num grafo G, toda a sequência de vértices e arestas da forma, $x_1, [x_1,x_2], \ldots, x_i, [x_i,x_{i+1}], x_{i+1}, \ldots, [x_{k-1},x_k], x_k$ (com eventual repetição de vértices e de arcos ou arestas). Neste caso, os vértices x_1 e x_k designam-se por vértices extremos do passeio (x_1 por vértice inicial e x_k por vértice final).

Um **caminho** num grafo G, entre os vértices x_1 e x_p, é um subgrafo, P, tal que $V(P)=\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ e $E(P)=\{[x_1,x_2], \ldots, [x_{p-1},x_p]\}$. Desta definição decorre que, num caminho, não existem vértices repetidos e, consequentemente, também não existem arcos ou arestas repetidas. Deste modo pode considerar-se um caminho entre x_1 e x_p como sendo um passeio sem vértices repetidos com início em x_1 e que termina em x_p.

Um **trajecto** num grafo G entre os vértices x e y é um passeio sem arcos ou arestas repetidas (podendo, no entanto, existir vértices repetidos) com início em x e que termina em y.

No grafo G da figura 1.5, 6,[6,2],2,[2,4],4,[4,3],3,[3,2],2[,2,4],4,[4,1],1 é um passeio entre os vértices 6 e 1. O subgrafo P=({2,4,3,1},{{2,4},{4,3},{3,1}}), corresponde a um caminho entre os vértices 2 e 1. Por outro lado, a sequência de vértices e arestas 2,[2,4],4,[4,3],3,[3,5],5,[5,4],4,[4,6],6 corresponde a um trajecto entre 2 e 6.

Usualmente, quer os passeios, quer os caminhos, quer ainda os trajectos representam-se, unicamente, pela respectiva sequência de vértices.

Designa-se por **comprimento de um caminho**, P, e denota-se por comp(P), o número de arcos ou arestas de P (i. e, $comp(P)=|E(P)|$). Analogamente, designa-se por **comprimento de um trajecto**, T, o número de arcos ou arestas que fazem parte da sequência que o constitui, denotando-se este número por comp(T).

Dados dois vértices x e y de um grafo, G, designa-se por distância entre x e y, e denota-se por $d_G(x,y)$, o comprimento do caminho de menor comprimento entre x e y, se

um tal caminho existir, caso contrário $d_G(x,y)=\infty$. Com facilidade se verifica que esta noção de distância é uma métrica (a prova desta afirmação é proposta no exercício 1.1). A maior das distâncias entre os vértices de um grafo G designa-se por **diâmetro** de G e denota-se por diam(G).

Um passeio, com pelo menos uma aresta, cujos únicos vértices que coincidem são os vértices extremos diz-se um **ciclo** (de uma forma ligeira, também se pode dizer que um ciclo é um caminho de comprimento não nulo fechado ou com extremos coincidentes). Por sua vez designa-se por **circuito**, todo o passeio, com pelo menos uma aresta, fechado (i. e, cujos extremos coincidem) sem arestas repetidas (podendo, no entanto, existir vértices repetidos). Na figura 1.6 as arestas mais carregadas representam em a) um ciclo e em b) um circuito.

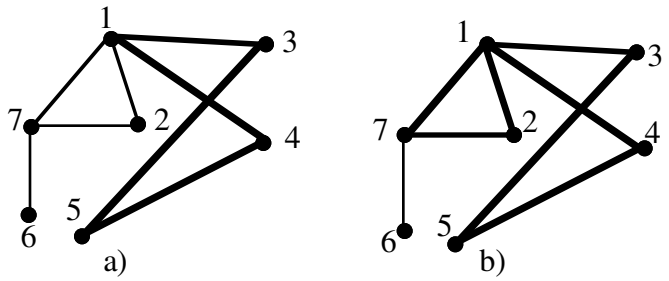


Fig. 1.6

Os conceitos de comprimento de caminhos e de trajectos são extensíveis aos ciclos e aos circuitos nos quais, naturalmente, correspondem aos respectivos números de arcos ou arestas que os compõem.

Dados dois grafos G e H, a **união** de G com H denota-se por $G\cup H$ e corresponde ao grafo $G\cup H=(V(G)\cup V(H),E(G)\cup E(H))$ e a **intersecção** de G com H denota-se por $G\cap H$ e corresponde ao grafo $G\cap H=(V(G)\cap V(H),E(G)\cap E(H))$.

A partir da definição de união e intersecção de grafos introduzida, podemos afirmar que um grafo G se parte nos grafos $G_1=(V_1,E_1)$, … , $G_k=(V_k,E_k)$, se $G=\bigcup_{1\le i\le k} G_i$ e $G_i\cap G_j=\varnothing\ \forall i\neq j$.

Um grafo G diz-se **conexo** se não admite qualquer partição, para além da partição trivial (i. e, $G=G\cup\varnothing$). Por sua vez, dado um grafo não conexo, G, um seu subgrafo diz-se uma **componente conexa** (ou simplemente, componente) de G, se é um subgrafo conexo maximal, no sentido em que sendo gerado pelo subconjunto de vértices V', $\forall x\in V(G)\backslash V'$, o subgrafo $G[V'\cup\{x\}]$ não é conexo.

A partir da definição de grafo conexo e de componente conexa pode afirmar-se que um grafo é conexo sse tem uma única componente, ou em alternativa, sse existe um caminho entre quaisquer dos seus vértices.

Na figura 1.7 (a seguir) apresenta-se um grafo com duas componentes conexas.

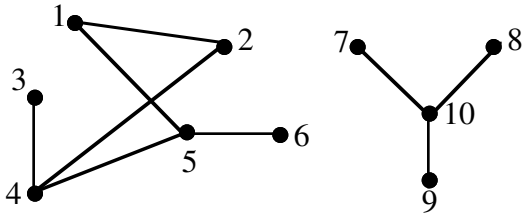


Fig. 1.7

Um trajecto designa-se por **trajecto de Euler** se contém todos as arestas (logo todos os vértices) do grafo ou multigrafo a que se refere. Por sua vez, designa-se por **circuito de Euler**, todo o circuito que contenha todas as arestas do grafo.

O teorema a seguir estabelece uma condição necessária e suficiente para a existência de um circuito de Euler.

1.1 - Teorema

Um grafo (ou multigrafo), sem componentes de dimensão nula, admite um circuito de Euler se e sómente se (i) é conexo e (ii) todos os seus vértices têm grau par.

Prova:

Uma vez que é imediato verificar que as condições (i) e (ii) são necessárias, vamos apenas provar que são suficientes, utilizando indução sobre o número de arestas de G. Para um grafo com um único vértice (sem arestas) o resultado é trivial. Assuma-se que G satisfaz (i) e (ii) e que todos os multigrafos com menos arestas do que G que satisfazem (i) e (ii) admitem circuitos de Euler. Escolha-se um vértice v de G e inicie-se um trajecto segundo as arestas de G, sem se passar pela mesma aresta duas vezes, até se encontrar v novamente (note-se que tendo em conta (i) e (ii) este trajecto fechado existe). Posteriormente retirando-se as arestas relativas ao trajecto percorrido obtém-se um certo número de subgrafos conexos que satisfazem as condições (i) e (ii) e que, consequentemente, admitem circuitos de Euler (por hipótese de indução). Nestas condições é facil de ver que poderemos criar um circuito de Euler para G, acrescentando ao circuito inicial os circuitos de Euler de cada um dos subgrafos (ou submultigrafos) obtidos.

♦

Conforme decorre desta prova, os únicos grafos não conexos que admitem circuitos de Euler, são os que têm uma única componente de dimensão superior a zero e na qual todos os vértices têm grau par, pelo que, as demais componentes são vértices isolados.

A prova construtiva da suficiências das condições (i) e (ii) do teorema 1.1 sugere o algoritmo recursivo a seguir indicado para a determinação de um circuito de Euler num grafo (ou multigrafo), G=(V,E), conexo onde todos os vértices têm grau par.

1.2 Algoritmo (de determinação de um circuito de Euler a partir de v_1).

1.2.1 **Se** v_1 não tem arestas **Então** Euler(v_1)=[v_1];
Senão Faz

1.2.1.1 A partir de v_1 criar um passeio em G, de tal forma que não se passe por uma aresta mais do que uma

vez (logo trata-se de um trajecto), até que v_1 seja novamente visitado;

1.2.1.2 Sendo $[v_1,v_2, \dots , v_n,v_1]$ este trajecto, eliminar as arestas $[v_1,v_2]$, $[v_2,v_3]$, … , $[v_n,v_1]$ de G;

1.2.1.3 Devolver o trajecto:
$[Euler(v_1),Euler(v_2),\dots,Euler(v_n),v_1]$;
Fim Faz;

Fim do Algoritmo.

O corolário que se segue estabelece as condições necessárias e suficientes para a existência de um trajecto de Euler nos grafos (ou multigrafos) que não admitem circuitos de Euler (uma vez que um circuito de Euler é também um trajecto de Euler).

1.3 - Corolário

Um grafo (ou multigrafo), sem componentes de dimensão nula, admite um trajecto de Euler, mas não um circuito de Euler, se e somente se é conexo e tem exactamente dois vértices de grau impar.

Prova:

Se G admite um trajecto de Euler que não é um circuito, então é evidente que é conexo e, uma vez que os vértices de partida e chegada são distintos, apenas estes têm grau impar. Relativamente aos demais, em cada visita, foi utilizado uma aresta para atingir o vértice e outra para o abandonar, pelo que têm grau par.

Suponha-se que G é um grafo conexo em que todos os vértices têm grau par à excepção de dois. Então, pelo teorema 1.1, é claro que não existe um circuito de Euler, pelo que resta provar a existência de um trajecto de Euler.

Suponha-se que u e v são os vértices de grau impar em G=(V,E) e considere-se o grafo G'=(V,E') com $E'=E\cup\{[u,v]\}$. Este grafo satisfaz as hipóteses dos teorema 1.1, pelo

que admite um circuito de Euler. Se a este circuito retirarmos a aresta [u,v] obtém-se um trajecto de Euler em G.

♦

Dado um grafo G, designa-se por **complementar** de G, e denota-se por $\bar{G}$, o grafo tal que $V(\bar{G})=V(G)$ e $E(\bar{G})=\{[x,y]: [x,y]\notin E(G)\}$.

Se G=(V,E) é um grafo com as seguintes propriedades i) $V=V'\cup V''$ e $V'\cap V''=\emptyset$ e ii) $\forall [x,y]\in E$, $\{x,y\}\cap V'\neq\emptyset$ e $\{x,y\}\cap V''\neq\emptyset$, então G designa-se por **grafo bipartido** e denota-se usualmente por G=(V',V",E). Nestes casos também se diz que G admite uma bipartição. Um grafo bipartido, G=(V',V",E), tal que $|V'|=m$ e $|V''|=n$ e tal que

$$\forall v'\in V' \ \forall v''\in V'', [v',v'']\in E$$

denota-se por $\mathbf{K_{m,n}}$ e designa-se por **grafo bipartido completo**.

Nem todos os grafos admitem uma bipartição. O teorema a seguir dá-nos uma condição necessária e suficiente para que tal aconteça.

1.4 - Teorema

Um grafo admite uma bipartição sse não tem circuitos de comprimento ímpar.

Prova:

Se G=(V',V",E) é um grafo bipartido, então é claro que todos os circuitos têm comprimento par. Com efeito, uma vez que tanto em V' como em V" não existem vértices adjacentes, partindo-se, por exemplo, de um vértice em V', de cada vez que se passa para V", para se obter um circuito, tem de se voltar a V' na aresta seguinte, pelo que qualquer circuito tem comprimento par.

Suponhamos que G=(V,E) não tem circuitos de comprimento ímpar. Uma vez que um grafo é bipartido sse cada uma das suas componentes constitui um subgrafo bipartido, podemos supor, sem perda de generalidade, que G é conexo. Considere-se um vértice arbitrário $z\in V$ e seja $V'=\{w$, tais que $d_G(z,w)$ é ímpar$\}$. Nestas condições não existem

arestas que liguem vértices de V' (caso contrário existiriam circuitos de comprimento ímpar) [4]. Por outro lado, como todos os vértices de V\V' estão a uma distância par de z (em particular z está a uma distância 0 dele próprio), não existem vértices adjacentes em V\V' (uma vez que, por razões idênticas às anteriores, em tais condições, existiriam circuitos de comprimento impar). Logo, fazendo V"=V\V' obtém-se uma bipartição para G, dada por G=(V',V",E).

♦

Uma classe especial de grafos bipartidos são as árvores. Um grafo G=(V,E) diz-se uma **árvore** se é conexo e não tem circuitos (logo, em particular, não tem circuitos de comprimento impar e, consequentemente, é um grafo bipartido). O teorema a seguir estabelece mais algumas definições alternativas para árvores.

1.5 - Teorema

Seja G=(V,E) um grafo. As seguintes afirmações são equivalentes.

(i) G é uma árvore.

(ii) G é conexo e tem $|V|-1$ arestas.

(iii) G não tem circuitos, mas acrescentando-se uma aresta a G resulta um único circuito.

---

[4]Com efeito, supondo que $u,v \in V'$ e $[u,v] \in E$, uma vez que $d_G(z,u)=2k_u+1$ e $d_G(z,v)=2k_v+1$, onde $k_u,k_v \in \mathbf{N}$, existe um caminho P_{zu} (entre z e u) tal que $comp(P_{zu})=2k_u+1$ e um caminho P_{zv} (entre z e v) tal que $comp(P_{zv})=2k_v+1$ com k ($k \geq 0$) arestas em comum. Sendo y o vértice mais afastado de z em $P_{zu} \cap P_{zv}$, a união dos caminhos disjuntos nas arestas P_{yu} (caminho entre y e u) e P_{yv} (caminho entre y e v) com a aresta [u,v] produz um circuito de comprimento $(2k_u+1-k)+(2k_v+1-k)+1=2(k_u+k_v+1-k)+1$.

Prova:

Para provar que (i) $\Rightarrow$ (ii) e dado que uma árvore é um grafo conexo basta provar que se G=(V,E) é uma árvore então tem |V|-1 arestas, para o que vamos utilizar indução sobre o número de arestas de grafos que definem árvores.

Seja $G_k=(V_k,E_k)$ uma árvore com k arestas.

Para k=1 vem $|V_1|=2$, pelo que o resultado se verifica.

Suponha-se que o resultado é verdadeiro para k tal que $1\leq k\leq n-1$ e considere-se a árvore $G_n=(V_n,E_n)$. Dado que G_n não tem circuitos, existe pelo menos um vértice, v, com grau 1. Considerando o subgrafo obtido de G_n retirando-se a aresta incidente no vértice v, determina-se $G_{n-1}=(V_{n-1},E_{n-1})$ que continua a ser uma árvore (uma vez que permanece conexo e sem circuitos), logo, por hipótese de indução, G_{n-1} é tal que tem um número de arestas igual a $|V_{n-1}|-1$. Dado que $|V_n|=|V_{n-1}|+1$ concluí-se que G_n tem $|V_n|-1$ arestas, completando-se assim a prova de que (i) $\Rightarrow$ (ii).

A prova de que (ii) $\Rightarrow$ (iii) e (iii) $\Rightarrow$ (i) fica como exercício.

♦

Dado um grafo conexo G, designa-se por **árvore abrangente** (ou árvore de suporte) de G todo o subgrafo de G que sendo uma árvore, contém todos os vértices de G.

1.6 - Teorema

Todo o grafo conexo G=(V,E) contém uma árvore abrangente.

Prova:

Sendo G um grafo conexo, se G não tem circuitos então (por definição) é uma árvore e, para este caso, fica concluida a prova. Se G tem um circuito, então retirando uma aresta desse circuito o grafo mantém-se conexo. Repetindo este processo, até que não se tenham circuitos, ao fim de um número finito de arestas eliminadas obtém-se uma

árvore (i. e, um subgrafo conexo sem circuitos), a qual constitui uma árvore abrangente de G uma vez que os vértices permanecem os mesmos.

♦

Tendo em conta que nos poliedros combinatórios as árvores abrangentes (acrescentadas de uma raíz) correspondem a soluções básicas e, consequentemente a pontos extremos, pode concluir-se que este resultado constitui o equivalente, em teoria dos grafos, ao resultado da existência de pelo menos um ponto extremo nas regiões poliédricas não vazias definidas no ortante positivo.

Um grafo acíclico (i. e, que não contém qualquer ciclo) designa-se por **floresta**. Desta definição decorre que uma floresta é um grafo cujas componentes são árvores (donde se conclui que, em particular, uma árvore é uma floresta conexa). Adicionalmente, pode concluir-se ainda que um grafo é uma floresta sse eliminando qualquer das suas arestas o número de componentes aumenta.

Denotando-se por c(G) o número de componentes de G, obtém-se a seguinte condição necessária e suficiente para que um grafo seja uma floresta.

1.7 - Teorema

G é uma floresta sse $|E(G)|-|V(G)|+c(G)=0$.

Prova:

A prova da condição necessária vai ser feita por indução sobre o número de arestas de G, tendo em conta que o resultado é trivialmente satisfeito para $|E(G)|=0$.

Suponha-se que $|E(G)|>0$ e que o resultado é verdadeiro para todas as florestas com menos arestas do que $|E(G)|$. Seja G' um subgrafo de G ($G \supseteq G'$) obtido por eliminação de uma aresta arbitrária. Logo G' é uma floresta com $|E(G)|-1$ arestas, $|V(G)|$ vértices e $c(G)+1$ componentes. Por hipótese de indução aplicada a G',

$$0=|E(G')|-|V(G')|+c(G')=|E(G)|-1-|V(G)|+c(G)+1=|E(G)|-|V(G)|+c(G).$$

A prova da condição suficiente é deixada como exercício [5].

♦

Como corolário imediato do teorema 1.7 obtém-se o seguinte resultado:

1.8 - Corolário
Dado um grafo G, se $|E(G)|\geq|V(G)|$, então G contém pelo menos um circuito.

Dado um grafo dirigido G e um arco $a=(x,y)\in E(G)$ designa-se por **cabeça** de a e denota-se por cabeça(a) o vértice y e por **cauda** de a e dentota-se por cauda(a) o vértice x. Dado um vértice $v\in V(G)$, designa-se por **semigrau incidente** de v e denota-se por d^-)(v) o número de arcos que têm v como cabeça e designa-se por **semigrau emergente** denotando-se por $d^+(v)$ o número de arcos que têm v como cauda.

Um resultado equivalente ao teorema 1.1, para grafos dirigidos e circuitos de Euler dirigidos, é o que afirma que um grafo dirigido conexo, G, admite um circuito de Euler dirigido sse $\forall v\in V(G)$, $d^-(v)=d^+(v)$ [6].

Com igual facilidade se conclui a versão do corolário 1.2 (para grafos dirigidos), deixando-se como exercício, tanto o seu enunciado como a respectiva prova.

Dado um grafo, G, designa-se por **conjunto independente de vértices** (ou estável) todo o subconjunto X de V(G) ($V(G)\supseteq X$) tal que $\forall x,y\in X$, x não é adjacente e y (ou seja, não existe qualquer aresta $[x,y]\in E(G)$). A cardinalidade do conjunto independente de vértices de maior cardinalidade designa-se por **número de estabilidade** de G e denota-se por $\alpha(G)$.

---

[5] Sugestão: considere que G tem p componentes, $G_1, \ldots, G_p$ e que

$$|E(G)|-|V(G)|+p=0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{p}|E(G_j)|-\sum_{j=1}^{p}|V(G_j)|-p=0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{p}[|E(G_j)|-|V(G_j)|+1]=0.$$

[6] Os grafo dirigidos G tais que $\forall v\in V(G)$, $d^-(v)=d^+(v)$ designam-se por grafos pseudo-simétricos.

Designa-se por **clique** de um grafo G, todo o subconjunto de vértices, V' (V(G)⊇V'), que induz um subgrafo completo, i. e, G[V'] é um subgrafo completo. A cardinalidade da clique de G de maior cardinalidade designa-se por **número de clique** do grafo G e denota-se por ω(G).

Um subconjunto de vértices de um grafo G, W (V(G)⊇W), designa-se por **conjunto de cobertura** de arestas por vértices de G se cada aresta de E(G) é incidente em pelo menos um vértice de W, i. e, se $\forall [x,y] \in E(G)\ \{x,y\} \cap W \neq \emptyset$.

Considerando o grafo, G, representado na figura 1.8, e tendo em conta as definições anteriores, conclui-se que V'={4,5,6,8} constitui um conjunto independente de vértices (estável) de G, V"={1,3,47} constitui uma clique de G e W={3,4,5,7} constitui um conjunto de cobertura de arestas por vértices de G.

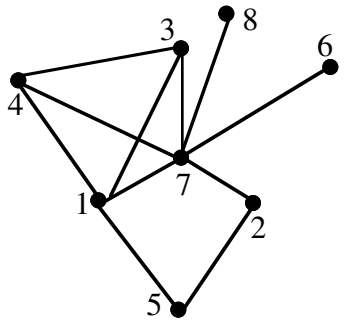


Fig. 1.8

O teorema a seguir estabelece a correspondência adequada entre cliques, estáveis e conjuntos de cobertura de arestas por vértices.

1.9 Teorema

Dado um grafo G e um subconjunto S de V(G) são equivalentes as seguintes afirmações:

a) S é uma clique de G.

b) S é um conjunto independente de vértices de $\bar{G}$.

c) V(G)\S é um conjunto de cobertura de arestas por vértices de $\bar{G}$.

Prova:

Se S é uma clique de G, então existe uma aresta de E entre quaisquer dois vértices de S; consequentemente, não existe qualquer aresta de $\bar{G}$ que ligue qualquer par de vértices de S, pelo que S é um conjunto independente de vértices de $\bar{G}$. Deste modo fica provado que a)⇒b). Por outro lado, sendo S um conjunto independente de vértices de $\bar{G}$, todas as arestas em $\bar{G}$ têm um dos vértices associados (pelo menos um) fora de S; consequentemente V(G)\S é uma cobertura de arestas por vértices para $\bar{G}$, o que prova que b)⇒c). Finalmente se V(G)\S é uma cobertura de arestas por vértices para $\bar{G}$, significa que qualquer aresta de $\bar{G}$ não tem ambos os vértices associados em S. Logo, não existe um par de vértices de S que não tenha uma aresta de E(G) a liga-los e, nestas condições, S é uma clique de G, o que prova que c)⇒a).

♦

Como consequência, do teorema anterior (de b) ⇒ c)) conclui-se que, em qualquer grafo, G, se um subconjunto de vértices I (V(G)⊇I) é um conjunto independente de vértices de G então V(G)\I é uma cobertura de vértices de G.

Como exemplo, na figura 1.9, deve observar-se que, tal como estabelece o teorena 1.9, a clique de G, {1,3,4,7}, e o seu complementar V(G)\{1,3,4,7} constituiem, respectivamente, um conjunto independente de vértices e um conjunto de cobertura de vértices para o grafo complementar, $\bar{G}$.

Do teorema 1.9 decorre ainda que dado um grafo arbitrário, G, se verifica que $\alpha(G)=\omega(\bar{G})$ e que $\omega(G)=\alpha(\bar{G})$. Com efeito, sendo X um conjunto independente de vértices de máxima cardinalidade em G (ou seja, um estável máximo de G), uma vez que X é uma clique de $\bar{G}$, podemos concluir que $\omega(\bar{G})\geq|X|=\alpha(G)$ (*). Porém, qualquer que seja o subconjunto de vértice que constitua uma clique em $\bar{G}$, C, $|C|\leq\alpha(G)$ (uma vez que C é um conjunto independente de vértices em G), logo $\omega(\bar{G})\leq\alpha(G)$ (**). De (*) e (**) decorre que $\alpha(G)=\omega(\bar{G})$. Por sua vez, a prova de que o número de clique de um grafo arbitrário G é igual ao número de estabilidade do seu complementar (i. e, $\omega(G)=\alpha(\bar{G})$)

decorre do facto de o complementar do complementar de um grafo ser o próprio grafo (i. e, $\bar{\bar{G}}=G$), logo $\alpha(\bar{G})=\omega(\bar{\bar{G}})=\omega(G)$.

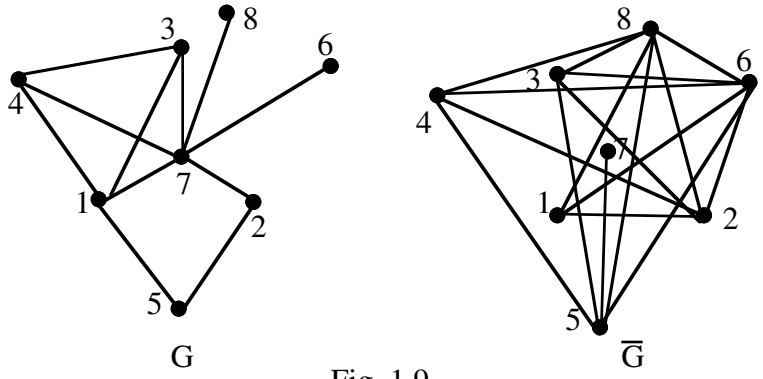
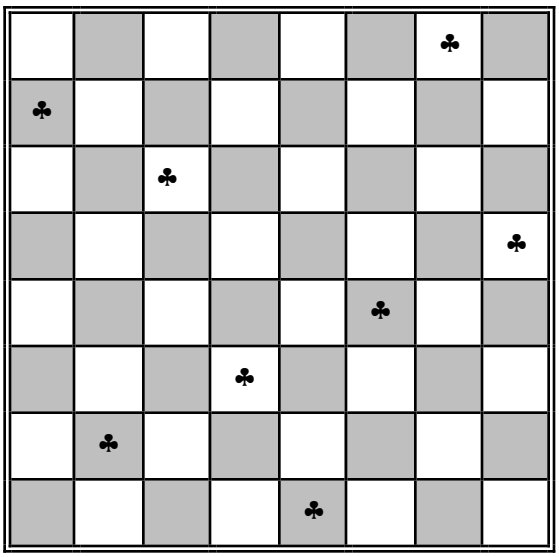


Fig. 1.9

Um problema muito conhecido, relacionado com a determinação do estável máximo de um grafo, é o problema das oito rainhas que consiste em colocar oito rainhas num tabuleiro de xadrez de tal forma que as posições que ocupem não pemita que nehuma delas possa atacar as outras (i. e, de tal forma que não existam duas rainhas na mesma linha, coluna ou diagonal). A seguir, apresenta-se uma das 92 soluções possíveis.



Como exercício modele o problema das oito rainhas como um problema da determinação do estável máximo de um grafo.

Designa-se por **emparelhamento** de um grafo G, um conjunto de arestas sem vértices em comum. Um eparelhamento de máxima cardinalidade designa-se por

emparelhamento máximo (ou máximo "matching"). Por sua vez, um emparelhamento que envolve todos os vértices do grafo diz-se um emparelhamento perfeito (i.e, dado um emprelhamento X de G e denotando por V(X) os vértices que são os extremos das arestas de X, X diz-se um emparelhamento perfeito para G se V(X)=V(G)). É claro que um emparelhamento perfeito é, necessariamente, um emparelhamento máximo.

Exercícios

1.1 - Prove que a noção de distância entre vértices, introduzida nos grafos, é uma métrica.

1.2 - Determine o maior número possível de vértices num grafo com 19 arestas onde todos os vértices têm grau não inferior a 3.

1.3 - Dado uma família de subconjuntos de um dado conjunto finito X, prove que a subfamília constituída pelos subconjuntos que intersectam um número ímpar de subconjuntos da família tem cardinalidade par.

1.4 - Sabendo que uma bola de futebol é fabricada unindo pentágonos e hexágonos regulares, de tal forma que cada pentágono é cosido a cinco hexágonos e cada hexágono a três pentágonos e a três hexágonos, alternadamente, diga se o número de pentágonos é par ou ímpar [7].

1.5 - Indique o número de arestas do grafo $K_{m,n}$ com $m,n \in \mathbf{N}$.

1.6 Prove que um grafo (ou multigrafo) conexo admite um trajecto de Euler sse o número de vértices de grau impar é inferior a 4.

1.7 Diga, justificando, se é possível traçar a figura a seguir com uma caneta sem a levantar do papel.

---

[7]Este problema foi motivado por um outro (ligeiramente mais complicado mas muito interessante) publicado por Margarida Bastos e António Guedes de Oliveira, no Boletim nº 32 da SPM (Sociedade Portuguesa de Matemática).

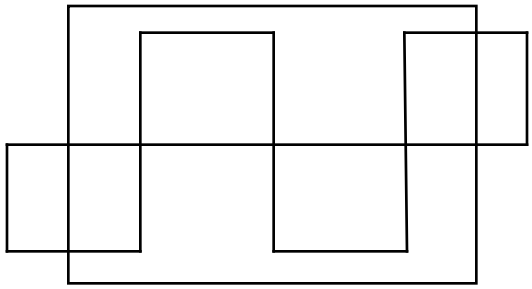


Fig. 1.10

1.8 Verifique se é possível traçar uma linha que não se cruze com ela própria e que cruze, uma única vez, cada um dos segmentos (arestas) da figura a seguir

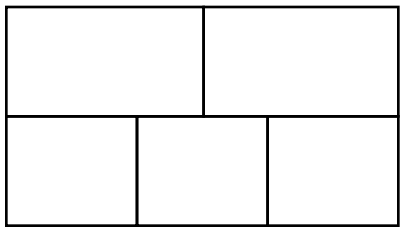


Fig. 1.11

Na figura que se segue, exemplifica-se uma tentativa não conseguida de obtenção da curva em causa.

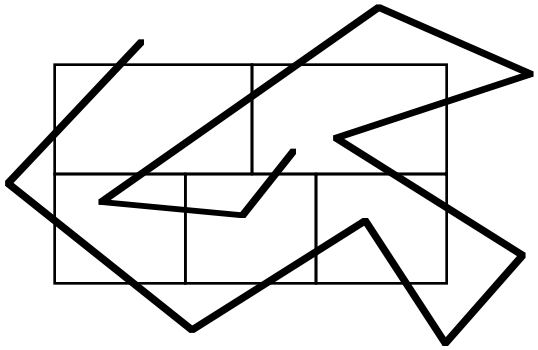


Fig. 1.12

1.9 - Relativamente ao teorema 1.5, faça a prova das implicações (ii) $\Rightarrow$ (iii) e (iii) $\Rightarrow$ (i).

1.10 Prove que um grafo G é uma floresta sse $\forall e \in E(G)$ o número de componentes do grafo $(V(G),E(G)\setminus\{e\})$ aumenta

1.11 Determine o número de arestas de um grafo conexo, G, com apenas dois circuitos, sabendo que $|V(G)|=n$.

1.12 Sabendo que um dado grafo tem m arestas e n vértices, determine o número de arestas do respectivo grafo complementar.

1.13 Enuncie e prove os resultados equivalentes ao teorema 1.1 e ao corolário 1.2 para grafos dirigidos, considerando tanto os circuitos de Euler como os trajectos de Euler nas respectivas versões dirigidas.

1.14 Considere os grafos G e H a seguir representados e determine, um estável máximo a clique máxima, um emparelhamento máximo para G, um conjunto de cobertura para H, $\alpha(H)$ e $\omega(\bar{G})$.

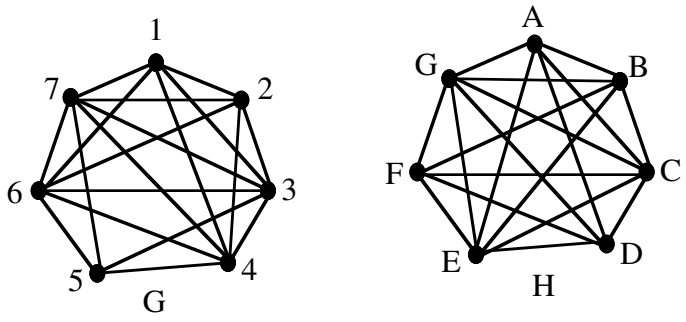


Fig. 1.13

2. Representação de Grafos

A um grafo ou multigrafo, G=(E,V), arbitrário é muitas vezes útil associar o que se designa por matriz de adjacência. Sendo A_G a **matriz de adjacência** de G, a entrada a_{ij} tem o valor 1 se o vértice v_i é adjacente ao vértice v_j e tem o valor 0 no caso contrário (note-se que, com este tipo de representação, nos multigrafos, a informação associada à existência de arcos (ou arestas) em paralelo não é considerada, e nos grafos e multigrafos dirigidos perde-se toda a informação associada ao sentido dos arcos).

Verifica-se assim que a matriz de adjacência de um grafo ou multigrafo G=(V,E) é uma matriz quadrada simétrica de ordem |V|.

Um outro modo de representar grafos e multigrafos consiste na utilização das designadas matrizes de incidência, as quais se definem do seguinte modo: sendo B_G a **matriz de incidência** do grafo G, cada coluna corresponde a um arco e verifica-se o seguinte:

a) se o grafo ou multigrafo é dirigido então as entradas b_{ij} de B_G são tais que

$$b_{ij} = \begin{cases} -1, \text{ se } v_i \text{ é a cabeça do arco } \mathbf{e}_j \\ +1, \text{ se } v_i \text{ é a cauda do arco } \mathbf{e}_j \\ 0, \text{ se } v_i \text{ não é nem a cabeça nem a cauda de } \mathbf{e}_j \end{cases}$$

b) se o grafo ou multigrafo é não dirigido então as entradas b_{ij} de B_G são tais que

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } \mathbf{e}_j \text{ é incidente no vértice } v_i \\ 0, \text{ no caso contrário} \end{cases}$$

A título de exemplo, considere-se o multigrafo dirigido, G=(V,E) representado na figura 2.1, onde se verifica que V={1,2,3,4,5} e E=[e_1=(1,2), e_2=(2,3), e_3=(3,5), e_4=(1,5), e_5=(2,4), e_6=(3,4), e_7=(4,5), e_8=(1,1), e_9=(3,3)].

Nestas condições, a matriz de adjacência, A_G, que lhe corresponde vem dada por:

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Por sua vez, a respectiva matriz de incidência, B_G, é a matriz:

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & +1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

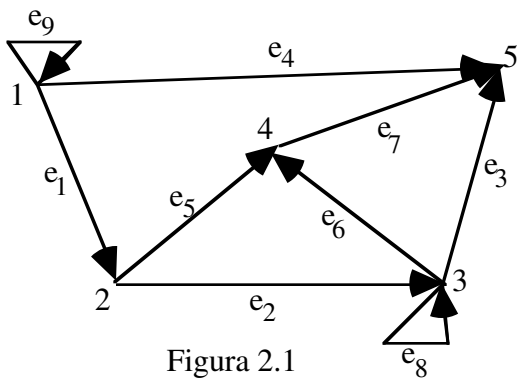


Figura 2.1

Deve observar-se que no grafo representado consideram-se que os vértices 1 e 3 são adacentes a eles próprios.

O teorema a seguir estabelece uma relação interessante entre as matrizes de adjacência e as matrizes de incidência de grafos dirigidos (deve observar-se que este teorema não é válido para multigrafos).

2.1 - Teorema

Seja G=(V,E) um grafo dirigido tal que $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_m\}$ e sejam A_G e B_G, respectivamente, a matriz de adjacência e a matriz de incidência de G, então $B_GB_G^t=D_G-A_G$, onde D_G é a matriz diagonal ($D_G=diag(d(v_1),\ldots,d(v_m))$) cujos elementos diagonais $d(v_i)$ são os graus dos vértices v_i, para i=1,…, m.

Prova:

Uma vez que $d(v_i)$ é o grau do vértice v_i, sendo $(B_GB_G^t)_{ij}$ a entrada da i-ésima linha e j-ésima coluna de $B_GB_G^t$ (para $1\leq i,j\leq m$), obtém-se:

$$(B_GB_G^t)_{ij}=\sum_{k=1}^{|E|}b_{ik}b_{jk}=\begin{cases} d(v_i), & \text{se } i=j \\ -1, & \text{se } v_i \text{ é adjacente a } v_j \\ 0, & \text{em todas as outras situações} \end{cases}$$

Com efeito, sendo i=j, $(B_GB_G^t)_{ij}$ corresponde ao produto da i-ésima linha de B_G por ela própria, e este produto determina o seu número de entradas não nulas, ou seja, o número de arcos (ou arestas) incidentes no vértice v_i. No caso de se ter $i\neq j$ com $(v_i,v_j)\in E$ ou $(v_j,v_i)\in E$, então vem que

$$\sum_{k=1}^{|E|}b_{ik}b_{jk}=\begin{cases}(-1)(1)\\ \text{ou}\\ (1)(-1)\end{cases}=-1.$$

Finalmente, nas restantes situações, verifica-se que não existe $k\in\{1,\ldots,m\}$ tal que $b_{ik}b_{jk}\neq 0$ (caso contrário existiria uma arco (v_i,v_j) ou (v_j,v_i)), donde se tira que $\sum_{k=1}^{|E|}b_{ik}b_{jk}=0$.

♦

No caso do grafo G ser não dirigido vem que $B_GB_G^t=A_G+D_G$ (deixando-se a prova desta afirmação como exercício).

Dado um grafo ou multigrafo G=(V,E), designa-se por **espaço dos vértices** de G o espaço vectorial sobre **K**, de todas as funções de V em **K** (onde **K** identifica um dos conjuntos **R** ou C, sendo **R** e C, respectivamente, o conjunto dos números reais e o conjunto dos números complexos) que se denota por $\mathbf{K}^V$. De modo análogo, designa-se por **espaço dos arcos** de G, o espaço vectorial sobre **K** de todas as funções de E em **K** que se denota por $\mathbf{K}^E$.

Considere-se o grafo G=(V,E) e suponha-se que $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_m\}$ e $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$, então $\dim\mathbf{K}^V=m$ e $\dim\mathbf{K}^E=n$. Os elementos **x** de $\mathbf{K}^V$ são usualmente escritos na forma $\mathbf{x}=\sum_{j=1}^{m}x_jv_j$. No somatório $\sum_{j=1}^{m}x_jv_j$ devemos encarar cada v_i como sendo uma função de V em **K** que é nula em todos os pontos à excepção de v_i onde toma o valor 1. Nestas condições, o conjunto $\{v_1,v_2,\ldots,v_m\}$ constitui uma base para $\mathbf{K}^V$ e o somatório anterior pode interpretar-se como uma representação de **x** nesta base. Analogamente, um elemento arbitrário de $\mathbf{K}^E$, **y**, pode representar-se por $\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{n}y_ie_i$.

Considerando $\langle v_1,v_2,\ldots,v_m\rangle$ e $\langle e_1,e_2,\ldots,e_n\rangle$ como sendo as bases canónicas, respectivamente, de $\mathbf{K}^V$ e $\mathbf{K}^E$. Podemos munir estes espaços vectoriais do produto interno usual $\langle\alpha,\beta\rangle=\sum_{k=1}^{p}\alpha_i\tilde{\beta}_i$, onde p corresponde a m ou n consoante se trate de $\mathbf{K}^V$ ou de $\mathbf{K}^E$, e $\tilde{\beta}_i$ identifica o conjugado de β_i para i=1, 2, … p. Considerando-se a norma induzida por este produto interno e tendo em conta a definição usual de ortogonalidade, com facilidade se conclui que as bases anteriormente referidas são ortonormais.

Seja C um circuito do grafo ou multigrafo dirigido G=(V,E), o qual vamos considerar munido de uma certa orientação. Por exemplo, supondo $C=[v_1,v_2,\ldots,v_k,v_1]$, se existe um arco $e_i=(v_j,v_{j+1})$ então dizemos que e_i tem a **orientação** de C. Este circuito pode definir-se como o elemento de $\mathbf{K}^E$, u, designado por **vector de circuito**, que corresponde à seguinte aplicação de E em {0,1,-1}:

$$u(e_i)=\begin{cases}1, & \text{se } e_i\in C \text{ e tem a orientação de C}\\ -1, & \text{se } e_i\in C \text{ mas não tem a orientação de C}\\ 0, & \text{se } e_i\notin C\end{cases}$$

2.2 - Exemplo

Na figura a seguir o vector $u\in\mathbf{K}^E$, tal que u=(-1,1,1,-1,1,0,0,0,0,0), representa o circuito C=1,2,3,4,5,1 cuja orientação é contrária aos ponteiros do relógio.

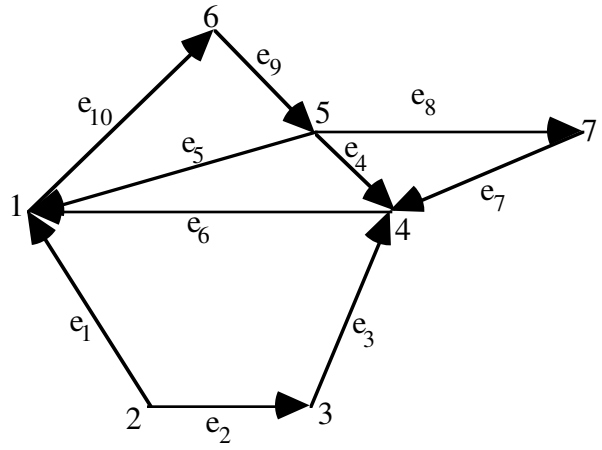


Fig. 2.2

O subespaço de $\mathbf{K}^E$ gerado pelos vectores que determinam circuitos designa-se por **subespaço dos circuitos** de G e, neste texto, denota-se por Circuitos(G).

Considerando uma partição dos vértices do G nos subconjuntos não vazios V' e V" (logo tem-se que $\{V',V"\}\neq\{\emptyset,V(G)\}$, $V(G)=V'\cup V"$ e $V'\cap V"=\emptyset$), o conjunto $Y=E(V',V")$ constituído pelos arcos (ou arestas) que ligam os vértices de V' aos vértices de V", designa-se por corte ou cocircuito de G.

Mais formalmente um **corte** ou **cocircuito** de G é qualquer subconjunto de arcos (ou arestas) que desconexa G em dois subgrafos G_1 e G_2.

Assim, se $Y=E(V_1,V_2)$ é um corte (ou cocircuito), então existem dois subgrafos induzidos, $G_1=G[V_1]$ e $G_2=G[V_2]$, tais que Y é o conjunto de arcos de G que unem G_1 e G_2. Reciprocamente, qualquer subconjunto Y de E que consiste precisamente nos arcos que ligam dois subgrafos de G, $G_1=G[V_1]$ e $G_2=G[V_2]$, é um corte. A um tal corte chamamos G_1-G_2-corte e no caso de $u\in V_1$ e $v\in V_2$ também o designamos por u-v-corte.

Tal como para os circuitos, associado a qualquer corte (ou cocircuito) de um grafo dirigido G=(V,E), existe um vector v de $\mathbf{K}^E$, designado por **vector de corte**, que define a seguinte aplicação de E em {0,1,-1}:

$$v(e_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } e_i \text{ parte de V' para V"} \\ -1, & \text{se } e_i \text{ parte de V" para V'} \\ 0, & \text{se } e_i \notin E(V',V") \end{cases}$$

Se G=(V,E) é um grafo ou multigrafo dirigido e V_1 é um subconjunto de V, então $\partial(V_1)$ denota o subconjunto de E correspondente aos arcos que ligam V_1 a $V\backslash V_1$ (ou seja, $\partial(V_1)=E(V_1,V\backslash V_1)$. Existe uma bipartição natural de $\partial(V_1)$ nos conjuntos $\partial^+(V_1)$ e $\partial^-(V_1)$ que correspondem, respectivamente, aos arcos com cauda em V_1 e cabeça em $V\backslash V_1$ e cauda em $V\backslash V_1$ e cabeça em V_1. Quando V_1 é um conjunto singular, i.e., $V_1=\{v\}$, em vez de $\partial(\{v\})$, usualmente, escreve-se (por abuso de linguagem) $\partial(v)$.

Tendo em conta as considerações anteriores, um cocircuito (corte) em G pode representar-se pelo subconjunto de E, $Y=\partial(V_1)$, particionado nos subconjuntos $Y^+=\partial^+(V_1)$ e $Y^-=\partial^-(V_1)$.

Em geral, dado um conjunto de arcos Z e estabelecida uma dada orientação como sendo a positiva (por exemplo, supondo que Z corresponde aos arcos de um circuito ou caminho, a orientação positiva seria a correpondente ao sentido do circuito ou caminho), Z^+ designa-se por conjunto de arcos para a frente e Z^- por conjunto de arcos para traz.

O subespaço de $\mathbf{K}^E$ gerado pelos vectores de cortes designa-se por **subespaço dos cortes** ou **subespaço dos cocircuitos** de G e, neste texto, denota-se por Cortes(G) ou Cocircuitos(G).

2.3 Exemplo

Considere-se o grafo G a seguir indicado.

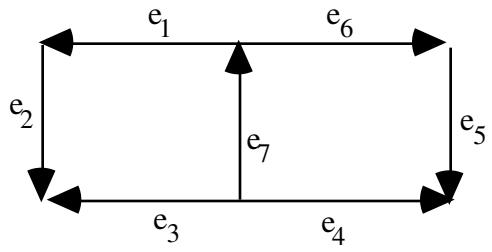


Fig. 2.3

O espaço dos arcos do grafo representado é $K^E=K^7$. O circuito definido por $X^+=\{e_1, e_2, e_7\}$ e $X^-=\{e_3\}$, corresponde ao vector $x=[1,1,-1,0,0,0,1]^t$. De um modo semelhante se vê que $x'=[0,0,0,-1,1,1,1]^t$ é o vector de outro circuito. Nestas condições tem-se que $x+x'=[1,1,-1,-1,1,1,2]^t$ é um vector de Circuitos(G).
Os vectores $y=[0,0,1,0,-1,0,1]$ e $y'=[-1,0,-1,0,0,0,0]^t$ são claramente vectores de cocircuitos. Logo $y+3y'=[-1,0,-2,0,-1,0,1]^t$ é um vector de Cocircuitos(G).

Deve observar-se que dado um o vector característico, y, de um subconjunto próprio não vazio de vértices V_1 de um grafo dirigido conexo G, y^tB_G corresponde ao vector do corte $\partial(V_1)$.

Segue-se o teorema que constitui o principal resultado de dualidade linear no contexto dos grafos.

2.4 Teorema (lema de Farkas para grafos e multigrafos)
Seja G um grafo (ou multigrafo) dirigido conexo e sejam $u,v\in V(G)$.
Então ou
a) $\exists$ um caminho entre u e v, com um conjunto de arcos P tal que $P^-=\emptyset$
(i. e, existe um caminho dirigido entre u e v), ou
b) $\exists$ um u-v-corte Y tal que $Y^+=\emptyset$,
mas não ambos.

Prova:

A prova é construtiva. Vai-se construindo o subconjunto de V, V_1, constituído pelos vértice que podem ser alcançados a partir de u, por um caminho dirigido.

Algoritmo.
Inicilização: $V_1=\{u\}$;
Enquanto $\partial^+(V_1)\neq\emptyset$ e $v\notin V_1$ faz
escolher **e**$=(s,t)\in\partial^+(V_1)$;
$V_1=V_1\cup\{t\}$;
predecessor(t)=s
fimfaz
Fim do algoritmo.

Obviamente que o algoritmo termina no máximo em $|V|$ passos. Se termina com $v \in V_1$, sabemos que existe um caminho dirigido de u para v (e este caminho poderá ser obtido através da função predecessor:$V_1\backslash\{u\}$--->V_1 definida pelo algoritmo).

Se o algoritmo termina com $v \notin V_1$, então $\partial(V_1)=\partial^-(V_1)$ é um corte que está de acordo com b).

♦

Note-se que denotando um caminho dirigido entre os vértices u e v de um grafo dirigido G pelo vector do espaço dos arcos, x, de componentes binários 0 e 1 (tais que $x_e=1$ se e pertence ao caminho dirigido e $x_e=0$ no caso contrário), a existência deste caminho dirigido garante a existência de uma solução não negativa para o sistema $B_G x=e_u-e_v$, onde e_u e e_v denotam, respectivamente, o u-ésimo e o v-ésimo vector da base canónica do espaço dos vértices. Por sua vez a existência de um u-v-corte Y tal que $Y^+=\emptyset$ implica a existência de um vector de componentes binárias 0 e 1 do espaço dos vértices y, tal que $y^t B_G \leq 0$ e $y^t(e_u-e_v)>0$. Consequentemente, aplicando o lema de Farkas, tal como foi apresentado em PMO I, podemos concluir que ou existe um caminho nas condições referidas pelo teorema 2.4 a) ou existe um corte nas condições referidas em b) mas não ambos.

O teorema a seguir estabelece a relação de ortogonalidade existente entre o espaço dos circuitos e o espaço dos cocircuitos para grafos (ou multigrafos) dirigidos.

2.5 Teorema

Os subespaços de circuitos e cocircuitos de um grafo (ou multigrafo) dirigido G são ortogonais.

Prova:

Seja X ($E(G) \supseteq X$) um circuito, particionado em X^+ e X^-. Seja Y ($E(G) \supseteq Y$) o cocircuito que desconexa G em G_1 e G_2 e assuma-se que Y^+ é o conjunto de arcos de Y que ligam G_1 a G_2 e Y^- corresponde ao conjunto de arcos que ligam G_2 a G_1. Sejam x e y

os correspondentes vectores de $\mathbf{K}^E$ associados, respectivamente, a X e a Y. Então é fácil ver que o produto interno $y^t x = \sum_{e\in Y} y_e x_e = \sum_{e\in X} y_e x_e = \sum_{e\in Y\cap X} y_e x_e = \sum_{e\in Y^+\cap X} y_e x_e + \sum_{e\in Y^-\cap X} y_e x_e$,

corresponde ao o número de vezes que vamos de G_1 para G_2 menos o número de vezes que vamos de G_2 para G_1, quando se percorre o circuito X, pelo que se obtém $x^t y=0$. Logo x e y são ortogonais, o que completa a prova, uma vez que estes espaços são gerados, respectivamente, pelos vectores de circuitos e cocircuitos.

♦

2.6 Definição

Dado um grafo dirigido ou não dirigido G, designa-se por **conjunto independente de arcos ou arestas** todo o subconjunto E' de E(G) que não contém circuitos e designa-se por **base** de G todo o subconjunto independente de arcos ou arestas maximal (no sentido da inclusão).

Na figura a seguir exemplifica-se uma base de um grafo dirigido com duas componentes, onde as arcos mais carregados denotam a base em causa.

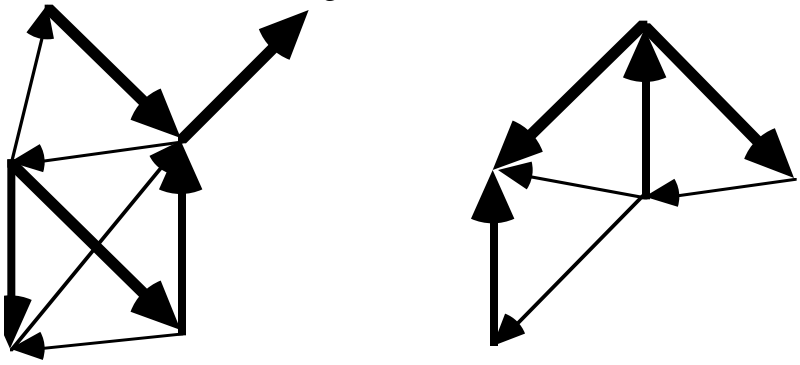


Fig. 2.4

Quando o grafo é conexo, uma base coincide com uma árvore abrangente e quando uma base tem várias componentes (árvores abrangentes) trata-se de uma floresta.

2.7 - Teorema

A matriz de incidência de um grafo dirigido, G=(V,E), com k componentes tem característica |V|-k.

Prova:

Sendo B_G a matriz de incidência de G, dado que a cada componente de G corresponde o subgrafo $G_j=(E_j,V_j)$ para j=1, …, k, B_G pode ser repartida nos blocos, B_{G_j} (de $n_j=|V_j|$ linhas e $m_j=|E_j|$ colunas) para j=1, … , k, com os demais elementos nulos.

Considere-se uma componente conexa arbitrária $G_j=(E_j,V_j)$ e seja

$$B_{G_j}=[a_{1_j},a_{2_j},\ldots,a_{m_j}]$$

o correspondente bloco (de B_G) que lhe está associado (onde b_{i_j}, para i=1, … , m_j, denota a subcoluna de B_G associada a $E_j=\{e_{1_j},e_{2_j},\ldots,e_{m_j}\}$ e a $V_j=\{v_{1_j},v_{2_j},\ldots,v_{n_j}\}$. Pelo teorema 1.6 G_j contém uma árvore abrangente, a qual determina um conjunto de $|V_j|$-1 arcos (e, consequentemente, um conjunto de n_j-1 colunas de A_{G_j}). Considerando apenas o subgrafo definido pela árvore abrangente e, consequentemente, a submatriz de A_{G_j}, $A^0_{T_j}$, definida pelas colunas que lhe dizem respeito, existe pelo menos um vértice, v', com grau 1. Logo, após permutação das linhas e colunas de $B^0_{T_j}$, pode obter-se $B^0_{T_j}=\begin{bmatrix} \pm 1 & \mathbf{0}' \\ \mathbf{u}' & A^1_{T_j} \end{bmatrix}$, onde $\mathbf{0}'$ denota um vector linha com n_j-2 zeros, $\mathbf{u}'$ um vector coluna com n_j-1 componentes e $B^1_{T_j}$ a matriz de incidência associada à subárvore obtida quando se retira o vértice v' (bem como o arco que lhe é incidente). Nestas condições $B^1_{T_j}$ continua a definir uma árvore e, consequentemente, existe pelo menos um vértice, v", com grau 1.

Procedendo como anteriormente pode obtém-se

$$B^0_{T_j}=\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & \mathbf{0}'' \\ u_1 & \pm 1 & \mathbf{0}'' \\ \mathbf{u}'' & \mathbf{v}'' & A^2_{T_j} \end{bmatrix},$$

onde $\mathbf{0}''$ denota um vector linha com n_j-3 zeros, $\mathbf{u}''$ e $\mathbf{v}''$ denotam vectores colunas com q_j-2 componentes e $B^2_{T_j}$ a matriz de incidência associada à subárvore obtida quando se retira o vértice v" (bem como o arco que lhe é incidente). Repetindo, sucessivamente, este processo (retirando-se um vértice de cada vez e determinando-se a respectiva subárvore abrangente) obtém-se, primeiro, a 1ª linha como múltiplo escalar não nulo do primeiro

vector da base canónica de $\mathbf{R}^{n_j-1}$ depois, o subvector das últimas n_j-2 componentes da 2ª linha como múltiplo escalar não nulo do segundo vector da base canónica de $\mathbf{R}^{n_j-2}$, etc. Nestas condições vem que a (n_j-1)-ésima linha tem a (n_j-1)-ésima componente não nula e como consequência, pode concluir-se que as primeiras n_j-1 linhas de $B^0_{T_j}$ são linearmente independentes, pelo que a característica de B_{G_j} é igual a n_j-1 (uma vez que somando as n_j linhas de B_{G_j} se obtém o vector nulo).

Logo, a característica de B_G é $\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)=\sum_{j=1}^{k}(|V_j|-1)=|V|-k$.

♦

Como consequência imediata deste teorema, decorre que acrescentando um arco incidente num único vértice (i.e, um arco só com cabeça ou só com cauda, o qual usualmente se designa por raiz) a cada uma das componentes de um grafo G, vem que a submatriz (da matriz de incidência) das colunas associadas a uma base de G é uma submatriz básica (ou seja, é invertível). Com efeito, para cada componente, G_j, após eventual reordenação dos vértices e dos arcos, obtém-se uma árvore abrangente cuja submatriz $B^0_{T_j}$ apresenta o aspecto

$$B^0_{T_j}=\begin{bmatrix} \pm1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & \pm1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & * & \pm1 \\ * & * & \dots & * & * \end{bmatrix}.$$

Consequentemente, sendo e_{n_j} (n_j-ésimo vector da base canónica de $\mathbf{R}^{n_j}$, onde $n_j=|V_j|$) a coluna associada à raiz, a correspondente submatriz de incidência (a matriz anterior acrescentada da coluna e_{n_j}) apresentará $|V|_j$ linhas linearmente independentes

$$\begin{bmatrix} \pm1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ * & \pm1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & * & \pm1 & 0 \\ * & * & \dots & * & * & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercícios

2.1 - Dado um grafo G tal que $V(G)=\{v_1,\ldots,v_n\}$, prove que a entrada (i,j) da p-ésima potência de A_G, A_G^p, é igual ao número de passeios de comprimento p entre o vértice v_i e o vértice v_j.

Sugestão: Notando que o resultado é trivialmente verdadeiro para p=0, faça a prova por indução sobre p, observando que $[A_G^p]_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}[A_G^{p-1}]_{i,k}[A_G]_{k,j}$.

2.3 - Como consequência do resultado anterior prove que um grafo G de ordem n é conexo sse $(A_G+I)^{n-1}$ não tem entradas nulas.

2.4 - Prove que x é o vector característico de um estável para o grafo G, sse

$$x^tA_Gx=0.$$

2.5 - Dado um grafo não dirigido G tal que $V(G)=\{v_1,\ldots,v_n\}$ e sendo B_G e A_G, respectivamente, a matriz de incidência e a matriz de adjacência de G, prove que se verifica a igualdade $B_G^tB_G=A_G+\text{diag}(d(v_1),\ldots,d(v_n))$.

2.6 - Sendo G um grafo (ou multigrafo) dirigido conexo, prove que $\forall e\in E(G)$ ou (i) existe um circuito C ($E(G)\supseteq C$) tal que $e\in C$ e $C^-=\emptyset$, ou (ii) existe um cocircuito Y($E(G)\supseteq Y$) tal que $e\in Y$ e $Y^+=\emptyset$, mas não ambas as situções.
Sugestão: suponha que e=(u,v) e utilize o lema de Farkas para grafos e multigrafos aplicado ao grafo $(V(G),E(G)\setminus\{e\})$ e aos vértices u e v.

2.7 - Dado um grafo dirigido conexo, G, cuja matriz de incidência é B_G e dado um subconjunto de V(G), $V'\notin\{V(G),\emptyset\}$, prove que, sendo y o vector característico V', y^tB_G é o vector característico do cocircuito $\partial(V')$.

2.8 - Sendo $P=[v_0,v_1,\ldots,v_p]$ um caminho (não necessariamente dirigido) do grafo dirigido G e seno x o respectivo vector do espaço dos arcos, prove que se $B_Gx=b$, então b é um vector do espaço dos vértices com 1 na v_0-ésima componente, -1 na v_p-ésima componente e 0 nas restantes.

2.9 - Prove que o subespaço de cocircuitos de um grafo dirigido está contido no núcleo da respectiva matriz de incidência.

3. Poliedros Combinatórios e Teorema de Konig

Uma ideia muito simples, com consequências muito úteis em Optimização Combinatória e que tem sido alvo de intensa investigação, consiste em formular os problemas combinatórios como problemas de programação linear inteira ou mesmo (em certos casos) como problemas de programação linear.

Suponha-se que temos um problema de minimização de uma função c: 2^E ---> **R**, num conjunto S de soluções admissíveis tal que $2^E \supseteq S$ (note-se que 2^E corresponde ao conjunto das partes de E). Denote-se por $\mathbf{R}^E$, o espaço vectorial real |E|-dimensional, onde cada vector $x \in \mathbf{R}^E$ tem as suas componentes indexadas pelos elementos de E. Para cada subconjunto de E, F ($E \supseteq F$) denotaremos o seu vector característico por x(F) ($x(F)_e=1$ se $e \in F$ e $x(F)_e=0$ se $e \notin F$).

Ao conjunto S de soluções admissíveis associa-se o invólucro convexo dos vectores característicos dos elementos de S (note-se que S é um conjunto de subconjuntos de E), ou seja, um politopo P_S tal que $\mathbf{R}^E \supseteq P_S$ (P_S=Conv({$x(F) \in \mathbf{R}^E$: $F \in S$}.

Nestas condições, o problema de optimização combinatória

$$(\Pi) \qquad \min\{c(F): F \in S\},$$

pode agora escrever-se (considerando c como um vector de $\mathbf{R}^E$) como segue

$$(P) \qquad \min\{c^t x: x \in P_S\}.$$

Qualquer solução admissível $F \in S$ corresponde a um vértice do politopo P_S e reciprocamente. Como P_S é um politopo, o problema (P) é um programa linear e para qualquer função objectivo linear, o programa (P) tem uma solução óptima que é um vértice de P_S, resolvendo (P) podemos obter um vector característico óptimo, que corresponderá ao conjunto $F \in S$ que é a solução óptima do problema combinatório (Π).

Antes de prosseguirmos, convém introduzir o conceito de **matriz totalmente unimodular** e alguns dos resultados que lhe estão associados.

3.1 - Definição

Uma matriz quadrada B, com entradas inteiras, designa-se por unimodular se o seu determinante é tal que det(B)=±1.Uma matriz arbitrária A, com entradas inteiras, designa-se por totalmente unimodular se toda a submatriz de A, quadrada e não singular, é unimodular.

De acordo com a definição 3.1, se uma dada matriz B é unimodular, e b é um vector de termos independentes do sistema Bx=b cujas componentes são inteiras, então $x=B^{-1}b$ pode ser obtido pela regra de Cramer (supondo $x\in\mathbf{R}^n$ e sendo $b_1, b_2, \ldots, b_n$ as colunas de B, ou seja, $B=[b_1\ b_2\ \ldots\ b_n]$) fazendo:

$$x_i=\frac{\det([b_1\ldots b_{i-1}\ b\ b_{i+1}\ldots b_n])}{\det(B)},$$

para i=1, 2, … , n.

Como consequência pode concluir-se que as componentes de x são inteiras (uma vez que o denominador de fracção acima é ±1 e o numerador é um inteiro).

3.2 Teorema

Dado um politopo definido pelo conjunto $S=\{x\in\mathbf{R}^n: Ax=b, x\geq 0\}$, onde A é uma matriz totalmente unimodular, se as componentes de b são inteiras, então os vértices de S (ou seja, as soluções básicas admissíveis para S) têm componentes inteiras.

Prova:

A prova decorre de um modo imediato das considerações anteriormente feitas.

♦

3.3 Teorema

Uma matriz A tal que $a_{ij}\in\{0,+1,-1\}$ é totalmente unimodular se, não mais do que duas componentes em cada coluna são não nulas e se os índices linha de A podem ser particionadas em dois subconjuntos I_1 e I_2 tais que:

a) Se uma coluna tem duas componentes com o mesmo sinal, então as linhas correspondentes têm os seus índices em subconjuntos diferentes;

b) Se uma coluna tem duas componentes de sinal diferente, então as linhas correspondentes têm os seus índices no mesmo subconjunto.

Prova:

A prova será feita por indução sobre a dimensão das submatrizes quadradas de A, observando-se que qualquer submatriz com um único elemento é unimodular.

Seja C uma submatriz quadrada de A de dimensão k. Se C tem uma coluna de zeros então é singular. Se C tem uma coluna com uma única componente não nula, poderemos expandir o respectivo determinante ao longo dessa coluna, pelo que o resultado pretendido decorre da hipótese de indução. No último caso, quando C tem duas componentse não nulas em cada uma das suas colunas, as condições a) e b) implicam que, para qualquer índice coluna de C, j, se verifique a igualdade

$$\sum_{i\in I_1} a_{ij} = \sum_{i\in I_2} a_{ij},$$

pelo que as linhas de C são linearmente dependentes, e consequentemente C é singular.

♦

Deste último teorema decorre que qualquer matriz de incidência de um grafo dirigido é totalmente unimodular (por sua vez qualquer matriz de incidência de um grafo não dirigido e bipartido é também totalmente unimodular).

3.4 Teorema

Seja G=(V,E) um grafo bipartido. Então o invólucro convexo dos vectores característicos dos emparelhamentos M de G ("matching polytope" de G) fica definido pelo seguinte conjunto de desigualdades:

$$\sum_{e\in \partial(v)} x_e \le 1 \qquad \forall v\in V, \qquad (3.4.1)$$

$$x_e \ge 0 \qquad \forall e\in E. \qquad (3.4.2)$$

onde, para cada $v\in V$, $\partial(v)$ denota o corte definido por $\{v\}$, i.e, o conjunto de arestas incidentes em v.

Prova:

Identifique-se por M(G) o conjunto dos vectores característicos representativos dos "matchings" de G (M(G)={x(M): M é "matching" de G}), e por X o subconjunto de $\mathbf{R}^E$ que satisfaz as restrições (3.4.1)-(3.4.2).

Dado um "matching" arbitrário M de G, é claro que o seu vector característico x(M) satisfaz o conjunto de restrições (3.4.1)-(3.4.2) (note-se que em M não existem arcos com vértices repetidos, logo não existe um vértice v, com mais do que um arco incidente pertencente a M). Deste modo pode concluir-se que $X \supseteq M(G)$.

Resta provar que qualquer vértice do politopo definido por (3.4.1)-(3.4.2) é um "matching" de G [8].

Se às restrições (3.4.1) acrescentarmos as variáveis de desvio, obtém-se um sistema de $|V|$ equações a $|E|+|V|$ variáveis, cuja matriz dos coeficientes, [A,I], satisfaz as condições do teorema 3.3. Logo, trata-se de uma matriz totalmente unimodular, pelo que as suas submatrizes quadradas não singulares têm determinante igual a ±1. Como consequência, as soluções básicas admissíveis para (3.4.1)-(3.4.2) têm componentes pertencentes ao conjunto {0,1} e, consequentemente, as soluções básicas admissíveis para (3.4.1)-(3.4.2) são vectores característicos de conjuntos de arcos que não têm vértices comuns, ou seja, de "matchings".

♦

É facil ver que as inequações (3.4.1) e (3.4.2) não são suficientes para caracterizarem um "matching" em grafos não-bipartidos. Por exemplo, se considerarmos

---

[8]Note-se que deste modo se prova também que qualquer vetor característico de um "matching" é um vértice de X, pois caso contrário seria uma combinação linear convexa não trivial de vectores cujas componentes estão em {0,1}, o que não é possível.

o grafo da figura 3.1, o qual apresenta um circuito de comprimento 3, então $x=\frac{1}{2}(1,1,1)$ é um vértice do politopo definido por (3.4.1)-(3.4.2).

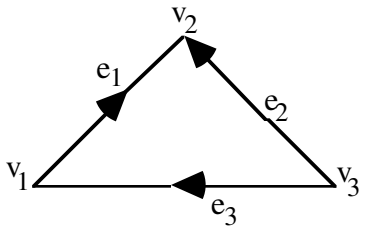


Fig. 3.1

Com efeito, a partir desta figura com facilidade se verifica que o conjunto de restrições (3.4.1)-(3.4.2) relativo ao grafo representado, corresponde às restrições:

$$\begin{aligned} x_{e_1} + x_{e_2} &\leq 1 \\ x_{e_2} + x_{e_3} &\leq 1 \\ x_{e_1} + x_{e_3} &\leq 1 \\ x_{e_1}, x_{e_2}, x_{e_3} &\geq 0 \end{aligned}$$

3.5 Teorema

Se A é uma matriz totalmente unimodular e c um vector de componentes inteiras, então os vértices do poliedro convexo $P=\{y: y\geq 0, y^tA\geq c^t\}$ tem componentes inteiras.

Prova:

Um vez que A é totalmente unimodular, então conclui-se que A^t é também totalmente unimodular (note-se que o determinante das submatrizes C de A^t é igual ao determinante das submatrizes C^t de A). Nestas condições pode concluir-se também que, por sua vez, a matriz $[A^t,-I]$ é também totalmente unimodular. Com efeito, o cálculo do determinante de qualquer submatriz quadrada de $[A^t,-I]$, C, que contenha (no seu todo ou em parte) uma ou mais colunas de -I poderá ser feito (no caso de nenhuma delas ser a coluna nula) expandindo sucessivamente essas colunas até se obter uma submatriz

quadrada de A^t, C'. Como consequência (dado que essas colunas são subvectores da base canônica) obtém-se $\det(C)=(-1)^p\det(C')=\pm 1$.

Nestas condições, do teorema 3.2 decorre que os vértices de $P=\{y: y\geq 0, A^t y\geq c\}$ têm componentes inteiras.

♦

Como corolário deste teorema segue-se que, dada uma matriz A totalmente unimodular, um vector de inteiros b e um vector de inteiros c, ambos os lados da relação de dualidade:

$$\max\{c^t x: x\geq 0, Ax\leq b\}=\min\{y^t b: y\geq 0, y^t A\geq c^t\}$$

é satisfeita por vectores de inteiros x* e y*, desde que os respectivos programas lineares tenham solução óptima finita. Para garantir esta última condição basta concluir que ambos os poliedros são não vazios ou que um dos programs lineares tem óptimo finito.

Do teorema 3.2 decorre ainda que se pretendermos determinar o "matching" de cardinalidade máxima deveremos maximizar a função objectivo $\sum_{e\in E} x_e$ sujeita às restrições (3.4.1)-(3.4.2), ou seja, resolver o programa linear (P):

$$\max \sum_{e\in E} x_e$$

$$\text{s. a} \sum_{e\in \partial(v)} x_e \leq 1 \qquad \forall v\in V,$$

$$x_e \geq 0 \qquad \forall e\in E.$$

Passando ao dual e identificando-se por V(**e**) o conjunto de vértices associados ao arco **e** (ou seja, os vértices nos quais **e** é incidente), obtém-se o programa linear (D):

$$\min \sum_{v\in V} y_v$$

$$\text{s. a} \sum_{v\in V(e)} y_v \geq 1 \qquad \forall e\in E, \qquad (3.4.3)$$

$$y_v\geq 0 \qquad \forall v\in V \qquad (3.4..4).$$

É fácil ver que este problema correponde à determinação do vector característico do conjunto de cobertura de arestas por vértices de G de cardinalidade mínima[9].

Com efeito, qualquer vector de inteiros de componentes pertencentes a {0,1} que satisfaça as restrições (3.4.3)-(3.4.4) é uma cobertura de arestas por vértices de G. Por outro lado, qualquer vector característico de um subconjunto de vértices U, y(U), que seja uma cobertura de arestas por vértices de G satisfaz as restrições (3.4.3)-(3.4.4).

Uma vez que, na sequência do teorema 3.5, este problema dual tem uma solução óptima de componentes inteiras (vértice do poliedro definido pelas restrições (3.4.3)-(3.4.4)), podemos concluir que existe uma solução óptima que corresponde ao vector característico do conjunto de cardinalidade mínima de cobertura de arestas por vértices. Por outro lado, uma vez que os valores óptimos do primal e do dual coincidem, podemos ainda concluir que, em grafos bipartidos, a cardinalidade do emparelhamento máximo é igual à cardinalidade do conjunto de cardinalidade mínima de cobertura de arestas por vértices.

3.6 Teorema [de Konig]

Num grafo bipartido a cardinalidade da cobertura mínima de arestas por vértices é igual à cardinalidade do emparelhamento máximo.

Prova:

A prova decorre da análise anteriormente feita.

♦

[9] Logo, o seu complementar corresponde ao estável máximo.

Exercícios

3.1 - Prove que a matriz de incidência de qualquer grafo dirigido é totalmente unimodular.

3.2 - Prove que a matriz de incidência de um grafo bipartido não dirigido é uma matriz totalmente unimodular.

3.3 - Dada uma matriz rectangular com m linhas e n colunas ($m<n$) e entradas binárias 0 e 1, supondo que em cada linha existem k ($k\leq m$) zeros, prove que o número máximo de zeros independentes (i.e, escolhidos de tal forma que não existam dois na mesma linha ou coluna) é não inferior a k e não superior a m.
Sugestão: (i) considere os índices linha e coluna da matriz como vértices de um grafo bipartido e que um zero na posição (i,j) significa que existe uma aresta entre o vértice i e o vértice j; (ii) aplique o teorema de Konig.

3.4 - Suponha que um dado empresário dispõe da possibilidade de obter vários financiamentos em Euros, a partir de cinco programas europeus (com juros favoráveis) e que os diferentes programas impõem, respectivamente, os limites de financiamento:

100 000 , 150 000, 80 000, 220 000 e 120 000.

Sumponha que o empresário tem em carteira oito projectos, que pretende obter o maior número possível de financiamentos (de modo a deversificar a sua carteira e, consequentemente, reduzir o risco) e que estes projectos exigem os financiamentos indicados na tabela a seguir.

Projectos	Financiamento Mínimo Necessário
Projecto A	70 000 Euros
Projecto B	95 000 Euros
Projecto C	110 000 Euros
Projecto D	140 000 Euros
Projecto E	105 000 Euros
Projecto F	50 000 Euros
Projecto G	100 000 Euros
Projecto H	115 000 Euros

Supondo ainda que cada projecto só pode concorrer a um único programa e que cada programa financia um único projecto do mesmo empresário, determine a estratégia de concurso (de projectos a programas de financiamento) que conduzirá ao maior número de projectos financiados.

Índice Remissivo

arco ou aresta incidente, 2
aresta, 1
árvore, 11
árvore abrangente, 12
base, 29
cabeça de um arco, 14
caminho, 5
cauda de um arco, 14
ciclo, 6
circuito, 6
circuito de Euler, 7
Circuitos(G), 25
clique, 15
cocircuito, 25
Cocircuitos(G), 26
complementar de um grafo, 10
componente conexa de um grafo, 7
comprimento de um caminho, 5
comprimento de um trajecto, 5
conjunto de cobertura, 15
conjunto independente de arcos ou arestas, 29
conjunto independente de vértices, 14
corte, 25
Cortes(G), 26
diâmetro de um grafo, 6
dimensão de um grafo, 3
emparelhamento, 17
espaço dos arcos, 23
espaço dos vértices, 23
estável, 14
floresta, 13, 29
grafo, 1
grafo bipartido, 10

grafo bipartido completo, 10
grafo completo, 3
grafo conexo, 7
grafo dirigido, 1
grafo nulo, 3
grafo regular, 3
grafo vazio, 3
grau de um vértice, 3
hiperaresta, 2
hipergrafo, 1
intersecção de grafos, 6
lema de Farkas para grafos e multigrafos, 27
matching polytope, 35
matriz de adjacência, 21
matriz de incidência, 21
matriz totalmente unimodular, 33
matriz unimodular, 34
multigrafo, 2
número de clique, 15
número de estabilidade, 14
ordem de um grafo, 3
orientação de um circuito, 24
passeio, 5
problema das oito rainhas, 17
semigrau exterior de um arco, 14
semigrau interior de um arco, 14
subespaço dos circuitos, 25
subespaço dos cocircuitos, 26
subespaço dos cortes, 26
subgrafo, 4
subgrafo induzido, 4
supergrafo, 4
Teoria dos Grafos, 5
trajecto, 5
trajecto de Euler, 7

união de grafos, 6
valência de um vértice, 3
vector de circuito, 24
vector de corte, 25
vértice, 1
vértices adjacentes, 2