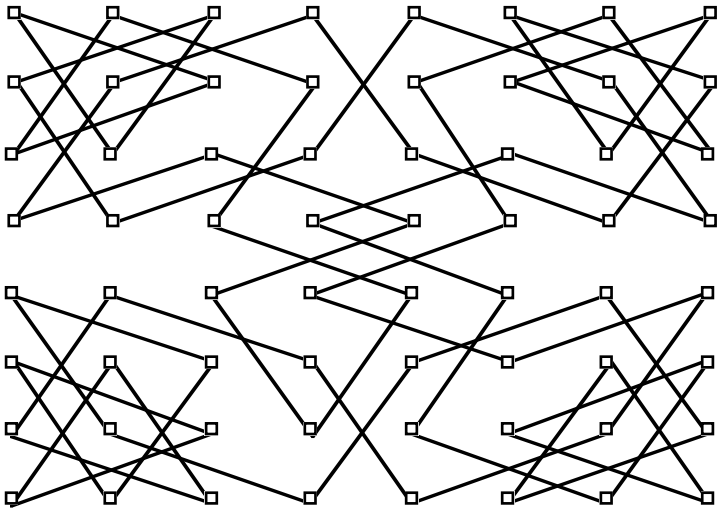
Teoria dos Grafos

e

Optimização Combinatória



Domingos M. Cardoso

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro - 1997

Índice

1. Introdução 1

2. Noções e resultados básicos sobre grafos. 4

Circuitos de Euler.....5

Grafos bipartidos 7

Árvores.....8

3. Grafos planares.....10

Fórmula de Euler.....12

Coloração de vértices 15

Duais topológicos de grafos planares.....19

4. Espaços vectorias associados a grafos e multigrafos 22

5. Conceitos e Problemas Combinatórios Associados a Grafos.....35

6. Circuitos de Hamilton.....39

Código de Gray.....41

Problema do caixeiro viajante (TSP) 45

7. Problemas de caminho mais curto.....53

Circuito de comprimento mínimo 57

Árvore abrangente de custo mímino.....59

8. Problemas de fluxo máximo 62

Caminhos dirigidos disjuntos.....70

9. Problemas de emparelhamento máximo.....71

Emparelhamentos generalizados de peso máximo.....77

Bibliografia.....81

Índice Alfabético Remissivo.....82

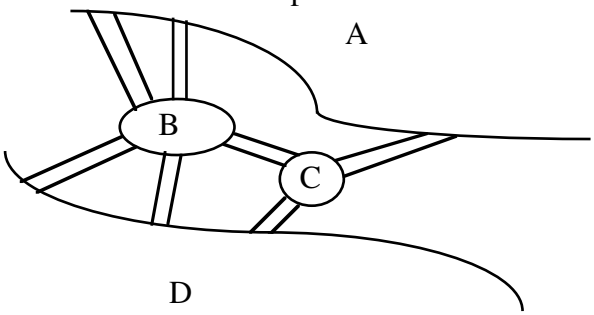
1. Introdução

A representação de problemas através de redes e grafos, permite visualizá-los por intermédio de diagramas construídos de modo a tornar possível a captação das relações existentes entre as entidades em jogo. Tem sido precisamente esta característica que tem contribuído para uma cada vez maior utilização deste tipo de estruturas.

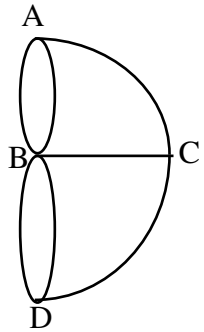
Diz um ditado antigo que *uma figura diz mais do que mil palavras*.

A origem da teoria dos grafos é, em geral, associada ao probema das 7 pontes de Konigsberg (cidade da Prússia que agora se designa por Kaliningrad).

Parte desta cidade localizava-se em duas ilhas do rio Pregel as quais estavam ligadas às margens e uma à outra através de 7 pontes (conforme a figura a seguir documenta). Consta que os habitantes gostavam de dar passeios de modo a atravessar todas as pontes e que alguns andavam particularmente aborrecidos pelo facto de não encontrarem um trajecto (com partida e chegada a um mesmo lugar) que lhes permitisse atravessar apenas uma vez cada uma das pontes.

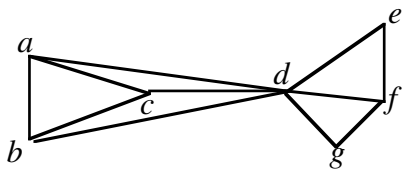


O matemático suiço Leonhard Euler (1707-1783) ao tomar conhecimento deste problema resolveu-o (indicando a impossibilidade da existência de um tal percurso) modelando-o conforme a figura a seguir indica.



Um **grafo** G=(V,E) consiste de um conjunto finito V de vértices e de um conjunto E de arcos (ou arestas) que ligam diferentes pares de vértices. Quando, entre dois quaisquer vértices, existem 2 ou mais arcos ou arestas (como é o caso do modelo obtido por Euler para representar o problema das 7 pontes de Konigsberg) ou quando existem lacetes (arcos ou arestas cujos extremos estão ligados ao mesmo vértice) dizemos que se trata de um **multigrafo** e, neste caso, E denota uma lista de arcos (ou arestas), na qual podem aparecer arcos (ou arestas) repetidos.

A figura a seguir representa o grafo G=(V,E) com V={a,b,c,d,e,f,g} e E={{a,b},{a,c},{a,d},{b,c},{b,d},{c,d},{d,e},{d,f},{d,g},{e,f},{g,f}}.

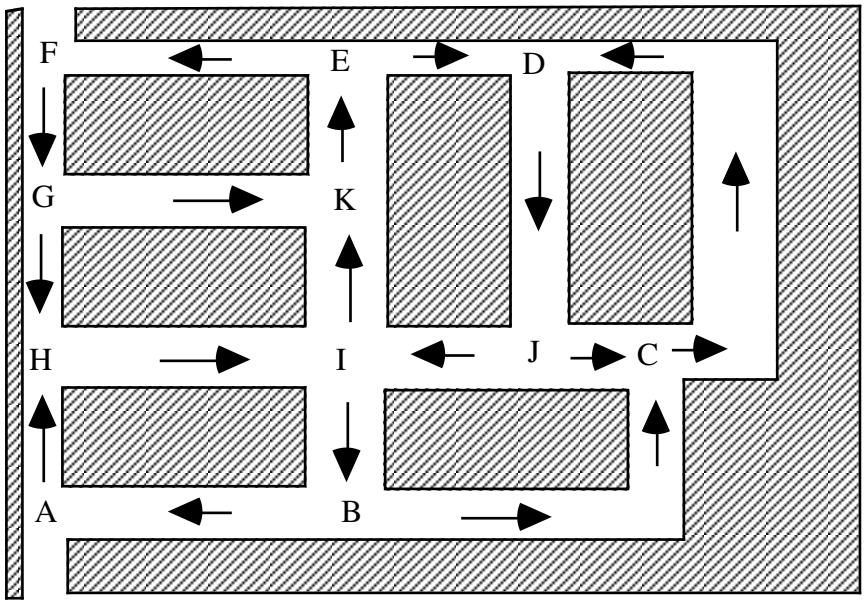


Dois vértices dizem-se **adjacentes** se existe um arco que os une. Por exemplo no grafo G, acima respresentado, o vértice *a* é adjacente aos vértices *b*, *c* e *d*, mas não é adjacente nem ao vértice *e*, nem ao *f* nem ao *g*.

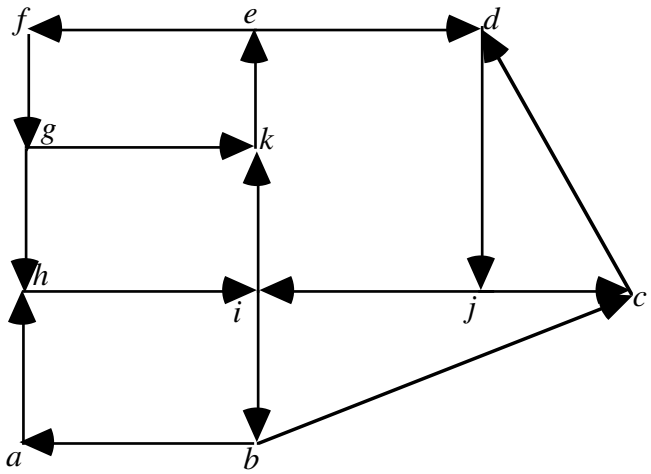
Um grafo diz-se **completo** (e tendo n vértices denota-se por $\mathbf{K_n}$) quando todos os vértices são adjacentes entre si.

Muitas vezes existe a necessidade de se considerarem grafos ou multigrafos com **arcos dirigidos** (em geral, simplesmente designados por arcos), ou seja, os pares de vértices que determinam os arcos são pares ordenados e, nestas condições, a existência do arco (*a*,*b*) significa que existe um arco que parte do vértice *a* e chega ao vértice *b*. Embora estes grafos se designem por **grafos dirigidos**, reservaremos esta designação apenas para as situações em que fôr relevante vincar este aspecto. Em geral, referir-no-emos aos grafos, dirigidos ou não, designando-os simplesmente por grafos, fazendo-se a respectiva distinção de acordo com o contexto

Considere-se a figura a seguir, onde se representa o mapa das ruas de uma zona de determinada cidade.



Supondo que as ruas têm o sentido indicado pelas setas e os cruzamentos e entroncamentos indicados pelas letras correspondem a pontos entre os quais estamos interessados em nos deslocar, o conjunto de movimentos possíveis entre estes diferentes pontos pode ser representado pelo grafo da figura a seguir, onde os vértices identificam os cruzamentos e entroncamentos e os arcos dirigidos as respectivas ruas e sentidos de circulação.



Ao longo deste texto, os arcos (ou arestas) dos grafos ou multigrafos, relativamente aos quais desconhecemos (ou é irrelevante conhecer) se são dirigidos ou não, serão identificados pelos correspondentes pares de vértices entre parentesis rectos (por exemplo [x,y]).

2. Noções e resultados básicos sobre grafos.

Dado um grafo ou multigrafo arbitrário (dirigido ou não), designa-se por **caminho**, toda a sequência de vértices na qual, entre quaisquer dois vértices sucessivos existe um arco (ou aresta). No grafo anteriormente representado a sequência de vértices [*a*,*b*,*c*,*d*,*e*,*f*] constitui um caminho (note-se que num caminho é indiferente o sentido dos arcos). Embora contrariando alguns textos, tendo em vista simplificar o estudo que nos propomos fazer, vamos considerar que num caminho não existem arcos (ou arestas) repetidos(as) (no entanto, podem existir vértices repetidos). Quando o caminho começa e termina no mesmo vértice diz-se que se trata de um **circuito** e quando esse circuito percorre todos os arcos ou arestas do grafo ou multigrafo diz-se um **circuito de Euler**[1].

Dado um caminho, entende-se por **comprimento de um caminho** o número de arcos (ou arestas) que o constitui.

Um caminho designa-se por **caminho de Euler** se contém todos os arcos ou arestas (logo todos os vértices) do grafo ou multigrafo a que se refere.

Um grafo ou multigrafo diz-se **conexo** quando quaisquer que sejam os vértices que lhe pertencem existe um caminho que os une. Dado um grafo (ou multigrafo) G=(V,E) designa-se por **componente conexa** de G, ou simplesmente por **componente**, todo o subgrafo (ou submultigrafo) conexo maximal de G, ou seja, todo o subgrafo conexo de G, G'=(V',E'), tal que $V \supseteq V'$, $E \supseteq E'$ e $\forall x \in V'\ \forall y \in V \backslash V'$ não existe um caminho entre x e y.

Dado um grafo ou multigrafo dirigido, designa-se por **cadeia** ou **caminho dirigido**, toda a sequência de vértices

$$(a_1,a_2,\ldots,a_n)$$

na qual $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ (a_i,a_{i+1}) é um arco.

Um vértice diz-se **incidente** para um arco se é um elemento (de partida ou de chegada) desse arco.

---

[1]Observe-se que, num circuito de Euler, não existem arcos (ou arestas) repetidos(as).

Designa-se por **grau (ou valência) de um vértice** o número de arcos (ou arestas) que lhe são incidentes.

Dado um grafo ou multigrafo G=(V,E) e um subgrafo de G (o qual pode ser, por exemplo um caminho P=[v_1,v_2,…,v_p]), G', V(G') denota o subconjunto de vértices de G associado a G' (por exemplo V(P)={v_1,v_2,…v_{p-1},v_p}) e E(G') o subconjunto de arcos ou arestas de G associados a G' (por exemplo E(P)={[v_1,v_2],…,[v_{p-1},v_p]}).

Um resultado muito simples de concluir, mas muito útil, consiste no seguinte:

"*Em qualquer grafo (ou multigrafo), a soma dos graus de todos os vértices é igual ao dobro do número dos respectivos arcos (ou arestas)*"

Como consequência do resultado anteriormente enunciado, vem que, em qualquer grafo (ou multigrafo), o número de vértices de grau ímpar é par.

Circuitos de Euler

Ainda relacionado com os graus dos vértices de um grafo (ou multigrafo), tem-se o seguinte resultado:

2.1 - Teorema

Um grafo (ou multigrafo) G=(V,E) admite um circuito de Euler se e sómente se
a) G é conexo, e
b) todos os seus vértices têm grau par.

Prova:

Uma vez que é imediato verificar que as condições a) e b) são necessárias, vamos apenas provar que são suficientes, utilizando indução sobre o número de arcos (ou arestas) de G. Para um grafo com um único vértice (sem arcos ou arestas) o resultado é trivial. Assuma-se que G satisfaz a) e b) e que todos os multigrafos com menos arcos (ou arestas) do que G que satisfazem a) e b) admitem circuitos de Euler. Escolha-se um vértice v de G e inicie-se um caminho segundo os arcos (ou arestas) de G, sem se passar

pelo mesmo arco duas vezes, até se encontrar v novamente (note-se que tendo em conta a) e b) este caminho fechado existe). Posteriormente retirando-se os arcos (ou arestas) relativos ao caminho percorrido obtém-se um certo número de subgrafos conexos que satisfazem as condições a) e b) e que consequentemente admitem circuitos de Euler (por hipótese de indução). Nestas condições é facil de ver que poderemos criar um circuito de Euler para G, acrescentando ao circuito de Euler inicial os circuitos de Euler de cada um dos subgrafos (ou submultigrafos) obtidos.

◊

A prova construtiva da suficiências das condições a) e b) do teorema anterior sugere o seguinte algoritmo recurssivo para a determinação de circuitos de Euler de grafos (ou multigrafos) que satisfazem as condições referidas.

2.2 - Algoritmo (de determinação de um circuito de Euler a partir de v_1).

1. **Se** v_1 não tem arcos **Então** Euler(v_1)=[v_1];

Senão Faz

1.1 A partir de v_1 criar um caminho em G, de tal forma que não se passe por um arco mais do que uma vez, até que v_1 seja novamente visitado;

1.2 Sendo [v_1,v_2, … , v_n,v_1] este caminho, eliminar os arcos [v_1,v_2], [v_2,v_3], … , [v_n,v_1] de G;

1.3 Devolver o caminho:

[Euler(v_1),Euler(v_2),…,Euler(v_n),v_1];

Fim Faz;

Fim do Algoritmo.

Dado um grafo (ou multigrafo) dirigido e um dos seus vértices, designa-se por **semigrau exterior** desse vértice o número de arcos que partem dele e por **semigrau interior** o número de arcos que lhe chegam.

Qualquer que seja o grafo (ou multigrafo) dirigido, verifica-se que a soma dos semigraus interiores é igual à soma dos semigraus exteriores dos vértices.

2.3 - Exercício

- Determine o maior número possível de vértices num grafo com 19 arcos (ou arestas) e todos os vértices de grau não inferior a 3.

- Considerando que se realiza um determinado encontro, verifique se o número de participantes que conhece um número ímpar de presentes pode ser ímpar.

Grafos bipartidos

Suponha-se que G=(V,E) é um grafo com as seguintes propriedades i) $V=V' \cup V''$ e $V' \cap V''=\emptyset$ e ii) $\forall [x,y] \in E$, $\{x,y\} \cap V' \neq \emptyset$ e $\{x,y\} \cap V'' \neq \emptyset$. Então G designa-se por **grafo bipartido** e denota-se usualmente por G=(V',V",E).

Um grafo bipartido, G=(V',V",E), tal que $|V'|=m$ e $|V''|=n$ e tal que $\forall v' \in V'$ $\forall v'' \in V''$ $[v',v''] \in E$ denota-se por $\mathbf{K_{m,n}}$.

Nem todos os grafos admitem uma bipartição, o teorema a seguir dá-nos uma condição necessária e suficiente para que tal aconteça.

2.4 - Teorema

Um grafo admite uma bipartição sse não tem circuitos de comprimento ímpar.

Prova:

Se G=(V',V",E) é um grafo bipartido, então é claro que todos os circuitos têm comprimento par. Com efeito, uma vez que tanto em V' como em V" não existem vértices adjacentes, partindo-se, por exemplo, de um vértice em V', de cada vez que se passa para V", para se obter um circuito, tem de se voltar a V' no arco seguinte, pelo que qualquer circuito tem comprimento par.

Suponhamos que G=(V,E) não tem circuitos de comprimento ímpar. Uma vez que um grafo é bipartido sse cada uma das suas componentes constitui um subgrafo bipartido,

podemos supor, sem perda de generalidade, que G é conexo. Dados dois vértices $x,y \in V$ seja d(x,y) o menor número de arcos (ou arestas) que constituem um caminho entre x e y e considere-se um vértice arbitrário $z \in V$ e seja V'={w, tais que d(z,w) é ímpar}. Nestas condições não existem arcos (ou arestas) que liguem vértices de V' (caso contrário existiriam circuitos de comprimento ímpar). Por outro lado, como todos os vértices de V\V' estão a uma distância par de z, não existem vértices adjacentes em V\V' (uma vez que, por razões idênticas às anteriores, nessas condições existiriam circuitos de comprimento impar). Logo, fazendo V"=V\V' obtém-se uma bipartição para G, dada por G=(V',V",E).

◊

Árvores

Uma outra classe importante de grafos são as árvores. Um grafo G=(V,E) diz-se uma **árvore** se é conexo e sem circuitos. O teorema a seguir dá-nos mais algumas definições alternativas para árvores.

2.5 - Teorema

Seja G=(V,E) um grafo. As seguintes afirmações são equivalentes.

1. G é uma árvore.
2. G é conexo e tem $|V|-1$ arcos (ou arestas).
3. G não tem circuitos, mas acrescentando-se um arco a G resulta um único circuito.

Prova:

Para provar que 1. $\Rightarrow$ 2. e dado que uma árvore é um grafo conexo basta provar que se G=(V,E) é uma árvore então tem $|V|-1$ arcos (ou arestas), para o que vamos utilizar indução sobre o número de arcos (ou arestas) de grafos que definem árvores.

Seja $G_k=(V_k,E_k)$ uma árvore com k arcos (ou arestas).

Para k=1 vem $|V_1|=2$, pelo que o resultado se verifica.

Suponha-se que o resultado é verdadeiro para k tal que $1 \leq k \leq n-1$ e considere-se a árvore $G_n=(V_n,E_n)$. Dado que G_n não tem circuitos, existe pelo menos um vértice, v, com grau 1. Considerando o subgrafo obtido de G_n retirando-se o arco incidente ao vértice v,

determina-se $G_{n-1}=(V_{n-1},E_{n-1})$ que, por hipótese de indução, é tal que tem um número de arcos (ou arestas) igual a $|V_{n-1}|-1$. Dado que $|V_n|=|V_{n-1}|+1$ concluí-se que G_n tem $|V_n|-1$ arcos (ou arestas). Completa-se assim a prova de que 1. $\Rightarrow$ 2.

A prova de que 2. $\Rightarrow$ 3. e 3. $\Rightarrow$ 1. fica como exercício.

$\Diamond$

Dado um grafo conexo G, designa-se por **árvore abrangente** de G todo o subgrafo de G que sendo uma árvore, contém todos os vértices de G.

2.6 - Teorema

Todo o grafo conexo G=(V,E) contém uma árvore abrangente.

Prova:

Sendo G um grafo conexo, se G não tem circuitos então (por definição) é uma árvore e, para este caso, fica concluida a prova. Se G tem um circuito, então retirando um arco (ou aresta) desse circuito o grafo mantém-se conexo. Repetindo este processo, até que não se tenham circuitos, ao fim de um número finito de arcos (ou arestas) de G eliminados obtém-se uma árvore (i. e, um subgrafo conexo sem circuitos), a qual constitui uma árvore abrangente uma vez que os vértices de G permanecem os mesmos.

$\Diamond$

Este resultado constitui o equivalente, em teoria de grafos, ao resultado da existência de pelo menos um vértice em poliedros não vazios [2].

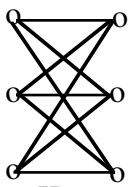
[2]Conforme se verá mais adiante, em teoria de grafos, uma base é um conjunto independente de arcos (ou arestas) maximal, logo uma árvore abrangente quando o grafo é conexo.

3. Grafos planares

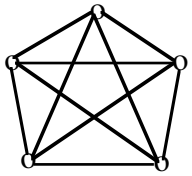
Os exemplos mais naturais de grafos são os que se referem à representação de mapas de estradas, os quais, em muitos casos (na ausência de viadutos), apresentam a particularidade de se poderem representar numa folha de papel sem que os arcos (ou arestas) se cruzem, uma vez que os cruzamentos e entroncamentos são representados por vértices.

Um grafo diz-se planar se admite uma representação, numa folha de papel, sem que existam arcos (ou arestas) que se intersectem (esta mesma definição pode ser estendida a multigrafos planares). Note-se que, apesar de um dado grafo admitir uma representação com arcos (ou arestas) cruzados, isso não significa que esse grafo não seja planar. Com efeito, pode existir outro modo de o representar onde não existam arcos (ou arestas) cruzados.

Um critério muito utilizado na verificação da planaridade de grafos consiste na utilização de um resultado de Kuratowski, onde se afirma que um grafo é não planar sse contém pelo menos uma das configurações não planares básicas, a saber, K_5 e/ou $K_{3,3}$.



$K_{3,3}$

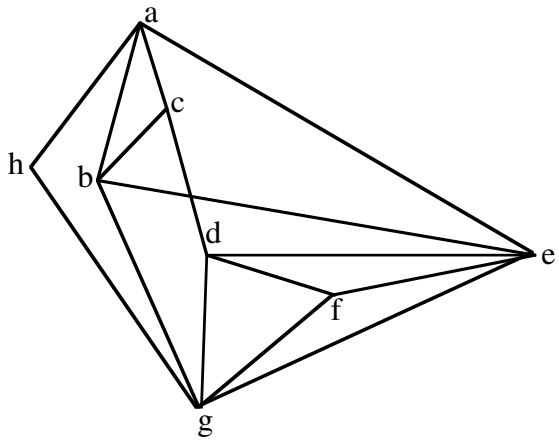


K_5

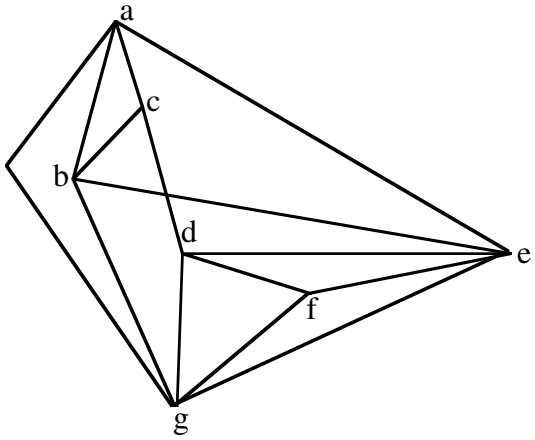
Um par de grafos apresenta a mesma configuração se um deles se pode obter do outro por inserção ou eliminação de vértices de grau 2, i. e, por substituição de arcos por caminhos de dois arcos que passam por um vértice de grau 2 e vice-versa.

Como exemplo de aplicação do resultado de Kuratowski, vamos verificar se o grafo da figura a seguir contém uma das configurações K_5 ou $K_{3,3}$ e, consequentemente, se admite (ou não) uma representação planar.

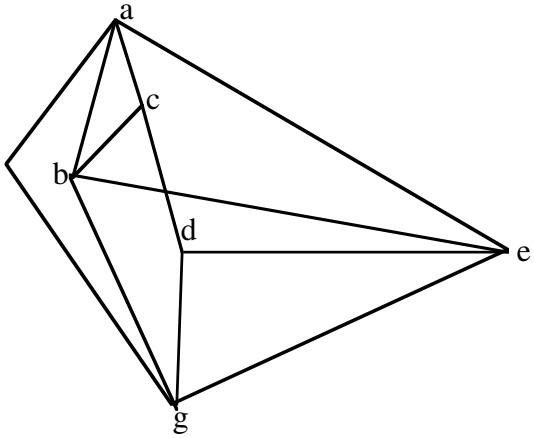
Mais adiante, far-se-à a prova da suficiência das condições de Kuratowski (existência de um subgrafo com a configuração de K_5 e/ou $K_{3,3}$) para a não planaridade dos grafos.



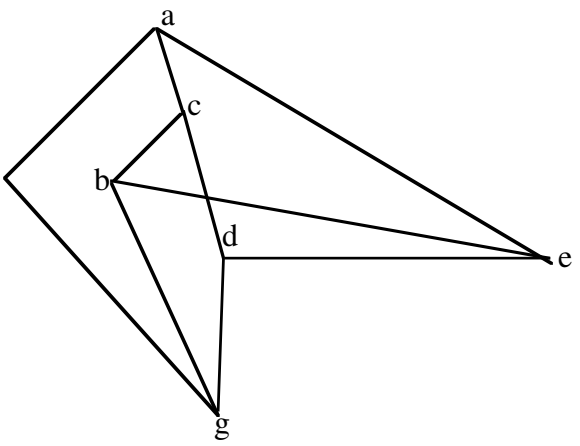
Podemos eliminar o vértice de grau 2, *h* (ligando os vértice *g* e *a* directamente), e obter o grafo a seguir representado.



Seguidamente, com base em critérios de simetria, podemos eliminar o vértice *f* (o qual se apresenta como supérfulo para os estudo em causa), obtemdo-se o grafo:



Uma análise cuidada permite-nos detectar a configuração $K_{3,3}$, com todos os seus 6 vértices com grau 3. Um modo de o conseguir consiste na eliminação dos arcos [*a*,*b*] e [*e*,*g*], obtendo-se o grafo:



com 6 vértices de grau 3.

Neste último grafo com facilidade se reconhece a configuração $K_{3,3}$ (para o que basta particionar o conjunto dos vértices nos subconjuntos $\{a,b,d\}$ e $\{c,e,g\}$).

Dada uma representação planar de um grafo (ou multigrafo) planar, designa-se por **região** ou **face** a porção de espaço cuja fronteira é o conjunto de arcos (ou arestas) que a delimita. Quando os arcos (ou arestas) que constituem a fronteira não formam um circuito, a região definida corresponde à região ilimitada. Mais geralmente, a região ilimitada é a região que envolve o grafo.

Fórmula de Euler

Se $|V|$ e $|E|$ denotam, respectivamente, o número de vértices e o número de arcos (ou arestas) de um dado grafo (ou multigrafo) conexo G=(V,E) então, de acordo com a **fórmula de Euler** (teorema a seguir), a representação planar de G determina sempre **r**=$|E|-|V|+2$ regiões (nas quais se inclui a região ilimitada).

3.1 - Teorema (fórmula de Euler)
Se G=(V,E) é um grafo (ou multigrafo) conexo e planar então a sua representação planar determina **r**=$|E|-|V|+2$ regiões.

Prova:

Vamos representar o grafo (ou multigrafo) conexo planar G=(V,E), arco por arco. Seja $G_n=(V_n,E_n)$ o grafo (ou multigrafo) obtido após a representação de n arcos (ou

arestas) e $\mathbf{r}_n$, $|E_n|$ e $|V_n|$, respectivamente, o número de regiões, o número de arcos (ou arestas) e o número de vértices.

Inicialmente temos G_0 (apenas um vértice) e uma única região (a região ilimitada). Uma vez que $|E_0|=0$ e $|V_0|=1$, vem que $\mathbf{r}_0=|E_0|-|V_0|+2=1$, pelo que a fórmula de Euler é verdadeira. Em geral, para $n>0$, vamos obter $G_n=(V_n,E_n)$, a partir de $G_{n-1}=(V_{n-1},E_{n-1})$, acrescentando um arco (ou aresta) a E_{n-1}. O novo arco [x,y] é contruído de uma das seguintes formas:

a) liga vértices de G_{n-1} ($x,y\in V_{n-1}$);[3]

b) liga um vértice de G_{n-1} a um novo vértice (pelo que $x\in V_{n-1}$ e $V_n=V_{n-1}\cup\{y\}$).

Uma vez que a fórmula de Euler é verdadeira para G_0, vamos considerar que é verdadeira para G_k, com $0\leq k\leq n-1$, e vamos provar por indução que é válida para G_n, qualquer que seja o número natural n.

Em a), uma vez que já existia pelo menos um caminho entre x e y (no caso de um multigrafo deve considerar-se ainda a hipótese alternativa de x e y coincidirem), o novo arco vai provocar o aparecimento de um novo circuito (ou lacete, no caso de x coincidir com y) e, como consequência, uma nova região. Dado que $|E_n|=|E_{n-1}|+1$ e $|V_n|=|V_{n-1}|$, conclui-se que a fórmula de Euler continua válida para G_n. Em b) uma vez que $y\notin V_{n-1}$ o número de regiões mantém-se e como $|E_n|=|E_{n-1}|+1$ e $|V_n|=|V_{n-1}|+1$, mais uma vez se verifica a validade da fórmula de Euler.

◊

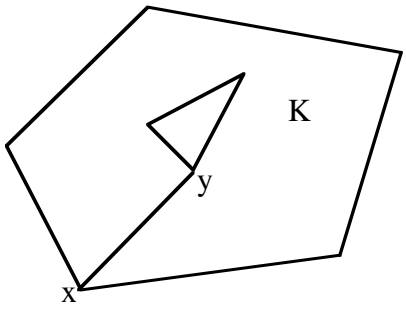
3.2 - Exercício

Quantas regiões existem num grafo planar conexo com 10 vértices, cada um dos quais com grau 3?

O corolário que se segue pode servir para, rapidamente, se verificar se um dado grafo é ou não planar. Antes porém, convém definir grau de uma região (ou face) de um

[3]Note-se que, tratando-se de um multigrafo, o vértice x pode coincidir com o vértice y.

grafo como sendo o número de arcos (ou arestas) da sua fronteira. Considera-se que se um arco ocorrer duas vezes ao longo da fronteira de uma dada região (como é o caso da região K a seguir representada, na qual o arco [x,y] entra duas vezes na definição da respectiva fronteira), então conta também duas vezes para a determinação do respectivo grau.



3.3 - Corolário (do teorema que estabelece a fórmula de Euler) [4]
Se G=(V,E) é um grafo conexo planar com |E|>1, então |E| ≤ 3|V|-6.

Prova:

Uma vez que cada região de um grafo planar (com |E|>1) tem de ter grau ≥3, a soma dos graus de todas as regiões tem de ser pelo menos 3**r**. Mas, por outro lado, esta soma dos graus de todas as regiões é igual a 2|E| (dado que cada arco conta duas vezes para os graus das regiões). Então a soma dos graus das regiões, 2|E|, é tal que 2|E|≥3**r**, ou seja, $\frac{2}{3}|E|\geq \mathbf{r}$. Combinando esta desigualdade com a fórmula de Euler temos:

$$\begin{cases} \mathbf{r}=|E|-|V|+2 \\ \mathbf{r}\leq\frac{2}{3}|E| \end{cases} \Rightarrow \quad |E|-|V|+2\leq\frac{2}{3}|E| \quad \Leftrightarrow |E|\leq 3|V|-6.$$

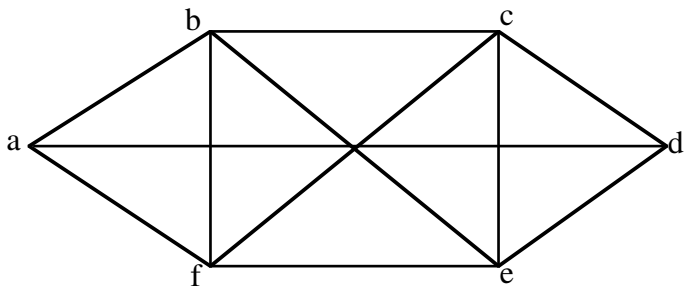
◊

Este corolário permite-nos concluir, imediatamente, que o grafo K_5 é não planar, uma vez que sendo K_5=(V,E), então |E|=10>9=3|V|-6.

Note-se, porém, que existem grafos não planares, G=(V,E), que satisfazem a desigualdade |E|≤3|V|-6, conforme a figura a seguir documenta.

---

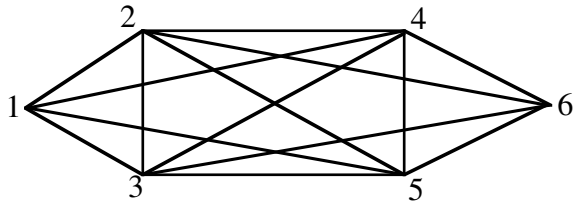
[4]Este corolário só é válido para grafos, i. e, não se aplica a multigrafos.



Um outro modo de utilizar o corolário anterior para se concluir a não planaridade de um grafo consiste em produzir alterações no grafo (as quais não devem destruir a sua eventual planaridade) e mostrar que o grafo obtido não satisfaz o corolário.

Uma das alterações mais usuais consiste na contracção de um dos arcos (ou arestas) do grafo em estudo de modo a que os vértices entre os quais ele está ligado se sobreponham (passem a ser um). Esta contracção decresce o número de arcos (ou arestas) em uma unidade, mas o número $3|V|-6$ decresce de 3 unidades, pelo que a desigualdade poderá passar a ser não satisfeita. Na utilização destas contracções, deve, contudo, ter-se o cuidado de não se criarem multigrafos (grafos com lacetes e/ou mais do que um arco entre os mesmos vértices).

Como exemplo de aplicação do corolário 3.3, verifique que o grafo a seguir representado é não planar.

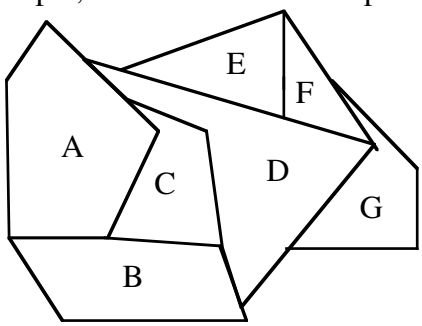


Como exercício prove que o grafo $K_{3,3}$ é não planar (sugestão: tenha em atenção que se trata de um grafo bipartido, logo no qual todo o circuito tem comprimento par).

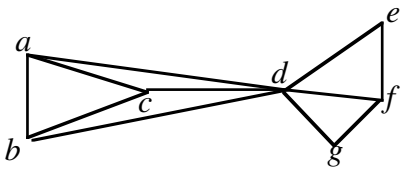
Coloração de vértices

Um dos mais velhos problemas relacionados com a teoria dos grafos diz respeito à **coloração de mapas**. Com este problema pretende-se saber qual o mínimo número de cores necessárias para pintar um mapa de modo a que não existam países, com fronteira comum, pintados da mesma cor.

Uma maneira de modelar este problema consiste na construção de um grafo com tantos vértices quantos os países do mapa a colorir e ligar (com uma aresta) todos os pares de vértices aos quais correspondam países com fronteira comum. Nestas condições teremos que atribuir cores aos vértices de modo a que não existam vértices adjacentes com a mesma cor. Como exemplo, considerando-se o mapa a seguir representado.



grafo que lhe corresponde toma o aspecto:

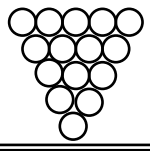


Dado um grafo arbitrário, G=(V,E), designa-se por número cromático de G, e denota-se por $\chi(G)$, o menor número de cores a atribuir aos seus vértices de tal modo que não existam vértices adjacentes com a mesma côr.

Designa-se por coloração de vértices de um grafo G=(V,E), a determinação de uma função $\varphi:V\rightarrow C$ (onde $C=\{1,2,\ldots,p\}$ denota um conjunto finito de cores) sobrejectiva tal que $\varphi(x)\neq\varphi(y)$ se $[x,y]\in E$. Se $|C|=p$, então diz-se que G é p-colorável ou que o seu número cromático $\chi(G)\leq p$.

3.4 - Exercício

Determine o mínimo número de cores necessárias para colorir 15 bolas de bilhar dispostas de modo a formar o triângulo a seguir indicado sem que existam bolas que se toquem e tenham a mesma cor.



O teorema que se segue estabelece a suficiência de 5 cores para a coloração de vértices de grafos planares, sem que existam vértices adjacentes com a mesma côr, i. e, estabelece que, se G é planar, então $\chi(G)\leq 5$.

3.5 - Teorema (das cinco cores)
Todo o grafo planar admite uma coloração de vértices com 5 cores, sem que existam vértices adjacentes com a mesma côr.

Prova:

A prova será feita por indução sobre o número de vértices do grafo.

Suponha-se que G=(V,E) é um grafo [5] planar tal que $|E|>1$ e que o resultado é válido para grafos com menos vértices do que $|V|$.

Sendo r o número de regiões (ou faces) de G, conforme decorre da prova do corolário 3.3, pela planaridade de G, verifica-se que $2|E|\geq 3r$. Por outro lado, sendo n_i o número de vértices com grau i e sendo I o conjunto dos graus dos vértices de G, sabe-se que

$$\begin{cases} \sum_{i\in I} n_i = |V| \\ \sum_{i\in I} i*n_i = 2|E| \end{cases}$$

Tendo em conta o corolário 3.3 (i. e, que $|E|\leq 3|V|-6$), vem que

$$\frac{1}{2}\sum_{i\in I} i*n_i \leq 3\sum_{i\in I} n_i - 6 \Leftrightarrow \sum_{i\in I}(6-i)n_i \geq 12.$$

Consequentemente, dado que $n_i\geq 0\ \forall i\in I$, e $(6-i)\leq 0$ para $i>6$, uma vez que $\sum_{i\in I}(6-i)n_i>0$ existe $i<6$ tal que $n_i>0$. Logo $\exists v\in V$ tal que $\delta(v)\leq 5$.

Por hipótese de indução, o subgrafo $G[V\setminus\{v\}]$ admite uma coloração com 5 cores. Se nem todas as 5 cores são utilizadas nos vértices adjacentes a v, então uma das que ficam livres pode ser utilizada em v e, consequentemente, G admite uma coloração de vértices com 5 cores.

---

[5]Embora, deste modo, se esteja a excluir a hipótese de existência de arcos paralelos, a sua existência não tem qualquer efeito no nº de cores em causa.

Suponha-se que $\delta(v)=5$ e que todos os vértices adjacentes a v, v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 têm cores distintas (as quais vamos identificar por, 1, 2, 3, 4 e 5 e supôr distribuidas segundo uma ordem contrária aos ponteiros do relógio). Seja S_{13} o conjunto de vértices que podem ser alcançados a partir de v_1 por um caminho que utiliza unicamente vértices com as cores 1 e 3. Então podemos trocar estas duas cores, entre si, em $S_{13}\cup\{v_1\}$, sem que vértices adjacentes deixem de ter cores distintas. Se $v_3\notin S_{13}$ [6] então, após a troca de cores, nenhum dos vértices adjacentes a v tem a côr 1, pelo que a podemos utilizar para v. Suponha-se que $v_3\in S_{13}$ e seja $v_1, u_1, \ldots, u_k, v_3$ um caminho (entre v_1 e v_3) com cores alternadamente 1 e 3. Acrescentando v a este caminho obtém-se um circuito, C_{13} que divide o plano em duas regiões e, e acordo com esta construção, fica claro que v_2 e v_4 pertencem a regiões distintas.

Seja S_{24} o conjunto dos vértices alcançados, a partir de v_2, por caminhos que utilizam, unicamente, as cores 2 e 4. Então, nenhum destes caminhos cruza o circuito C_{13}, pelo que S_{24} está na região que contém v_2 e cuja fronteira é C_{13} e $v_4\notin S_{24}$. Logo, trocando as cores 2 e 4, entre si, em $S_{24}\cup\{v_2\}$, a côr 2 fica livre para ser utilizada no vértice v.

$\Diamond$

Desde muito cedo se conjecturou que 4 cores bastam para resolver o problema da coloração de vértices de grafos planares. O cartógrafo inglês Francis Guthrie, já em 1852, reclamava a suficiência de 4 cores para distinguir os paises num mapa plano e foi precisamente nesse ano (1852) que A. de Morgan, numa carta que enviou a W. R. Hamilton [7], afirmou ter tomado conhecimento do problema das 4 cores através de um seu aluno, Frederick Guthrie (irmão de Francis Guthrie).

Em 1878, numa comunicação apresentada na "London Mathematical Society", Cayley referiu-se ao problema das 4 cores como sendo um problema em aberto. Em 1979,

---

[6]Neste caso, está contemplada a hipótese de se ter $S_{13}=\emptyset$.

[7]Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), foi um matemático Irlandês (considerado um génio) que com 12 anos de idade falava 13 línguas. Com 22 anos de idade, foi nomeado Professor de Astronomia do Trinity College of Dublin .

Kempe propôs uma pretensa solução que viria a ser estudada durante toda a década seguinte, até que em 1890, Heawood (no seu primeiro trabalho escrito) refutou a pretensa prova de Kempe e apresentou a prova da suficiência de cinco cores para a coloração de vértices de grafos planares sem vértices adjacentes com a mesma côr.

A prova da suficiência de quatro cores (teorema das quatro cores) só muito recentemente (1976) foi efectuada por Wolfgang Hakem e Kenneth Appel, através da verificação exaustiva, por computador, de 1482 configurações gráficas. Mais recentemente (1994) Robertson, Sanders, Seymour e Thomas fizeram esta mesma prova com a utilização de um menor número de configurações (menos de 700), mas ainda com recurso à verificação por computador.

Duais topológicos de grafos planares

Dado um grafo arbitrário G=(V,E), considere-se a partição dos vértices de nos subconjuntos não vazios V' e V" (logo tem-se que $\{V',V"\}\neq\{\emptyset,V\}$, $V=V'\cup V"$ e $V'\cap V"=\emptyset$). Considere-se o conjunto de arcos Y=E(V',V") como sendo o subconjunto de E, constituído pelos arcos que ligam os vértices de V' aos vértices de V". Um tal conjunto de arcos designa-se por corte ou cocircuito de G.

Mais formalmente um **corte** ou **cocircuito** de G é qualquer subconjunto de arcos que desconexa G em dois subgrafos G_1 e G_2.

Assim, se $Y=E(V_1,V_2)$ é um corte (ou cocircuito), então existem dois subgrafos induzidos, $G_1=G[V_1]$ e $G_2=G[V_2]$, os quais correspondem, respectivamente, aos grafos cujas arestas são as que em G ligam os vértices de V_1 e V_2 e são tais que Y é o conjunto de arcos de G que unem G_1 e G_2. Reciprocamente, qualquer subconjunto Y de E que consiste precisamente nos arcos que ligam dois subgrafos de G, $G_1=G[V_1]$ e $G_2=G[V_2]$, é um corte. A um tal corte chamamos G_1-G_2-corte. Se $u\in V_1$ e $v\in V_2$, muitas vezes também designamos este corte por u-v-corte.

Dado um grafo (ou multigrafo) dirigido planar G=(V,E), designa-se por **grafo dual** de G, e denota-se por G*=(V*,E*), um grafo (ou multigrafo) obtido de G do seguinte modo:

1. A cada circuito de G, que defina uma única região (face), faz-se corresponder um vértice de G^*.

2. A cada arco $\mathbf{e} \in E$ faz-se corresponder o arco $\mathbf{e}^* \in E^*$ que liga as duas faces (vértices de V*) vizinhas, cruzando o arco **e**.

3. O sentido de cada um dos arcos $\mathbf{e}^* \in E^*$ é determinado, particionando o circuito X, que define a face a que corresponde o vértice incidente de **e***, **v***, em X^+ e X^- (consoante os arcos estejam no sentido directo ou inverso), se $\mathbf{e} \in X^+$, então o arco de E* que o cruza, **e***, tem a sua cauda em **v***, caso contrário tem a respectiva cabeça em **v***.

Assim, dado um grafo (ou multigrafo) dirigido arbitrário G=(V,E), por construção de G^*=(V*,E*),vem que |E|=|E*| e sendo r o número de regiões (faces) de G, r=|V*|. Como consequência da aplicação da fórmula de Euler aos dois grafos (ou multigrafos) G e G*, ou seja, das expressões |E|-|V|+2=r e |E*|-|V*|+2=r*, decorre que |E|-r+2=r*, pelo que, r*=|V|.

Com facilidade se verifica ainda que o dual do dual de um grafo (ou multigrafo) planar G é o próprio G, ou seja, (G*)*=G.

Se X ($E \supseteq X$) é um circuito de G, então X é a fronteira da união de faces que constituem a região limitada por X. O correspondente conjunto X* ($E^* \supseteq X^*$) consiste nos arcos de E* que ligam as regiões internas em relação a X às regiões que são externas em relação a X. Logo, a qualquer circuito de G corresponde um cocircuito de G*.

Se G é conexo (tem uma única componente), o espaço de circuitos tem dimensão |E|-|V|+1=r-1=|V*|-1, que é a dimensão do espaço de cocircuitos de G*. Como consequência (tendo em conta as observações anteriores) o espaço de circuitos de G é isomorfo ao espaço de cocircuitos de G*.

3.6 Teorema

Seja G=(V,E) um grafo (ou multigrafo) dirigido planar e conexo, e seja G*=(V*,E*) o correspondente dual. Então X ($E \supseteq X$) é um circuito de G sse

X^* ($E^* \supseteq X^*$) é um cocircuito de G^*, e Y ($E \supseteq Y$) é um cocircuito de G sse Y^* ($E^* \supseteq Y^*$) é um circuito de G^*.

Prova:

A prova deste teorema decorre, directamente, das considerações anteriores.

◊

3.7 Exercício

Dado um grafo $G(V,E)$, prove as seguintes afirmações:

a) $\chi(G)=2$ sse G não contém circuitos de comprimento impar.

b) Se $\Delta(G)=\max\{\delta(v): v \in V\}$, então $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$.

Sugestões:

a) Utilize a condição necessária e suficiente para a bipartição de grafos.

b) Faça a prova por indução sobre o número de vértices.

4. Espaços vectorias associados a grafos e multigrafos

Dado um grafo (ou multigrafo) dirigido G=(V,E) e um arco $\mathbf{e}\in E$, $\mathbf{e}=(v_r,v_s)$, v_r diz-se a **cauda** de **e** e v_s diz-se a **cabeça**.

A um grafo ou multigrafo, G=(E,V), arbitrário é muitas vezes útil associar o que se designa por matriz de adjacência. Sendo A uma **matriz de adjacência** de G, a entrada a_{ij} tem o valor 1 se o vértice v_i é adjacente ao vértice v_j e tem o valor 0 no caso contrário (note-se que, com este tipo de representação, nos multigrafos, a informação associada à existência de arcos (ou arestas) em paralelo não é considerada, e nos grafos e multigrafos dirigidos perde-se toda a informação associada ao sentido dos arcos).

Verifica-se assim que a matriz de adjacância de um grafo ou multigrafo G=(V,E) é uma matriz quadrada simétrica de ordem |V|.

Um outro modo de representar grafos e multigrafos consiste na utilização das designadas matrizes de incidência. Neste caso, sendo A uma **matriz de incidência**, cada coluna corresponde a um arco e verifica-se o seguinte:

a) se o grafo ou multigrafo é dirigido então

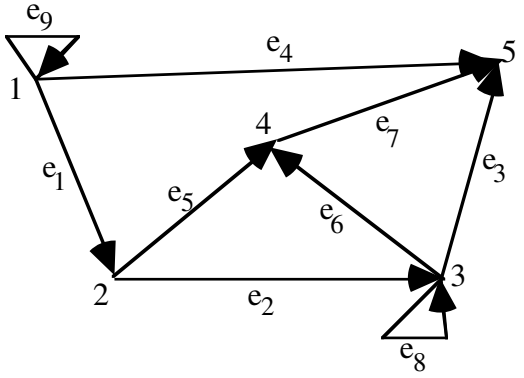
$$a_{ij} = \begin{cases} -1 \text{ se } v_i \text{ é a cabeça do arco } \mathbf{e}_j \\ +1 \text{ se } v_i \text{ é a cauda do arco } \mathbf{e}_j \\ 0 \text{ se } v_i \text{ não é nem a cabeça nem a cauda de } \mathbf{e}_j \end{cases}$$

b) se o grafo ou multigrafo é não dirigido então

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } \mathbf{e}_j \text{ é incidente no vértice } v_i \\ 0 \text{ no caso contrário} \end{cases}$$

A título de exemplo, considere-se o multigrafo dirigido G=(V,E) a seguir representado, com V={1,2,3,4,5}

$E=[e_1=(1,2),e_2=(2,3),e_3=(3,5),e_4=(1,5),e_5=(2,4),e_6=(3,4),e_7=(4,5),e_8=(1,1),e_9=(3,3)]$.



A matriz de adjacência que corresponde ao multigrafo dirigido G vem dada por:

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

A matriz de incidência que corresponde ao multigrafo G é a matriz:

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & +1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

O teorema a seguir estabelece uma relação interessante entre as matrizes de adjacência e as matrizes de incidência de grafos dirigidos (deve observar-se que este teorema não é válido para multigrafos).

4.1 - Teorema

Seja G=(V,E) um grafo dirigido tal que $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_m\}$ e sejam A e B, respectivamente, a matriz de adjacência e a matriz de incidência de G, então $BB^t=D-A$, onde D é a matriz diagonal ($D=diag(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_m)$) cujos elementos diagonais δ_i são os graus dos vértices v_i, para i=1, 2, … , m.

Prova:

Uma vez que δ_i é o grau do vértice v_i, sendo $(BB^t)_{ij}$ a entrada da i-ésima linha e j-ésima coluna de BB^t (para $1\le i,j\le m$), obtém-se:

$$(BB^t)_{ij}=\sum_{k=1}^{|E|} b_{ik}b_{jk}=\begin{cases} \delta_i \text{ se } i=j \\ -1 \text{ se } v_i \text{ é adjacente a } v_j \\ 0 \text{ em todas as outras situações} \end{cases}$$

Com efeito, sendo i=j, $(BB^t)_{ij}$ corresponde ao produto da i-ésima linha de B por ela própria, e este produto determina o seu número de entradas não nulas, ou seja, o número de arcos (ou arestas) incidentes no vértice v_i. No caso de se ter $i\neq j$ com $(v_i,v_j)\in E$ ou $(v_j,v_i)\in E$, então vem que

$$\sum_{k=1}^{|E|} b_{ik}b_{jk} = \begin{cases} (-1)(1) \\ \text{ou} \\ (1)(-1) \end{cases} = -1.$$

Finalmente, nas restantes situações, verifica-se que não existe $k \in \{1,\ldots,m\}$ tal que $b_{ik}b_{jk} \neq 0$ (caso contrário existiria uma arco (v_i,v_j) ou (v_j,v_i)), donde se tira que $\sum_{k=1}^{|E|} b_{ik}b_{jk}=0$.

◊

Dado um grafo ou multigrafo G=(V,E), designa-se por **espaço dos vértices** de G o espaço vectorial sobre **K**, de todas as funções de V em **K** (onde **K** identifica um dos conjuntos **R** ou C, sendo **R** e C, respectivamente, o conjunto dos números reais e o conjunto dos números complexos) que se denota por $\mathbf{K}^V$. De modo análogo, designa-se por **espaço dos arcos** de G, o espaço vectorial sobre **K** de todas as funções de E em **K** que se denota por $\mathbf{K}^E$.

Considere-se o grafo G=(V,E) e suponha-se que $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_m\}$ e $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$, então $\dim\mathbf{K}^V=m$ e $\dim\mathbf{K}^E=n$. Os elementos **x** de $\mathbf{K}^V$ são usualmente escritos na forma $\mathbf{x}=\sum_{j=1}^{m} x_jv_j$. No somatório $\sum_{j=1}^{m} x_jv_j$ devemos encarar cada v_i como sendo uma função de V em **K** que é nula em todos os pontos à excepção de v_i onde toma o valor 1. Nestas condições, o conjunto $\{v_1,v_2,\ldots,v_m\}$ constitui uma base para $\mathbf{K}^V$ e o somatório anterior pode interpretar-se como uma representação de **x** nesta base. Analogamente, um elemento arbitrário de $\mathbf{K}^E$, **y**, pode representar-se por $\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{n} y_ie_i$. Designamos $\langle v_1,v_2,\ldots,v_m\rangle$ e $\langle e_1,e_2,\ldots,e_n\rangle$ como sendo as bases canónicas, respectivamente, de $\mathbf{K}^V$ e $\mathbf{K}^E$. Podemos munir estes espaços vectoriais do produto interno usual $\langle\alpha,\beta\rangle=\sum_{k=1}^{p}\alpha_i\bar{\beta}_i$, onde p corresponde a m ou n consoante se trate de $\mathbf{K}^V$ ou de $\mathbf{K}^E$, e $\bar{\beta}_i$ identifica o conjugado de β_i para i=1, 2, … p. Considerando-se a norma induzida por este produto interno e tendo em conta a definição usual de ortogonalidade, com facilidade se conclui que as bases anteriormente referidas são ortonormais.

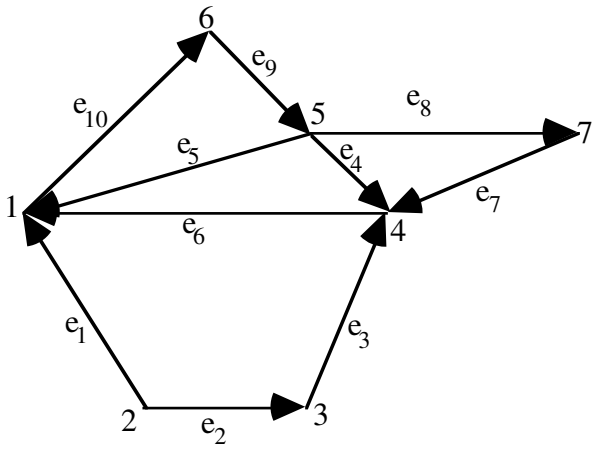
Tendo em conta o estudo que temos em vista, convém, neste capítulo, restringir o conceito de caminho (e particularmente de circuito) às sequências de vértices adjacentes sem arcos repetidos.

Seja C um circuito do grafo ou multigrafo dirigido G=(V,E), o qual vamos considerar munido de uma certa orientação. Por exemplo, supondo $C=[v_1,v_2,\ldots,v_k]$, se existe um arco $e_i=(v_j,v_{j+1})$ então dizemos que e_i tem a **orientação** de C. Este circuito pode definir-se como o elemento de $\mathbf{K}^E$, u, desigado por **vector de circuito**, que corresponde à seguinte aplicação de E em {0,1,-1}:

$$u(e_i) = \begin{cases} 1 \text{ se } e_i \in C \text{ e tem a orientação de } C \\ -1 \text{ se } e_i \in C \text{ mas não tem a orientação de } C \\ 0 \text{ se } e_i \notin C \end{cases}$$

4.2 - Exemplo

Na figura a seguir o vector $u \in \mathbf{K}^E$, tal que u=(-1,1,1,-1,1,0,0,0,0,0), representa o circuito C=1,2,3,4,5,1 cuja orientação é contrária aos ponteiros do relógio.



O subespaço de $\mathbf{K}^E$ gerado pelos vectores que determinam circuitos designa-se por **subespaço dos circuitos** de G e, neste texto, denota-se por Circuitos(G).

Tal como para os circuitos, associado a qualquer corte (ou cocircuito), existe um vector v de $\mathbf{K}^E$, designado por **vector de corte**, que define a seguinte aplicação de E em {0,1,-1}:

$$v(e_i) = \begin{cases} 1 \text{ se } e_i \text{ parte de V' para V"} \\ -1 \text{ se } e_i \text{ parte de V" para V'} \\ 0 \text{ se } e_i \notin E(V',V") \end{cases}$$

Se G=(V,E) é um grafo ou multigrafo e V_1 é um subconjunto de V, então $\partial(V_1)$ denota o subconjunto de E correspondente aos arcos que ligam V_1 a $V\backslash V_1$ (ou seja, $\partial(V_1)=E(V_1,V\backslash V_1)$. Existe uma bipartição natural de $\partial(V_1)$ nos conjuntos $\partial^+(V_1)$ e $\partial^-(V_1)$ que correspondem, respectivamente, aos arcos com cauda em V_1 e cabeça em $V\backslash V_1$ e cauda em $V\backslash V_1$ e cabeça em V_1.

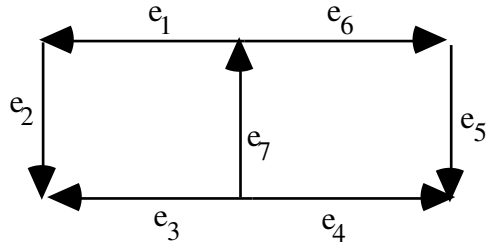
Tendo em conta as considerações anteriores, um cocircuito (corte) em G pode representar-se pelo subconjunto de E, $Y=\partial(V_1)$, particionado nos subconjuntos $Y^+=\partial^+(V_1)$ e $Y^-=\partial^-(V_1)$.

Em geral, dado um conjunto de arcos Z e estabelecida uma dada orientação como sendo a positiva (por exemplo, supondo que Z corresponde aos arcos de um circuito ou caminho, a orientação positiva seria a correpondente ao sentido do circuito ou caminho), Z^+ designa-se por conjunto de arcos para a frente e Z^- por conjunto de arcos para traz.

O subespaço de $\mathbf{K}^E$ gerado pelos vectores de cortes designa-se por **subespaço dos cortes** ou **subespaço dos cocircuitos** de G e, neste texto, denota-se por Cortes(G) ou Cocircuitos(G).

4.3 Exemplo

Considere-se o grafo G a seguir indicado.



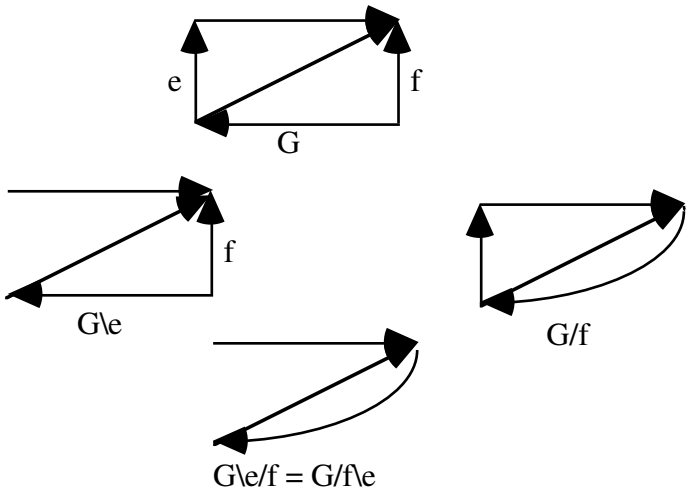
O espaço dos arcos do grafo representado é $K^E=K^7$. O circuito definido por $X^+=\{e_1, e_2, e_7\}$ e $X^-=\{e_3\}$, corresponde ao vector $x=[1,1,-1,0,0,0,1]^t$. De um modo semelhante se vê que $x'=[0,0,0,-1,1,1,1]^t$ é o vector de outro circuito. Nestas condições tem-se que $x+x'=[1,1,-1,-1,1,1,2]^t$ é um vector de Circuitos(G).

Os vectores $y=[0,0,1,0,-1,0,1]$ e $y'=[-1,0,-1,0,0,0,0]^t$ são claramente vectores de cocircuitos. Logo $y+3y'=[-1,0,-2,0,-1,0,1]^t$ é um vector de Cocircuitos(G).

Dado um grafo ou multigrafo G=(V,E) e sendo E' um subconjunto de E, vamos introduzir dois operadores, sendo um de **eliminação de arcos** com o qual se obtém:

$$G\backslash E'=(V,E\backslash E'),$$

e outro de **contracção de arcos** (que corresponde à eliminação de vértices) definido por G/E'=Grafo obtido de G contraindo sucessivamente os arcos de E'. Verifica-se que estas duas operações comutam, isto é, dados dois subconjuntos disjuntos de E, E' e E", então (G\E')/E" = (G/E")\E'. O grafo (G\E')/E" diz-se um **menor** de G. Na figura a seguir exemplifica-se a aplicação destas operações a um grafo G representado.



4.4 Teorema (lema de Farkas para grafos e multigrafos)
Seja G=(V,E) um grafo (ou multigrafo) dirigido conexo e sejam $u,v \in V$.
Então ou
a) $\exists$ um caminho entre u e v, com um conjunto de arcos P tal que $P^-=\emptyset$
(i. e, existe um caminho dirigido entre u e v), ou
b) $\exists$ um u-v-corte Y tal que $Y^+=\emptyset$,
mas não ambos.

Prova:

A prova é construtiva. Vai-se construindo o subconjunto de V, V_1, constituído pelos vértice que podem ser alcançados a partir de u, por um caminho dirigido.

Algoritmo.

Inicilização: $V_1=\{u\}$;

Enquanto $\partial^+(V_1)\neq\emptyset$ e $v\notin V_1$ faz

escolher $\mathbf{e}=(s,t)\in\partial^+(V_1)$;

$V_1=V_1\cup\{t\}$;

predecessor(t)=s

fimfaz

Fim do algoritmo.

Obviamente que o algoritmo termina no máximo em $|V|$ passos. Se termina com $v\in V_1$, sabemos que existe um caminho dirigido de u para v (e este caminho poderá ser obtido através da função predecessor:$V_1\backslash\{u\}$--->V_1 definida pelo algoritmo).

Se o algoritmo termina com $v\notin V_1$, então $\partial(V_1)=\partial^-(V_1)$ é um corte que está de acordo com b).

◊

Este resultado, constitui o principal teorema de dualidade linear no contexto dos grafos e, apesar da sua simplicidade, tem implicações muito interessantes. O corolário a seguir apresenta uma nova versão do Lema de Farkas para grafos, na qual se estabelecem condições de existência, mutuamente exclusivas, de circuitos e cocircuitos, com deteminadas características.

4.5 Corolário (do lema de Farkas)
Seja G=(V,E) um grafo (ou multigrafo) dirigido conexo. Então para todo o arco $\mathbf{e}\in E$, ou
a) $\exists$ um circuito X ($E\supseteq X$) tal que $\mathbf{e}\in X$ e $X^-=\emptyset$, ou
b) $\exists$ um cocircuito Y ($E\supseteq Y$) tal que $\mathbf{e}\in Y$ e $Y^+=\emptyset$,
mas não ambos.

Prova:

Seja **e**=(v,u) e aplique-se o teorema 4.4 ao grafo (ou multigrafo) G\{**e**}. A existência de um caminho dirigido entre u e v, no grafo G\{**e**}, garante a existência de um circuito X em G, que contenha o arco **e** e para o qual se verifica que $X^-=\emptyset$. Se não exista um caminho dirigido entre u e v, então existe um u-v-corte, Y, tal que $e \in Y$ e $Y^+=\emptyset$.

◊

A partir dos próximos lemas (4.7, 4.9 e 4.10) mostraremos que os espaços de circuitos e cocircuitos de um dado grafo, formam um par de subespaços complementares L, $L^\perp$ do espaço $\mathbf{K}^E$.

4.6 Lema

Os espaços de circuitos e cocircuitos de um grafo (ou multigrafo) dirigido G=(V,E) são ortogonais.

Prova:

Seja X ($E \supseteq X$) um circuito, particionado em X^+ e X^-. Seja Y ($E \supseteq Y$) um cocircuito que desconexa G em G_1 e G_2 e assuma-se que Y^+ é o conjunto de arcos de Y que ligam G_1 a G_2 e Y^- corresponde ao conjunto de arcos que ligam G_2 a G_1. Sejam x e y os correspondentes vectores de $\mathbf{K}^E$ associados, respectivamente, a X e a Y. Então é fácil ver que o produto interno x^ty é o número de vezes que vamos de G_1 para G_2 menos o número de vezes que vamos de G_2 para G_1, quando se percorre o circuito X, pelo que se obtém $x^ty=0$. Logo x e y são ortogonais, o que completa a prova, uma vez que estes espaços são gerados, respectivamente, pelos vectores de circuitos e cocircuitos.

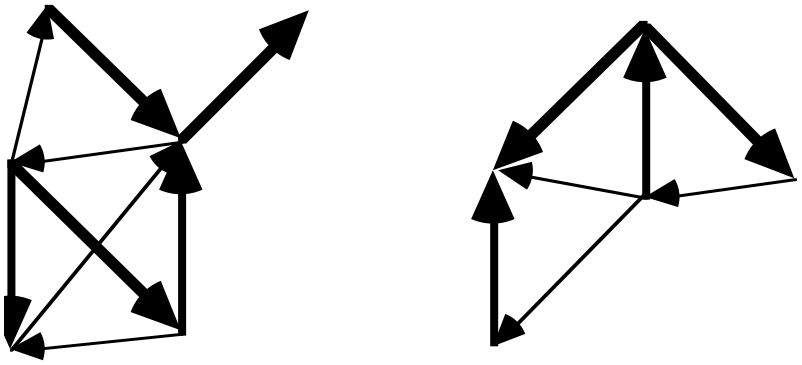
◊

Para se provar que os espaços de circuitos e cocircuitos são complementares, teremos de investigar as respectivas dimensões:

4.7 Definição

Seja G=(V,E) um grafo (ou multigrafo). Um subconjunto E' de E diz-se um **conjunto independente de arcos** de G, se não contém circuitos. Um subconjunto independente maximal (no sentido da inclusão) designa-se por **base** de G.

A seguir mostra-se um exemplo de uma base de um grafo (no caso trata-se de um grafo com duas componentes). Os arcos mais carregados definem a base em causa.



Quando o grafo é conexo, uma base coincide com uma árvore abrangente e quando uma base tem várias componentes (árvores abrangentes) também se designa por floresta.

4.8 Lema

Seja G=(V,E) um grafo (ou multigrafo) com k componentes. Então qualquer base de G tem precisamente |V|-k elementos.

Prova:

Suponha-se que G=(V,E) tem k componentes conexas e sejam $G_i=(V_i,E_i)$ para i=1, … , k, os correspondentes subgrafos. Uma vez que em $G_i=(V_i,E_i)$, uma base é uma árvore abrangente, vem que sendo E'_i uma base para G_i, $|E'_i|=|V_i|-1$.

Dado que qualquer base de G corresponde à reunião dos arcos que, em cada componente, formam uma árvore abrangente, conclui-se que uma base de G, E', é tal que $E'=\bigcup_{i\in I} E'_i$, onde I={1,…, k}.

Logo $|E'|=\sum_{i=1}^{k}(|V_i|-1)=\sum_{i=1}^{k}|V_i|-k=|V|-k$.

◊

4.9 Lema

Seja G=(V,E) um grafo (ou multigrafo) com k componentes. Então, a dimensão de Circuitos(G) é de pelo menos |E|-|V|+k, e a dimensão de Cocircuitos(G) é de pelo menos |V|-k.

Prova:

Suponha-se que G é conexo, ou seja, k=1. Seja E' ($E \supseteq E'$) uma base para G (pelo que |E'|=|V|-1).

Pela maximalidade de E', qualquer arco de E\E' adicionado a E' produz um circuito. Para todo o arco $\mathbf{e} \in E\backslash E'$, seja X(**e**) o circuito de G constituído pelo único caminho de G'=(V,E') que liga os dois vértices de **e** mais o próprio **e**. Sendo $x(\mathbf{e}) \in K^E$ o respectivo vector de circuito, obtém-se um conjunto de |E\E'|=|E|-|V|+1 vectores do espaço dos circuitos, linearmente independentes. Com efeito, para cada arco particular $\mathbf{e} \in E\backslash E'$, x(**e**) tem a **e**-ésima componente não nula, enquanto os demais vectores têm a **e**-ésima componente igual a 0. Como consequência decorre que a dimensão de Circuitos(G) é não inferior a |E|-|V|+1.

Vamos considerar agora os cocircuitos de G. Se $\mathbf{e} \in E'$, então G'=(V,E'\{**e**}) é constituído por duas componentes, a saber, $G_1(\mathbf{e})$ e $G_2(\mathbf{e})$. Para cada $\mathbf{e} \in E'$ seja Y(**e**) o cocircuito de G constituído pelos arcos que ligam $G_1(\mathbf{e})$ a $G_2(\mathbf{e})$ em G. Todos estes cocircuitos, Y(**e**) com $\mathbf{e} \in E'$, dão origem a um conjunto de |E'|=|V|-1 vectores de cocircuitos, linearmente independentes, y(**e**) com $\mathbf{e} \in E'$. Com efeito, para cada $\mathbf{e} \in E'$, y(**e**) tem a **e**-ésima componente não nula, enquanto os vectores representativos dos restantes cocircuitos a têm igual a zero. Logo a dimensão de Cocicuitos(G) é não inferior a |V|-1. No caso de G ter mais componentes, o resultado obtém-se facilmente escolhendo circuitos e cocircuitos independentes em cada componente.

◊

4.10 Teorema

Os subespaços de circuitos e cocircuitos de um grafo (ou multigrafo) G=(V,E), formam um par de subespaços complementares e ortogonais de K^E, ou seja, se Circuitos(G)=L então Cocircuitos(G)=$L^{\perp}$.

Prova:

A prova decorre de um modo imediato combinando os lemas 4.8 e 4.9.

◊

4.11 Lema

Seja o grafo (ou multigrafo) G=(V,E), e seja B a correspondente matriz de incidência. Então o espaço de circuitos de G está contido no subespaço nulo de B (Ker(B)⊇Circuitos(G)).

Prova:

Seja P={$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, … , $\mathbf{e}_k$} o conjunto de arcos correspondente ao caminho em G $v_1v_2\ldots v_k$. Seja p o vector do espaço dos arcos que o representa (p∈ K^E), pelo que, a cada arco de P corresponderá em p o valor +1 se o arco é dirigido favorávelmente ao caminho (de v_0 para v_k) e o valor -1 no caso contrário. Então, por indução sobre k, para $v_0 \neq v_k$ obtém-se:

$$Bp = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow v_0 \\ \\ \\ \\ \leftarrow v_k \\ \\ \\ \\ \end{matrix} .$$

Note-se que, para quaisquer dois arcos consecutivos em P, $\mathbf{e}_i$ e $\mathbf{e}_{i+1}$, vem que Bp= … $+p_{\mathbf{e}_i}a_{\mathbf{e}_i}+p_{\mathbf{e}_{i+1}}a_{\mathbf{e}_{i+1}}+\ldots$

Suponha-se (sem perda de generalidade) que $p_{\mathbf{e}_i}=+1$ e que $\mathbf{e}_i$=(u,v). Então $\mathbf{e}_{i+1}$=(v,w) e $p_{\mathbf{e}_{i+1}}=+1$, ou $\mathbf{e}_{i+1}$=(w,v) e $p_{\mathbf{e}_{i+1}}=-1$, pelo que, em ambos os casos, se obtém:

$$p_{\mathbf{e}_i}a_{\mathbf{e}_i}+p_{\mathbf{e}_{i+1}}a_{\mathbf{e}_{i+1}} = \begin{matrix} \\ v\rightarrow \\ \\ w\rightarrow \\ \\ u\rightarrow \\ \\ \end{matrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} + \underset{\mathbf{e}_{i+1}=(v,w)}{\begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} - \underset{\mathbf{e}_{i+1}=(w,v)}{\begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \rightarrow v \\ \\ \rightarrow w \\ \\ \rightarrow u \\ \\ \end{matrix}.$$

Como consequência, pode concluir-se que se X é um circuito composto pelo caminho P e um arco que liga os vértices v_k e v_0, e x é o vector do espaço de circuitos que o representa, então Bx=0.

◊

4.12 Lema

Seja o grafo (ou multigrafo) G=(V,E), e seja B a correspondente matriz de incidência. Então $Im(B^t)\supseteq$Cocircuitos(G).

Prova:

Seja Y um cocircuito de G, e seja V_1 o subconjunto de vértices que define a partição de V associada ao corte $\partial(V_1)$ ($V_1\notin\{V,\varnothing\}$). Seja $u\in K^V$ o vector do espaço dos vértices correspondente a V_1, i. e, u apresenta a **v**-ésima componente igual a 1 se $\mathbf{v}\in V_1$ e igual a 0 no caso de $\mathbf{v}\in V\backslash V_1$. Então a **e**-ésima componente do vector do espaço dos arcos $u^tB=y^t$, $y_{\mathbf{e}}$, corresponde ao somatório das componentes da coluna $a_{\mathbf{e}}$ (coluna de B respresentativa do arco **e**) associadas aos vértices que estão em V_1.

Considere-se cada uma das três situações alternativas:

a) **e** liga dois vértices de V_1;

b) **e** não liga qualquer vértice de V_1;

c) **e** é incidente num vértice de V_1 e num vértice de $V\backslash V_1$.

Em a) obtém-se a soma (+1)+(-1), pelo que o resultado é nulo. Em b) o somatório é também nulo, dado que se trata da soma de valores nulos. Finalmente em c) obtém-se o valor +1, se o arco **e** sai de V_1, e o valor -1 se o arco **e** tem a cabeça em V_1. Como

consequência decorre que y corresponde ao vector do espaço dos arcos que define o conjunto de arcos que ligam V_1 a $V\backslash V_1$.

Assim, vem que, qualquer que seja o cocircuito de G definido pelos arcos $\partial(V_1)$, existe u (vector característico de V_1) tal que $y=B^tu$ é o correspondente vector de cocircuito, ou seja, $y\in Im(B^t)$.

◊

4.13 Teorema

Seja G=(V,E) um grafo (ou multigrafo) com uma matriz de incidência B. Então os espaços de circuitos e cocircuitos de G são Ker(B) e $Im(B^t)$, respectivamente.

Prova:

A prova é consequência imediata dos lemas 4.10, 4.11 e 4.12 e ainda do facto dos espaços Ker(B) e $Im(B^t)$ serem complementares.

◊

5. Conceitos e Problemas Combinatórios Associados a Grafos

Dado que muitos dos conceitos, a abordar, são comuns a grafos dirigidos e não dirigidos, de agora em diante, designaremos os arcos e arestas, indestintamente, por arcos, fazendo-se a respectiva distinção de acordo com o contexto. Seguem-se algumas definições de conceitos importantes associados a um grafo arbitrário G=(V,E).

Circuito de Hamilton (ou hamiltoniano) de G: circuito que percorre todos os vértices de G passando uma única vez por cada um.

Emparelhamento (**matching**) de G: conjunto de arcos de G cujos vértices associados não se repetem, ou seja, o subconjunto de E, M, é um emparelhamento se para quaisquer dois arcos distintos de M, [x,y] e [u,v], $\{x,y\}\cap\{u,v\}=\emptyset$.

Cobertura de vértices de G: subconjunto de vértices W tal que cada arco de E é incidente em pelo menos um elemento de W, ou seja, $\forall[x,y]\in E\ \{x,y\}\cap W\neq\emptyset$.

Cobertura de arcos de G: subconjunto de arcos de E, S, tal que $V=\bigcup_{[u,v]\in S}\{u,v\}$.

Clique de G: subconjunto de vértices que define um subgrafo completo.

Independente de vértices (ou simplesmente independente) de G: subconjunto de vértices, no qual não existem dois vértices adjacentes. Em geral denota-se por $\alpha(G)$ a cardinalidade de um independente de vértices de G de cardinalidade máxima.

Complementar de G: grafo $\bar{G}=(V,E')$ tal que E' é exclusivamente constituído por arcos cujos pares de vértices associados são os elementos de V que não estão ligados por qualqer arco em E (i. e, são vértices não adjacentes).

O teorema a seguir estabelece uma certa correspondência entre cliques, independentes e coberturas de vértices em determinados grafos.

5.1 Teorema

Dado um grafo G=(V,E) e um subconjunto S de V, as afirmações a seguir são equivalentes.

a) S é uma clique de G.

b) S é um conjunto independente de vértices de $\bar{G}$.

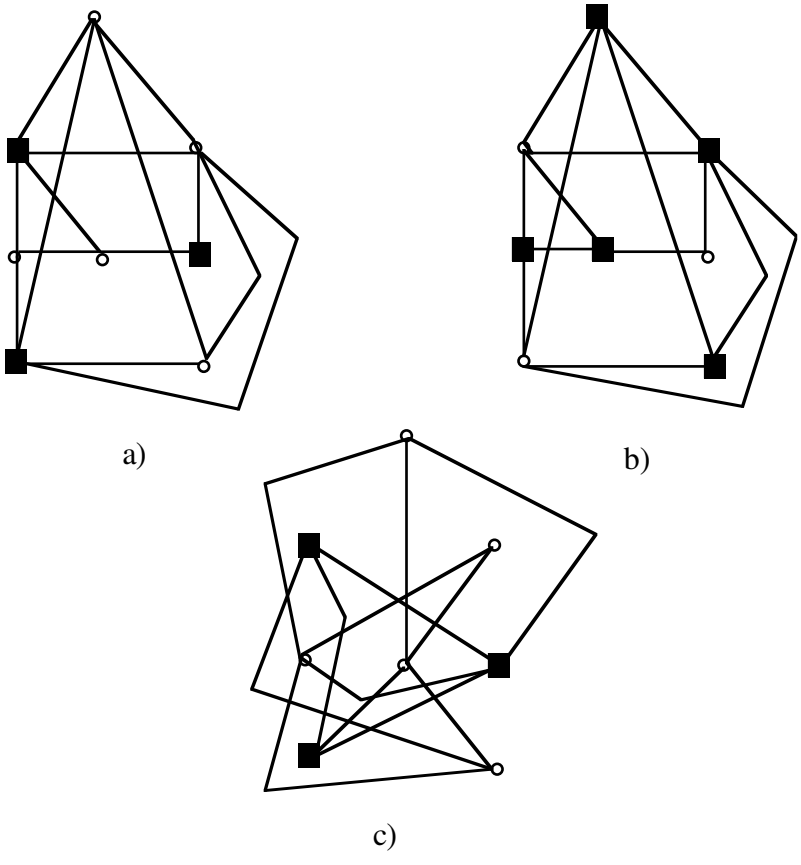
c) V\S é uma cobertura de vértices de $\bar{G}$.

Prova:

Se S é uma clique de G, então existe um arco de E entre quaisquer dois vértices de S; consequentemente, não existe qualquer arco de $\bar{G}$ que ligue qualquer par de vértices de S, pelo que S é um independente de $\bar{G}$. Deste modo fica provado que a)⇒b). Por outro lado, sendo S um independente de $\bar{G}$, todos os arcos em $\bar{G}$ têm um dos vértices associados (pelo menos um) fora de S; consequentemente V\S é uma cobertura de vértices para $\bar{G}$, o que prova que b)⇒c). Finalmente se V\S é uma cobertura de vértices para $\bar{G}$, significa que qualquer arco de $\bar{G}$ não tem ambos os vértices associados em S. Logo não existe um par de vértices de S que não tenha um arco de E a liga-los e, nestas condições, S é uma clique de G, o que prova que c)⇒a).

◊

Note-se que, de acordo com o teorema anterior (de b) ⇒ c)) conclui-se que em qualquer grafo G=(V,E), se um subconjunto de vértices I (V⊇I) é um independente de G então V\I é uma cobertura de vértices de G.



a) b)

c)

Nesta figura, a partir do grafo G, representado em c), em a) exemplifica-se um independente de $\bar{G}$ em b) uma cobertura de vértices de $\bar{G}$ e em c) uma clique de G.

Relacionados com os conceitos combinatórios introduzidos existem vários problemas, dos quais destacaremos aqueles que, mais adiante, abordaremos com algum detalhe.

I **Problema da determinação de um circuito de Hamilton**. Existem vários problemas relacionados com a determinação de circuitos de Hamilton. Quando se trata de determinar o circuito de Hamilton de custo (ou comprimento) mínimo é usual apelidá-lo de TSP devido à designação inglesa de "Traveling Salesman Problem". Nesta forma, é um problema típico de Investigação Operacional, com o qual se supõe que um vendedor pretende visitar um conjunto de cidades (vértices) deslocando-se entre elas (por arcos) de modo a passar por cada uma delas uma única vez de tal forma que o trajecto total percorrido tenha o menor comprimento possível.

II **Problema da árvore abrangente de custo mínimo**. Problema da determinação de uma árvore abrangente de um grafo cuja soma dos custos (ou comprimentos) associados aos arcos seja mínima.

III-1 **Problema de fluxo máximo**. Dado um grafo com um vértice de partida e um vértice de chegada e com limites de capacidade de condução de fluxo associados aos arcos, pretende-se determinar o máximo fluxo a transportar entre os dois vértices referidos.

III-2 **Problema dos caminhos disjuntos**. Problema com o qual, dados dois vértices u e v, se pretende determinar o maior número de caminhos disjuntos nos arcos (ou seja, sem arcos comuns) entre u e v. Este problema pode formular-se como um caso particular do problema III-1.

IV-1 **Problema do caminho mais curto**. Problema que consiste (dado um grafo a cujos arcos estão associadas distâncias) na determinação de um caminho, entre dois vértices, com a menor soma das respectivas distâncias.

IV-2 **Problema do circuito de comprimento mínimo**. Problema da determinação de um circuito de menor comprimento (com o menor número possível de arcos). Este problema pode obter-se com recurso às técnicas utilizadas na resolução do problema IV-1.

V **Problema do emparelhamento máximo**. Este problema, cuja designação inglesa é de "maximum matching problem" consiste na determinação do "matching" com o maior número de arcos possível.

VI-1 **Problema de cobertura mínima de vértices**. Problema que consiste em determinar, de entre as coberturas de vértices W, uma cobertura de cardinalidade mínima (ou seja, aquela em que $|W|$ é mínimo).

VI-2 **Problema do independente máximo**. Problema da determinação de um conjunto independente de vértices de cardinalidade máxima (e que, de acordo com o teorema 5.1, equivale à determinação da cobertura mínima de vértices, ou seja, ao problema VI-1).

VI-3 **Problema da Clique máxima**. Problema que consiste na determinação de uma clique de cardinalidade máxima (e que, mais uma vez de acordo com o teorema 5.1, equivale à determinação de um independente máximo no grafo complementar, i. e, ao problema VI-2).

6. Circuitos de Hamilton.

Dado um tabuleiro de xadrez e associe-se a cada um dos seus 64 quadrados um vértice de um grafo G cujos arcos ligam os vértices associados a quadrados entre as quais é possível efectuar um movimento de cavalo. Neste grafo existem circuitos de Hamilton que correspondem a movimentos sucessivos de um cavalo de forma a que todos os quadrados (brancos e pretos) sejam visitados uma única vez. Na capa deste texto representa-se um dos circuitos de Hamilton possíveis em G.

Quando um grafo admite um circuito de Hamilton, diz-se hamiltoniano. O teorema 6.1 (da página seguinte), dá-nos uma condição suficiente para que um grafo seja hamiltoniano.

6.1 Teorema

Seja G um grafo com n vértices e suponha-se que, para quaisquer dois vértices não adjacentes em G, x e y, a soma dos seus graus é não inferior a n. Então G é hamiltoniano.

Prova:

Seja G um grafo que satisfaz as hipóteses do teorema, e suponha-se que G não é hamiltoniano. Suponha-se ainda que G é um grafo maximal (relativamente ao número de arcos) com esta propriedade, i. e, tal que acrescentando mais um arco se obtém um circuito de Hamilton. Note-se que esta situação pode sempre ser atingida sem se alterar as condições que satisfazem as hipóteses (com efeito, ao acrescentarem-se arcos, unindo vértices previamente não adjacentes, não só não se faz decrescer o grau de nenhum vértice, como não se criam novos pares de vértices não adjacentes).

Uma vez que G não é completo (caso contrário admitiria um circuito de Hamilton), existe um par de vértices não adjacentes, x e y, e dado que G é maximal (não hamiltoniano), por adição do arco [x,y] obtém-se um circuito de Hamilton que contém [x,y]. Logo G contém um caminho, entre x e y, que percorre, sem repetição, todos os restantes vértices de G, i. e, (após reordenação adequada dos vértices) contém o caminho

$$[x=v_1,v_2,\ldots,v_{n-1},v_n=y].$$

Seja N(x) o conjunto dos vértices adjacentes a x e seja $Q(y)=\{v_i: v_{i-1}\in N(y)\}$ [8] (uma vez que y não é adjacente a ele próprio, i. e, $y\notin N(y)$, o conjunto Q(y) está bem definido e $|Q(y)|=|N(y)|$).

Por hipótese $|N(x)|+|Q(y)|\geq n$ (i). Por outro lado, dado que $v_1=x\notin Q(y)$ e $x\notin N(x)$, $v_1\notin N(x)\cup Q(y)$, pelo que $|N(x)\cup Q(y)|\leq n-1$ (ii). Consequentemente, tendo em conta (i) e (ii), vem que $|N(x)\cap Q(y)|\geq 1$.

Seja $v_i\in N(x)\cap Q(y)$. A partir de $x=v_1$, obtém-se o caminho $[v_1,\ldots,v_{i-1}]$, o qual (uma vez que $v_{i-1}\in N(y)$) se pode estender ao caminho $[v_1,\ldots,v_{i-1},v_n]$ (*). A partir de $y=v_n$ pode obter-se o caminho $[v_n,v_{n-1},\ldots,v_i]$ que, por sua vez (dado que $v_i\in N(x)$) se pode estender ao caminho $[v_n,v_{n-1},\ldots,v_i,v_1]$ (**). A partir dos caminhos (*) e (**) podemos construir um circuito de Hamilton, o que contraria a hipótese (de G não admitir um circuito de Hamilton).

◊

Deve observar-se que qualquer grafo que satisfaça as hipóteses do teorema 6.1 é um grafo conexo. Com efeito suponha-se que G=(V,E), com |V|=n, tem k componentes $G_j=(V_j,E_j)$, para j=1, … , k. Então, dados dois vértices pertencentes a componentes distintas, $x\in V_p$ e $y\in V_q$ (com $\{1,\ldots,k\}\supseteq\{p,q\}$), tem-se que x e y não são adjacentes e $\delta(x)\leq|V_p|-1$ e $\delta(y)\leq|V_q|-1$. Logo $\delta(x)+\delta(y)=|V_p|+|V_q|-2<|V|=$, i. e, o grafo não satisfaz as hipóteses do teorema.

Encontrar um circuito de Hamilton num grafo de pequena dimensão que o admita é relativamente fácil. Porém, quando a dimensão cresce, provar que não existe qualquer circuito de Hamilton pode tornar-se muito difícil.

Na obtenção de circuitos de Hamilton devem ter-se em conta as seguintes três regras básicas:

1. Se um vértice tem grau 2, então ambos os arcos incidentes no vértice devem fazer parte do circuito;

---

[8] N(y) é o conjunto dos vértices adjacentes a y.

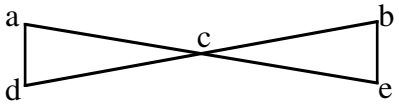
2. Não se deve obter qualquer subcircuito, quando se constroi um circuito de Hamilton (ou seja, não se deve percorrer um circuito que não contém todos os vértices);

3. Uma vez que se visite um dado vértice (durante o percurso de um circuito de Hamilton) todos os arcos incidentes nesse vértice que não foram utilizados podem ser eliminados.

Note-se que ao eliminarmos arcos (de acordo com 3.) estamos a diminuir o grau de outros vértices.

6.5 Exemplo

Utilizando as regras anteriores, vamos provar que o grafo a seguir indicado não admite qualquer circuito de Hamilton.



Neste exemplo, aplicando-se a regra 1. aos vértices *a, b, d* e *e* , tem-se que qualquer circuito de Hamilton utiliza o caminho [*c*,*a*]-[*a*,*d*]-[*d*,*c*], o que obriga à determinação de um subcircuito próprio, contradizendo-se, assim, a regra 2.

Código de Gray

Vamos considerar uma aplicação directa, muito simples, dos circuitos de Hamilton.

Certos instrumentos contadores convertem números reais em sequências de dígitos de comprimento fixo (como é o caso dos conta-quilómetros dos automóveis). Com estes dispositivos, na maioria dos casos, os números vão variando com a modificação de um único dígito. Porém, em certas situações, a mudança do número obriga à troca de vários dígitos, como é o caso da passagem de 189 999 para 190 000, operação que provoca alguns problemas mecânicos de dificil resolução. Nestas passagens, qualquer avaria (mesmo que pontual) no dispositivo mecânico pode provocar erros consideráveis. Para os evitar, podemos definir uma sequência de números de tal forma que de um número para

outro apenas se troca um dígito. Com estas sequências, uma avaria pontual (ausência atempada de resposta do dispositivo mecânico) apenas provoca um erro de uma unidade. No caso destas sequências se referirem a representações binárias de números, elas são conhecidas como códigos de Gray.

Um grafo, cujos vértices são os n-uplos $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1, x_0$, de zeros e uns, tais que dois vértices são adjacentes se diferem apenas num dígito designa-se usualmente por n-cubo e denota-se por Q_n (deve observar-se que, nestas condições, existem 2^n vértices, cada um dos quais associado a um número, entre 0 e 2^n-1, representado numa base binária). Um código de Gray corresponde a um circuito de Hamilton no n-cubo Q_n. A existência de um tal circuito fica garantida pelo que se segue.

6.2 Teorema

Para $n\geq 2$, o grafo Q_n é hamiltoniano.

Prova:

A prova será feita por indução sobre n. Para n=2, Q_2 é um circuito com 4 arestas, pelo que o resultado é verdadeiro (podemos obter o circuito de Hamilton [00,01,11,10,00]). Supondo que para n=p existe o circuito de Hamilton em Q_p, $[v_0,v_1,\ldots,v_{2^n-2},v_{2^n-1},v_0]$, então

$$[0v_0,0v_1,\ldots,0v_{2^n-2},0v_{2^n-1},1v_{2^n-1},1v_{2^n-2},\ldots,1v_1,1v_0,0v_0]$$

é um circucíto de Hamilton em Q_{p+1}.

◊

Na prática, para a codificação e descodificação dos números, é necessário conhecer a posição de cada vértice no circuito de Hamilton que define o código construído. Um modo fácil de o conseguir, consiste em construir o código de Gray de comprimento 2^{n+1}, a partir do código de Gray de comprimento 2^n anteriormente construído (ou seja, tal como se procedeu na demonstração do teorema anterior, primeiro percorre-se a sequência de vértices do circuito de Hamilton de Q_n, colocando um zero na

posição mais à esquerda e, posteriormente, percorre-se o mesmo circuito pela ordem inversa, colocando 1 nessa mesma posição).

O teorema a seguir indica um modo sistemática para a obtenção das diferentes representações do código de Gray com cadeias binárias de n de dígitos.

6.3 Teorema

Etiquetando os vértices do circuito de Hamilton de Q_n (construído tal como anteriormente se indicou) com 0, 1, 2, 3, … , 2^n-1, de acordo com a ordem pela qual são visitados. Se 2^k (com k entre 0 e n-1) é a maior potência de 2 que divide $p \in \{1, 2, 3, \ldots, 2^{n-1}\}$, então no p-ésimo número binário representado, α_p, o dígito que se modifica (em relação ao vértice anterior, i. e, em relação ao vértice de ordem p-1) é o k-ésimo a partir da direita.

Prova:

Esta prova vai ser feita por indução sobre n.

Com efeito para n=2 obtém-se a sequência

p	α_p
0	00
1	01
2	11
3	10

k	2^k
0	1
1	2
0	1

Supondo que a afirmação anterior é verdadeira para $2 \leq n \leq N$, vamos analisar o comportamento da sequência de números binários α_p para n=N+1.

Para os primeiros p números representados, com $0 \leq p \leq 2^N-1$, vem que

$$\alpha_p = 0a_{N-1}a_{N-2}\ldots a_1a_0,$$

logo, por hipótese de indução se 2^k é a maior potência de 2 que divide p, então, na passagem de α_{p-1} para α_p é o k-ésimo dígito binário (a contar da direita) que se modifica.

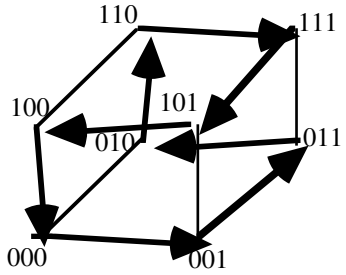
Para $p=2^N$, o dígito que se modifica é o N-ésimo, pelo que a afirmação continua válida.

Para $p=2^N+\tau$, com $0 \leq \tau \leq 2^N-1$, verifica-se que α_p coincide com $\alpha_{p-2\tau-1}$, em todos os dígitos à excepção do dígito mais à esquerda (que para α_p tem o valor 1 e para $\alpha_{p-2\tau-1}$

tem o valor 0). Seja 2^k a maior potência de 2 que divide $p=2^N+\tau$, então $p=2^k(2^{N-k}+q)$ com $\tau=2^kq$ e $p-2\tau-1=2^N-\tau-1=2^k(2^{N-k}-q)-1$, donde se pode concluir que 2^k é a maior potência que divide $(p-2\tau-1)+1=p-2\tau$. Como consequência o k-ésimo dígito (a contar da direita) do número $\alpha_{p-2\tau}$ alterou-se em relação a $\alpha_{p-2\tau-1}$, logo o k-ésimo dígito (a contar da direita) de α_p alterou-se em relação α_{p-1} (uma vez que, com excepção do dígito mais à esquerda, os dígitos de α_p coincidem com os $\alpha_{p-2\tau-1}$, e os de α_{p-1} com os de α\S\DO5($(p-1)-2(\tau-1)-1=\alpha_{p-2\tau}$) que completa a prova.

◊

A figura a seguir ilustra um circuito de Hamilton em Q_3, construído de acordo com o procedimento anteriormente indicado.



Por sua vez, para n=4, a tabela a seguir dá-nos a sequência de representações binárias produzidas pelo código de Gray (deve observar-se que na primeira e na última colunas indica-se a ordem segundo a qual o código produz cada uma das cadeias de dígitos binários obtidas).

7	0100	1100	8
6	0101	1101	9
5	0111	1111	10
4	0110	1110	11
3	0010	1010	12
2	0011	1011	13
1	0001	1001	14
0	0000	1000	15

De modo a ilustrar a prova anteriormente dada, as primeiras 8 representações da tabela aparecem segundo uma ordem ascendente e as 8 últimas segundo uma ordem descendente.

Com o processo de construção anteriormente referido podemos obter as regras de codificação e descodificação, cuja prova é deixada como exercício.

6.4 Exercício

Prove que o código de Gray obtido pelo circuito de Hamilton que percorre o n-cubo, conforme anteriormente se referiu, admite as seguintes regras de codificação e descodificação:

a) Supondo que $p=b_{n-1} \dots b_0$ onde $b_0, \dots, b_{n-1}$ são dígitos binários, e que para $j=0,\dots,n-1$, $a_j=b_j+b_{j+1} \pmod 2$ (ou seja, $a_j=0$ se $b_j=b_{j+1}$ e $a_j=1$ no caso contrário), convencionando-se que $b_n=0$, então o número $\alpha=a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0$ ocupa a posição p.

b) Supondo que $\alpha_p=a_{n-1} \dots a_0$ onde $a_0, \dots, a_{n-1}$ são dígitos binários (i. e, supondo que α é representado pela sequência de dígitos binários $a_{n-1} \dots a_0$) e que para $i=0, \dots, n-1$, $b_i=\sum_{j=i}^{n-1} a_j \pmod 2$, então α_p ocorre na posição

$$p=b_{n-1}b_{n-2}\dots b_1b_0.$$

Sugestões: Para provar a) utilize indução sobre n (o número de dígitos utilizados nas cadeias de símbolos do código de Gray); para provar b) proceda à inversão das expressões obtidas em a).

Problema do caixeiro viajante (TSP)

Dado um grafo G=(V,E) a determinação de um circuito de Hamilton de custo mínimo é equivalente à determinação do vector de componentes x_{ij} tais que $x_{ij}=1$ se $[i,j]\in C$ (onde C é um subconjunto de E que define um circuito de Hamilton de custo mínimo) e $x_{ij}=0$ no caso contrário (ou seja, se $[i,j]\notin C$).

A determinação deste vector de componentes x_{ij} pode fazer-se pela resolução do programa linear de variáveis binárias:

$$\min \sum_{[i,j]\in E} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{\{i:[i,j]\in E\}} x_{ij}=1, \quad \text{para } j\in V \qquad \text{(i)}$$

$$\sum_{\{j:[i,j]\in E\}} x_{ij}=1, \quad \text{para } i\in V \qquad \text{(ii)}$$

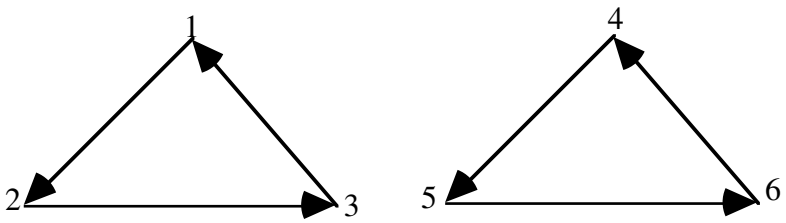
$$\sum_{[i,j]\in \partial(U)} x_{ij} \geq 1, \quad \text{para } 2\leq|U|\leq|V|-2 \qquad \text{(iii)}$$

$$x_{ij}\in \{0,1\} \quad \forall [i,j]\in E \qquad \text{(iv)}$$

Note-se que embora as restrições (i) e (ii) garantam que cada vértice tenha grau 2, não evita que possam aparecer subcircuitos (como soluções admissíveis). Por exemplo, num grafo com 6 vértices (ver figura a seguir) a solução admissível:

$$x_{12}=x_{23}=x_{31}=x_{45}=x_{56}=x_{64}=1$$

satisfaz (i) e (ii) e não constitui um circuito de Hamilton.



O conjunto de restrições (iii) evita que se considerem subcircuitos nas soluções admissíveis.

Alternativamente a (iii) poder-se-iam evitar o aparecimento de subcircuitos, considerando o conjunto de restrições:

$$\sum_{\{[i,j]\in E:\ i\in U\ j\in U\}} x_{ij} \leq |U|-1, \text{ para } 2\leq|U|\leq|V|-2.$$

O problema do caixeiro viajante é fácil de estabelecer e não exige grande talento para a obtenção de circuitos de Hamilton de custo considerado aceitável, quando eles existem (mesmo em problemas grandes). No entanto, a determinação da solução óptima do problema tem resistido à obtenção de "bons" algoritmos de resolução. Trata-se pois de um problema que contém todos os condimentos que têm atraido muitos matemáticos, ao longo dos séculos: formulação simples e dificuldade de resolução.

Existem também razões de caracter prático que contribuem para a importância do TSP. Muitos dos problemas reais (da vida prática) podem formular-se como casos particulares do TSP, como sejam:

- **Problema de "Routing"**: dada uma frota de veículos que serve determinado conjunto de clientes, determinar quais os clientes a visitar por cada veículo e por que ordem essa visita deve ser feita.

- **Disciplinamento de tarefas**: desciplinar de forma sequencial n tarefas a serem executadas numa dada máquina. Assume-se que as tarefas podem ser feitas segundo qualquer ordem e que o objectivo corresponde a executá-las no mais curto espaço de tempo. Parte-se do princípio que a máquina para realizar a tarefa j tem de estar no estado S_j (relacionado com condições de rotação, temperatura, pressão, etc). Nestas condições, o tempo requerido para completar a tarefa j depois da tarefa i será $t_{ij}=c_{ij}+p_j$ (onde c_{ij} corresponde ao tempo necessária para levar a máquina do estado S_i para o estado S_j e p_j corresponde ao tempo de execução da tarefa j).

Para a resolução deste problema convém criar um estado inicial e final fictício S_0 para o qual se tem $p_0=0$.

- **Corte de papel de parede**: pretende-se cortar n folhas de papel de um único e longo rolo. A folha i começa na posição s_i e termina na posição f_i relativamente a uma unidade segundo a qual o desenho se repete. Logo $f_i=s_i+l_i \pmod 1$, onde l_i é o comprimento da folha i. A quantidade de papel desperdiçado se a folha j é cortada imediatamente após a folha i é então

$$c_{ij}=\begin{cases} s_j-f_i & \text{se } f_i \le s_j \\ 1+s_j-f_i & \text{caso contrário} \end{cases}$$

ou de um modo equivalente $c_{ij}=s_j-f_i \pmod 1$.

- **Perfuração de placas de circuitos electrónicos**: Pretende-se perfurar uma placa em pontos nos quais se desejam inserir os pinos de um conjunto de "chips" para posteriormente serem soldados. Cada placa poderá ter muitos milhares de furos, pelo que se torna fundamental minimizar o tempo total da sua execução. A minimização deste tempo está ligado à minimização dos trajectos que a máquina de furar tem de fazer de modo a percorrer todos os pontos em que deve executar um furo.

A aproximação mais imediata à resolução deste tipo de problemas consiste na pesquisa exaustiva de todos os circuitos de Hamilton do grafo associado e na escolha daquele que apresenta menor custo (no sentido do menor comprimento, menor tempo de execução das tarefas, menor quantidade de papel disperdiçado, etc.). O algoritmo a seguir resolve, por uma pesquisa exaustiva, o TSP.

6.6 Algoritmo (determinação de um circuito de Hamilton de custo mínimo);

6.6.1 Seja $n \geq 3$ ($n \in N$) e C uma matriz de distâncias, com entradas não negativas;

6.6.2 Fazer Min:=∞;

6.6.3 Para todas as permutações π de $\{1, 2, \ldots, n\}$

Fazer Custo:= $\sum_{i=1}^{n} c_{i\pi(i)}$;

Se Custo<Min então

Min:=custo;

Melhor_ciruito:=π;

6.6.4 Devover Melhor_ciruito;

Fim do algoritmo.

Um grafo completo com n vértices tem (n-1)! circuitos de Hamilton, os quais podem ser agrupados em pares de circuitos que diferem apenas no sentido em que são percorridos (se [1,2,3,…,n-1,n,1] é um circuito de Hamilton, então [1,n,n-1,…,3,2,1] também é). Consequentemente, no casos simétricos ($c_{ij}=c_{ji}$), podem considerar-se apenas $\frac{1}{2}$(n-1)! circuitos de Hamilton. No entanto, mesmo para valores de n não muito grandes, este número continua a ser muito elevado. Por exemplo, um grafo simétrico completo com 12 vértices tem $\frac{1}{2}$11!=19 958 400 circuitos hamiltonianos candidatos ao circuito de custo mínimo. Assim, a verificação exaustiva, descrita no algoritmo anterior, apresenta um peso computacional muito elevado. Este facto tem levado os investigadores nos últimos anos ao estudo de heurísticas que determinem de uma forma eficiente soluções que se consideram próximas da óptima.

Alternativamente ao algoritmo de pesquisa exaustiva, anteriormente indicado, o qual exige um esforço computacional que cresce exponencialmente com n, vamos descrever uma técnica de "branch and bound" de aproximação à solução óptima do TSP (introduzida por Little em 1963), com a qual poderemos chegar à respectiva solução óptima sem analisar exaustivamente todas os circuitos de Hamilton possíveis.

Primeiro vamos mostrar como obter minorantes para o custo do circuito óptimo para o TSP. Para o fazer vamos usar o seguinte exemplo de matriz de custos associada a um TSP com 4 cidades:

$$C = \begin{bmatrix} \infty & 3 & 9 & 7 \\ 3 & \infty & 6 & 5 \\ 5 & 6 & \infty & 6 \\ 9 & 7 & 4 & \infty \end{bmatrix} \quad (1)$$

onde se introduz o símbolo ∞ nos elementos diagonais, para se colocar fora de hipótese a consideração de lacetes [9].

Suponha-se que subtraímos o maior número possível da primeira linha sem que nenhum dos seus elementos fique negativo (ou seja, subtraimos a menor das entradas na linha 1). No caso da matriz (1) subtraímos 3 a todas as entradas da 1ª linha.

Procedendo-se de modo idêntico para as restantes linhas de (1) obtém-se:

$$C = \begin{bmatrix} \infty & 0 & 6 & 4 \\ 0 & \infty & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \infty & 1 \\ 5 & 3 & 0 & \infty \end{bmatrix} \quad (2)$$

Depois desta alteração e tendo em conta que os arcos do circuito de Hamilton de custo mínimo permanecem inalteráveis, podemos concluir que o custo deste circuito é de pelo menos 3+3+5+4=15.

De um modo semelhante poderemos subtrair uma constante às entradas de qualquer coluna . Como a única coluna em (2) que não tem zeros é a 4ª, cuja entrada mínima é 1, podemos subtrair este valor às respectivas entradas obtendo-se a matriz:

$$C = \begin{bmatrix} \infty & 0 & 6 & 3 \\ 0 & \infty & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \infty & 0 \\ 5 & 3 & 0 & \infty \end{bmatrix} \quad (3)$$

Assim, podemos agora concluir que o custo do circuito de Hamilton de custo mínimo é não inferior a 15+1=16. Note-se que o custo mínimo associado a uma dada

---

[9]Trata-se de uma rede assimétrica, i.e., uma rede na qual o custo associado ao arco que liga o vértice i ao vértice j é (em certos casos) diferente do custo associado ao arco que liga o vértice j ao vértice i.

linha (coluna) está presente em qualquer arco que parta (chegue) do (ao) vértice que lhe está associado. Logo, uma vez que qualquer circuito de Hamilton tem de ter um destes arcos, este custo contribuirá necessariamente para o custo do circuito de Hamilton de custo mínimo a determinar. Considere-se uma das entradas nulas de (3). Seja ela c_{12}. Então, ou utilizamos o arco [1,2] ou não, dando-se aqui uma ramificação ("braching") da estratégia de resolução. No caso de não se utilizar o arco [1,2] faz-se $c_{12}=\infty$ e a menor das entradas da linha 1 passa a ser 3, pelo que poderemos subtrair esta quantidade às entradas da linha 1 de (3). De um modo semelhante poderemos subtrair 1 da 2ª coluna, obtemdo-se a matriz de custos:

$$C = \begin{bmatrix} \infty & \infty & 3 & 0 \\ 0 & \infty & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \infty & 0 \\ 5 & 2 & 0 & \infty \end{bmatrix} \quad (4)$$

O minorante obtido para o custo do circuito de Hamilton óptimo é, agora, de 16+(3+1)=20. No caso de se ter escolhido o arco [1,2], não existe imediatamente qualquer acréscimo no custo do circuito ($c_{12}=0$). Nestas condições deveremos considerar os circuitos que incluem [1,2] e se o minorante obtido exceder 20, então deveremos considerar a possibilidade de retroceder até ao ponto de ramificação para analisarmos a hipótese dos circuitos não incluirem o arco [1,2].

Considere-se agora a escolha do arco [1,2], então qualquer circuito que o contemple não utiliza nenhuma das restantes entradas da linha 1 e da coluna 2 de C em (5.6). Além disso, para se evitarem subcircuitos, não se deverá permitir a existência de qualquer arco que ligue o vértice final (do caminho até ao momento obtido), neste caso o vértice 2, a um dos vértices já percorridos. Nestas condições a entrada c_{21} da matriz (4) deve tomar o valor ∞ (para se evitar o aparecimento de qualquer subcircuito de comprimento 2). O novo valor mínimo da matriz reduzida na linha 2 é agora 1, pelo que se deve subtrair 1 da 2ª linha, obtendo-se a matriz:

1 3 4

$$C = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & 2 & 0 \\ 0 & \infty & 0 \\ 5 & 0 & \infty \end{bmatrix} \end{array} \qquad (5)$$

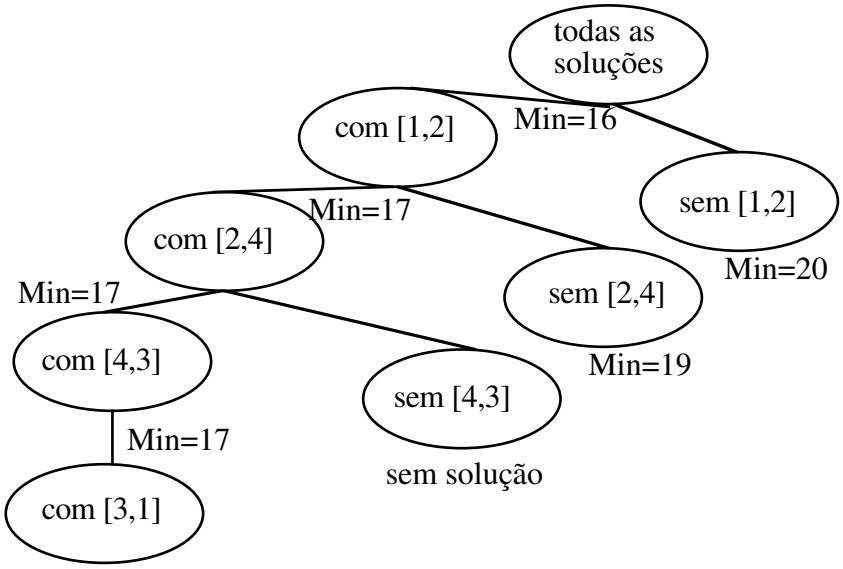
Nestas condições o minorante para um circuito de Hamilton que utiliza o arco [1,2] é agora 16+1=17. Uma vez que 17 é menor que o minorante obtido não considerando [1,2] (que é igual a 20), continua-se a construção do circuito de Hamilton utilizando o arco [1,2] e escolhendo-se uma outra entrada. A entrada a seguir escolhida não necessita estar ligada à entrada anterior, ou seja, não necessita ser da forma [i,1] ou [2,j], mas por simplicidade vamos escolher uma entrada na 2ª linha. A única entrada nula na 2ª linha é c_{24}, pelo que temos, novamente, que decidir se utilizamos ou não o arco [2,4].

Não utilizando o arco [2,4] o minorante é acrescido de 2+0=2 (a soma das entradas mínimas na linha 2 e coluna 4 de (5.7) depois de se fazer $c_{24}=\infty$). Utilizando o arco [2,4] não se aumenta o minorante, pelo que vamos primeiro considerar esta hipótese (utilizando [1,2] e [2,4]). Tal como anteriormente devemos eliminar a 2ª linha e a 4ª coluna de (5) e fazer $c_{41}=\infty$. A figura a seguir mostra-nos a matriz obtida depois de reduzida dos respectivos custos.

$$C = \begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \infty \\ \infty & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (6)$$

O modo de terminar o circuito consiste agora na utilização dos arcos [4,3] e [3,1] obtendo-se: 1-2-4-3-1. Na verdade não existe qualquer escolha, uma vez que a não utilização de [3,1] ou [4,3] implica a utilização de arcos proibidos (com custos ∞). Uma vez que $c_{43}=c_{31}=0$ este circuito tem um custo de 17.

Este procedimento é descrito pela árvore binária de escolhas que a seguir se indica.



Neste caso, tendo em conta a árvore das escolhas efectuadas, com facilidade se conclui que a solução encontrada corresponde à solução óptima.

7. Problemas de caminho mais curto

Dado um grafo G=(V,E) e, para todo o $u \in V$, denotando por N(u) o conjunto dos vértices adjacentes a u, um modo de determinar a componente conexa que contém um vértice $v \in V$, consiste na aplicação do seguinte algoritmo:

7.1 Algoritmo (para a determinação da componente que contém v)

7.1.1 Fazer k=0 e etiquetar v com o valor k;

7.1.2 Fazer $V^k=\{v \in V$: v está etiquetado com k$\}$;

7.1.3 Enquanto $\partial(V^k) \neq \emptyset$

para cada $v \in V^k$ etiquetar, com k+1, todos os vértices de $N(v) \setminus V^k$;

fazer $V^{k+1}=V^k \cup \{v \in V$: v está etiquetado com o valor k+1$\}$;

fazer k=k+1;

7.1.4 Devolver o subgrafo de G, $G[V_k]$;

Fim do algoritmo.

Com facilidade se verifica que, no subgrafo de G devolvido pelo algoritmo, os vértices, x^j (etiquetados com o valor j), são os que estão à distância j do vértice v (número de arcos do caminho, com o mínimo de arcos, que liga o vértice v ao vértice x^j). Esta noção de distância entre vértices de um grafo (número de arcos do caminho, com o mínimo número de arcos, que os liga) satisfaz as condições de uma métrica, ou seja,

a) $\forall x,y \in V$ $d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y)=0$ sse $x=y$;

b) $\forall x,y \in V$ $d(x,y)=d(y,x)$;

c) $\forall x,y,z \in V$ $d(x,y)+d(y,z) \geq d(x,z)$.

Com esta noção de distância, definindo-se diâmetro de um grafo conexo, como sendo o máximo valor atingido pela distância entre os seus vértices, o teorema a seguir dá-nos um majorante para o número de vértices.

7.2 Teorema

Dado um grafo conexo, G=(V,E), com diâmetro d e máximo grau δ ($\Delta=\max\{\delta(v): v\in V\}$), podemos concluir que

$$|V|\leq 1+\Delta+\Delta(\Delta-1)+\Delta(\Delta-1)^2+\ldots+\Delta(\Delta-1)^{d-1}=1+\Delta\frac{(\Delta-1)^d-1}{\Delta-2}.$$

Prova:

Começaremos por provar, por indução sobre i ($1\leq i\leq d$) que, no máximo, existem $\Delta(\Delta-1)^{i-1}$ vértices à distância i de um dado vértice x.

Para i=1 este resultado é imediato. Vamos considerar os pares de vértices adjacentes, (y,z), que estão à distância i e i+1 de x, respectivamente, e supôr que existem, no máximo, $\Delta(\Delta-1)^{i-1}$ vértices y (à distância i de x), cada um das quais é adjacente a um vértice, v, que está à distância i-1 de x, ou seja, que está no caminho de menor comprimento entre x e y. Logo existem no máximo (Δ-1) escolhas para z. Por outro lado, para cada z existe pelo menos um y (no caminho de comprimento mínimo entre x e z) e, consequentemente, existem no máximo $\Delta(\Delta-1)^{i-1}(\Delta-1)=\Delta(\Delta-1)^i$ vértices nas condições de z. Logo, o resultado pretendido obtém-se somando os números máximos de vértices à distância 0 (o próprio vértice), 1, 2, … , do vértice x.

◊

No caso em que os arcos têm associados diferentes comprimentos (ou pesos), a distância entre dois vértices, x e y, passa a ser a soma das distâncias associadas ao arcos que compõem o caminho (entre esses vértices) com soma minima, ou seja, sendo G=(V,E), $c:E\rightarrow\mathbf{R}_0^+$ a função que define os comprimentos associados aos arcos e P_{xy} o conjuntos dos caminhos entre os vértices x e y, definidos pelos respectivos conjuntos de arcos, $d(x,y)=\min\{c(C): C\in P_{xy}\}$, onde $c(C)=\sum_{e\in C}c(e)$ [10]. Esta distância, em relação à anterior, apresenta a desvantagem de nem sempre definir uma métrica, uma vez que, com ela, a desigualdade triangular pode não ser satisfeita.

---

[10]Deve observar-se que para transformar a noção de distância anteriormente referida num caso particular desta, basta associar uma distância unitário a todos os arcos do grafo.

Nos casos em que aos arcos estão associados comprimentos (ou pesos), o algoritmo anterior (para a determinação da componente que contém um vértice fixo v) pode não determinar os caminhos de comprimento (ou peso) mínimo entre o vértice fixo v e os restantes vértices da componente que o contém, pelo que, nestes casos, para esse efeito, é necessário introduzir um algoritmo apropriado.

Um algoritmo muito utilizado na determinação do caminho mais curto (ou de menor comprimento) entre um vértice fixo x e os restantes vértices de um grafo conexo, G=(V,E), com comprimentos nos arcos determinados pela função $c:E\rightarrow\mathbf{R}_0^+$, é o algoritmo de Dijkstra que a seguir se descreve.

7.3 Algoritmo (de Disjkstra);

7.3.1 Fazer k=1, $S^1=\{x\}$, T=V\S, pred(x)=x e $d_x(x)=0$;

7.3.2 Para cada $v\in V\setminus\{x\}$, fazer

$$\text{pred}(v)=x \text{ se } [x,v]\in\partial(\{x\}) \text{ e } d_x(v)=\begin{cases} c([x,v]) & \text{se } [x,v]\in\partial(S) \\ \infty & \text{se } [x,v]\notin\partial(S) \end{cases};$$

7.3.3 Enquanto $k<|V|$

escolher $u\in V\setminus S^k$ tal que $u=\arg(\min\{d(v): v\in V\setminus S^k\})$ [11]

fazer $S^{k+1}=S^k\cup\{u\}$;

para cada $[u,v]\in\partial(S^{k+1})$ se $d_x(v)>d_x(u)+c([u,v])$ então

fazer pred(v)=u e $d_x(v)=d_x(u)+c([u,v])$;

fazer k=k+1;

Fim do algoritmo.

Com este algoritmo, à saída, obtém-se a função $d_x:V\rightarrow\mathbf{R}_0^+$ (que determina a distância entre cada um dos vértices de V e o vértice x) e a função pred:V→V (que, para cada vértice $v\in V$, determina o predecessor de v no caminho mais curto entre x e v) [12].

7.4 Teorema

---

[11] Se este argumento não fôr único, escolhe-se um dos vértices que satisfazem a igualdade.

[12] Para v=x, a função pred(x) dá o próprio vértice.

Dado um grafo conexo G=(V,E), um vértice $x\in V$ e uma função $c:E\rightarrow\mathbf{R}_0^+$ dos comprimentos dos arcos, o algoritmo de Disjkstra determina, num número finito de passos, os caminhos de comprimento mínimo entre o vértice x e os demais vértices de V.

Prova:

Tendo em conta que em cada execução dos passos 7.3.3 $|S^{k+1}|=|S^k|+1$, é claro que o algoritmo termina num númeor finito de passos, pelo que resta provar que a função $d_x(v)$ determina o comprimento do caminho mais curto entre x e v (note-se que, no pressuposto de que a função $d_x(v)$ determina o comprimento do caminho mais curto entre x e v, de acordo com a construção de pred(v), esse caminho pode ser obtido recursivamente à custa desta função). Esta prova vai ser feita por indução sobre k.

Durante a execução do passo 7.3.3, o conjunto de vértices V está particionado em dois subconjuntos disjuntos S^k e $V\backslash S^k$. Vamos supôr que para cada vértice $y\in S^k$, $d_x(y)=d(x,y)$ e para cada vértice z em $V\backslash S^k$, $d_x(z)$ é o comprimento do caminho mais curto entre x e z, de entre os caminhos cujos vértices intermédios estão em S, i. e, à excepção de z, os caminhos percorrem unicamente vértices de S (deve observar-se que embora para um vértice $z\in V\backslash S^k$ para o qual não exista nenhum arco de $\partial(S^k)$ que lhe seja incidente se tenha $d_x(z)=\infty$, pela conexidade de G, $\forall k\in\{1,\ldots,|V|-1\}$ podemos concluir que $\exists v\in V\backslash S^k$ tal que $d_x(v)<\infty$). È imediato que estas propriedades se verificam para k=1. Então, para $k<|V|$, sendo $u\in V\backslash S^k$ tal que $d_x(u)=\min\{d_x(v): v\in V\backslash S^k\}$, qualquer caminho entre x e u que não contenha apenas vértices de S^k, será da forma $P=[x,v_1,\ldots,v_{p-1},v_p,\ldots,u]$ onde $S^k\supseteq\{x,v_1,\ldots,v_{p-1}\}$ e $V\backslash S^k\supseteq\{v_p,\ldots,u\}$. Logo o comprimento do caminho P vem dado por

$$comp(P)=d_x(v_p)+\sum_{e\in E(P')}c(e),$$

onde $P'=[v_p,\ldots,u]$ e E(P') denota o conjunto de arcos de P'. Dado que $d_x(u)\leq d_x(v_p)$ e $\sum_{e\in E(P')}c(e)\geq 0$, podemos concluir que $d_x(u)\leq d_x(v_p)+comp(P')=comp(P)$, ou seja, que $d_x(u)=d(x,u)$.

Por outro lado, tendo em conta a actualização de $d_x(v)$ efectuada pelo algoritmo ($d_x(v)=d_x(u)+c([u,v])$ se $[u,v]\in\partial(S^k\cup\{u\})$ e $d_x(v)>d_x(u)+c([u,v])$) vamos considerar as duas situações mutuamente exclusivas: a) $[u,v]\notin\partial(S^k\cup\{u\})$, b) $[u,v]\in\partial(S^k\cup\{u\})$.

a) Se $[u,v]\notin\partial(S^k\cup\{u\})$, então ou $d_x(v)=\infty$, o que significa que não existe nenhum caminho entre x e v cujos vértices intermédios pertencem unicamente a $S^k\cup\{u\}$ e, neste caso, $d_x(v)$ permanece com o mesmo valor, ou $d_x(v)<\infty$, significando que, embora exista pelo menos um caminho entre x e v cujos vértices intermédios pertencem a $S^k\cup\{u\}$, todos eles utilizam unicamente vértices de S^k, pelo que a inclusão do vértice u não veio alterar a propriedade de minimalidade de $d_x(v)$ em relação aos comprimentos dos caminhos, cujos vértices intermédios estão $S^k\cup\{u\}$.

b) Se $[u,v]\in\partial(S^k\cup\{u\})$ então, ou $d_x(v)\leq d_x(u)+c([u,v])$ o que significa que o comprimento do caminho de menor comprimento de entre os caminhos entre x e v cujos vértices inetermédios estão em S^k é não superior ao comprimento de qualquer caminho entre x e v cujos vértices intermédios estão em $S^k\cup\{u\}$ (dado que a possibilidade de passar por u não traz qualquer redução), ou $d_x(v)>d_x(u)+c([u,v]$ e, neste caso, passa a existir um caminho entre u e v cujos vértices intermédios estão unicamente em $S^k\cup\{u\}$ e cujo comprimento, $d_x(u)+c([u,v])$, é o menor possível de entre aqueles cujos vértices intermédios estão em $S^k\cup\{u\}$ dado que, o menor dos comprimentos, de entre os comprimentos dos caminhos que não passam por u e estão nas condições anteriormente referidas é $d_x(v)>d_x(u)+c([u,v])$ [13].

◊

Circuito de comprimento mínimo

A obtenção de um circuito de comprimento mínimo num grafo conexo, G=(V,E), pode fazer-se com recurso à determinação, para cada $[x,y]\in E$, do caminho de

---

[13]Se não existe qualquer caminho entre x e v cujos vértices intermédios estejam em S^k, então $d_x(v)=\infty$ e, uma vez que $[u,v]\in E$ e $d_x(u)$ é o comprimento do caminho de menor menor comprimento entre x e u cujos vértices intermédios estão em S^k, $d_x(u)+c([u,v])$ passa a ser o comprimento do único caminho entre x e u cujos vértices intermédios estão em $S^k\cup\{u\}$.

comprimento mínimo entre x e y em G\{[x,y]}. Uma vez obtido esse caminho de comprimento mínimo entre x e y em G\{[x,y]}, juntando-lhe o arco [x,y], fica determinado o circuito de comprimento mínimo, de entre os que contêm o arco [x,y], $C_{[x,y]}$. Logo, um circuito de comprimento mínimo em G, C_{min}, é tal que $c(C_{min})=\min\{C_e: e\in E\}$.

Dado um grafo G=(V,E), designa-se por cintura ("girth") de G, o comprimento do circuito de comprimento (no sentido do número de arcos) mínimo em G. Relativamente às árvores e às bases ou dizemos que não têm cintura, ou então que têm cintura com valor infinito). Conhecido um circuito de comprimento mínimo num grafo, G, e, consequentemente, conhecida a sua cintura, o próximo teorema estabelece um minorante para o número de vértices de G.

7.5 Teorema

Seja G=(V,E) um grafo com "girth" g, seja $\tau=\text{Int}(\frac{g-1}{2})$ (onde Int(x) denota a parte inteira de x) e suponha-se que $\delta=\min\{\delta(v): v\in V\}$. Então

$$|V|\geq 1+\delta+\delta(\delta-1)+\ldots+\delta(\delta-1)^{\tau-1}=1+\delta\frac{(\delta-1)^{\tau}-1}{\delta-2}.$$

Prova:

Esta prova é idêntica à do teorema 7.2. Vamos fixar um vértice arbitrário $x\in V$ e mostrar por indução sobre i, com $1\leq i\leq\tau$, que o número de vértices à distância i de x é pelo menos $\delta(\delta-1)^{i-1}$.

Este resultado é imediato para i=1.

Vamos considerar os pares de vértices adjacentes, (y,z), que estão à distância i e i+1 de x, respectivamente, tal que $i<\tau$. Para cada vértice y tal que $d(x,y)=i<\tau$, existe um único vizinho (vértice adjacente a y) à distância i-1 de x e nenhum vizinho à distância i de x (caso contrário poderíamos construir um caminho entre x e y e voltar a y por outro caminnho cuja reunião teria um comprimento 2i ou 2i+1) e, consequentemente, existiria um circuito de comprimento não superior a 2i+1, o que não é possível, uma vez que $2i+1<2\tau+1=2\text{Int}(\frac{g-1}{2})+1\leq 2\frac{g-1}{2}+1=g$). Consequentemente, existem pelo menos $\delta-1$ vizinhos de y que estão a uma distância i+1 de x. De um modo idêntico, tendo em conta

que z está à distância i+1, apenas o vizinho de z, y, está à distãncia i de x (dado que, por hipótese, $2(i+1)\leq 2\tau<g$). Logo, podemos concluir que se existem pelomenos $\delta(\delta-1)^{i-1}$ à distância i do vértice x, então existirão pelo menos $\delta(\delta-1)^{i-1}(\delta-1)=\delta(\delta-1)^{i}$ à distância i+1.

◊

Árvore abrangente de custo mímino

Suponha que se pretendem ligar n cidades por intermédio de uma rede de telecomunicações e que se conhece o custo da instalação dos cabos que permitam a ligação entre cada par de cidades. A determinação dos pares de cidades que se devem ligar com o menor custo, de modo a que seja possível o estabelecimento de uma ligação entre quaisquer cidades, corresponde à determinação de uma árvore abrangente de custo mínimo. Este problema pode resolver-se com a aplicação do designado "greedy algorithm" (algoritmo devorador) que a seguir se descreve.

7.6 **Algoritmo** ("greedy");
7.6.1 Seja G=(V,E) um grafo conexo com custos nos arcos;
7.6.2 Fazer E'=∅;
7.6.3 Enquanto G'=(V,E') não é conexo
escolher $e\in$ E', tal que *e* liga duas componentes de G'
e tem custo mínimo;
fazer E'=E'$\cup\{e\}$;
7.6.4 Devolver o grafo G'=(V,E');
Fim do algoritmo.

7.7 Teorema
Dado um grafo conexo, G=(V,E), e uma função de custo associada aos arcos, c:E$\rightarrow\mathbf{R}_0^+$, o algoritmo 7.6 ("greedy") determina uma árvore abrangente de custo mínimo num número finito de passos.

Prova:

É imediato concluir (por aplicação do teorema 2.5) que o subgrafo de G, G'=(V,E') determinado pelo algoritmo, é uma árvore abrangente, pelo que resta provar que tem custo mínimo. Suponha-se que |V|=n e que $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ são os arcos de E', indexados de

acordo com a ordem pela qual o algoritmo os determinou (consequentemente $c(e_1)\leq c(e_2)\leq\ldots\leq c(e_{n-1})$, uma vez que após a determinação de e_k, qualquer dos arcos e_{k+1}, … , e_{n-1} é candidato a entrar para E' e o algoritmo escolhe um de menor custo). Dado um subconjunto de arcos de E, A ($E\supseteq A$), seja $c(A)=\sum_{e\in A} c(e)$ e suponha-se que existe uma árvore abrangente G=(V,A') com A'=$\{a_1,a_2, \ldots , a_{n-1}\}$, tal que c(A')<c(E'). Suponha-se ainda, sem perda de generalidade, que $c(a_1)\leq c(a_2)\leq\ldots\leq c(a_{n-1})$. Seja p o menor índice tal que $\sum_{i=1}^{p} c(a_i) < \sum_{i=1}^{p} c(e_i)$ (p>1, uma vez que o algoritmo escolhe, para e_1, de entre os arcos de E, um arco com menor custo). Então $\sum_{i=1}^{p-1} c(a_i) \geq \sum_{i=1}^{p-1} c(e_i)$ e verifica-se ainda que $c(a_1)\leq\ldots\leq c(a_p)<c(e_p)$. Na escolha do p-ésima arco, o algoritmo escolhe e_p e nenhum dos arcos a_1, … , a_p, cujos custos são estritamente menores. Logo, em qualquer dos arcos a_1, … , a_p, falha a condição de ligar diferentes componentes de (V,E") onde E"=$\{e_1,\ldots,e_{p-1}\}$, pelo que as componentes conexas de (V,A") onde A"=$\{a_1,\ldots,a_p\}$ são subconjuntos das componentes conexas de (V,E") e, consequentemente, (V,A") tem, pelo menos, tantas componentes conexas quantas as de (V,E"). Porém, esta conclusão é impossível.

Com efeito, seja $k_{E"}$ e $k_{A"}$ o número de componentes conexas de (V,E") e (V,A"), respectivamente. Dado que E" e A" são bases de (V,E") e (V,A"), respectivamente, pelo lema 4.8, $|E"|=|V|-k_{E"}=n-k_{E"}$ e $|A"|=|V|-k_{A"}=n-k_{A"}$ consequentemente, uma vez que (de acordo com a conclusão anterior) $k_{A"}\geq k_{E"}$, decorreria que $p-1=|E"|=n-k_{E"}\geq n-k_{A"}=|A"|=p$, o que é absurdo.

◊

Dado um grafo G=(V,E) conexo e uma função de custo associada aos arcos, $c:E\rightarrow \mathbf{R}_0^+$, o algoritmo de Kruskal que a seguir se descreve determina a árvore abrangente de custo mínimo e é equivalente ao apresentado na página anterior.

7.8 Algoritmo (de Kruskal);

7.8.1 Seja G=(V,E) onde E=$\{e_1,\ldots,e_n\}$, tal que $c(e_1)\leq c(e_2)\leq\ldots\leq c(e_n)$;

7.8.2 Fazer $E^0=\varnothing$ e k=0;

7.8.3 Se $(V,E^k\cup\{e_{k+1}\})$ não tem circuitos então fazer $E^{k+1}=E^k\cup\{e_{k+1}\}$
senão fazer $E^{k+1}=E^k$;

7.8.4 Se $|E^{k+1}|<|V|-1$ então fazer k=k+1 e voltar ao passo 7.8.3
senão devolver o grafo $G'=(V,E^{k+1})$;

Fim do algoritmo.

Observe-se que, no passo 7.8.3, cada arco acrescentado a E^k (de modo a obter-se E^{k+1}) liga dois vértices em diferentes componentes.

7.9 Exercício

A exploração de uma determinada rede de transportes obriga a garantir um conjunto de ligações regulares (de ida e volta) entre pares cidades de modo a permitir o transporte de passageiros (com eventuais mudanças de autocarro em pontos intermédios) entre quaisquer duas cidades da tabela a seguir. Supondo que uma dada companhia pretende obter esta concessão com um conjunto de ligações regulares cuja distância total seja mínima, indique o grafo correspondente ao conjunto das ligações a propôr.

	2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1. Beja	507	348	141	372	183	454	144
2. Braga		166	621	256	357	49	388
3. Coimbra			462	155	198	114	230
4. Faro				511	297	568	257
5. Guarda					368	203	381
6. Lisboa						304	44
7. Porto							336
8. Setúbal							

8. Problemas de fluxo máximo

Uma rede é um grafo conexo dirigido, G=(V,E), com pesos nos arcos, onde se distinguem dois vértices particulares, o vértice de partida s e o vértice de chegada t, tal que s≠t. Em geral o peso associado a um arco, *e*, é referido como sendo a sua capacidade e denota-se por cap(*e*).

8.1 Definição

Dada uma rede G=(V,E), com origem e destino nos vértices s e t, respectivamente, designa-se por fluxo em G toda a função $f:E\rightarrow \mathbf{R}_0^+$ que satisfaz as seguintes propriedades:

$$0\leq f(e)\leq cap(e) \qquad \forall e\in E \qquad (8.1.1)$$

$$\sum_{e\in\partial^+(\{v\})} f(e) = \sum_{e\in\partial^-(\{v\})} f(e) \qquad \forall v\in V\setminus\{s,t\} \qquad (8.1.2).$$

O valor do fluxo transportado entre os vértices s e t, denota-se por val(f) e vem dado por $val(f) = \sum_{e\in\partial^+(\{s\})} f(e) - \sum_{e\in\partial^-(\{s\})} f(e)$.

Tendo em conta que ∀S tal que V⊇S, o corte ∂(S) se subdivide nos subconjuntos $\partial^+(S)=\{e\in E: cauda(e)\in S, cabeça(e)\notin S\}$ e $\partial^-(S)=\{e\in E: cauda(e)\notin S, cabeça(e)\in S\}$ vamos introduzir dois resultados especialmente úteis em problemas de optimização em redes.

8.2 Teorema

Seja $f:E\rightarrow \mathbf{R}_0^+$ um fluxo arbitrário numa rede, G=(V,E), S um subconjunto de vértices que contém o vértice de partida s, mas não contém o vértice de chegada t (V\{t}⊇S⊇{s}). Então $val(f) = \sum_{e\in\partial^+(S)} f(e) - \sum_{e\in\partial^-(S)} f(e)$.

Prova:

Dado que, por definição, $val(f) = \sum_{e\in\partial^+(\{s\})} f(e) - \sum_{e\in\partial^-(\{s\})} f(e)$ e

$$\forall v\in V\setminus\{s,t\} \qquad \sum_{e\in\partial^+(\{v\})} f(e) - \sum_{e\in\partial^-(\{v\})} f(e) = 0,$$

vem que

$$val(f) = \sum_{e\in\partial^+(\{s\})} f(e) + \sum_{v\in S\setminus\{s\}} \left[\sum_{e\in\partial^+(\{v\})} f(e) - \sum_{e\in\partial^-(\{v\})} f(e) \right] - \sum_{e\in\partial^-(\{s\})} f(e).$$

$$= \sum_{v\in S} \Big[\sum_{e\in\partial^+(\{v\})} f(e) - \sum_{e\in\partial^-(\{v\})} f(e) \Big].$$

Por outro lado, no somatório $\sum_{v\in S} \Big[\sum_{e\in\partial^+(\{v\})} f(e) - \sum_{e\in\partial^-(\{v\})} f(e) \Big]$, $\forall e=(x,y)\in E$ tal que $x,y\in S$, na parcela correspondente a x (onde x=cauda(e)) a contribuição é de f(e) e na parcela correspondente a y (onde y=cabeça(e)) a contribuição é de -f(e). Consequentemente, podemos concluir que a contribuição (para o fluxo) dos arcos incidentes em dois vértices de S tem um resultante nula. Logo, podemos considerar, unicamente, os arcos que apenas têm cauda em S ($e\in\partial^+(S)$) e os arcos que apenas têm cabeça em S ($e\in\partial^-(S)$), reduzindo-se este somatório a

$$\text{val}(f) = \sum_{e\in\partial^+(S)} f(e) - \sum_{e\in\partial^-(S)} f(e).$$

◊

Dada uma rede G=(V,E) onde s é o vértice de partida e t é o vértice de chegada, na definição que se segue deve observar-se que um s-t-corte de G, é um corte C=∂(S), tal que $V\supseteq S$ e $\{s,t\}\cap S=\{s\}$.

8.3 Definição

Sendo cap:E$\rightarrow\mathbf{R}_0^+$ a função de capacidade dos arcos, designa-se por capacidade de C, e denota-se por cap(C), a somas das capacidades dos arcos com cauda em S, i e, $\text{cap}(C) = \sum_{e\in\partial^+(S)} \text{cap}(e)$.

8.4 Teorema (do fluxo máximo-corte mínimo)

O valor do fluxo máximo numa rede G=(V,E) com origem s e destino t é igual à capacidade do s-t-corte de capacidade mínima.

Prova:

Dado um s-t-corte arbitrário, C=∂(S), pelo teorema 5.13 sabe-se que

$$\begin{aligned} \text{val}(f) &= \sum_{e\in\partial^+(S)} f(e) - \sum_{e\in\partial^-(S)} f(e) \\ &\le \sum_{e\in\partial^+(S)} f(e) \\ &= \text{cap}(C). \end{aligned}$$

Logo, basta provar que existe um fluxo f e um corte C tal que val(f)=cap(C), para se concluir que val(f) e cap(C) são, respectivamente, o máximo e o mínimo possíveis.

Primeiramente, vamos fazer a prova deste teorema para o caso em que as capacidades dos arcos são números inteiros, para o que basta provar que sendo f um fluxo arbitrário com valores inteiros, então, (i) ou existe um fluxo de inteiros f' tal que val(f')=val(f)+1 (ii) ou existe um s-t-corte, C, tal que cap(C)=val(f). Como consequência a partir de um fluxo arbitrário com valores inteiros (que pode ser o fluxo nulo), aplicando este resultado sucessivamente, vai-se incrementando, o mais possível, o fluxo na rede até se atingir a situação (ii) e, nestas condições, tendo em conta a desigualdade obtida inicialmente, concluimos que f é o fluxo máximo e C é o s-t-corte de capacidade mínima.

Resta a prova da inevitabilidade de se obter umas das situações (i) ou (ii), para o que vamos utilizar o algoritmo que a seguir se descreve.

0. Algoritmo
1. Fazer $S=\{s\}$;
2. Enquanto $T=\{e\in\partial^+(S): f(e)<cap(e)\}\cup\{e\in\partial^-(S): f(e)>0\}\neq\emptyset$
   2.1 Escolher $(x,y)\in T$;
   2.2 Fazer $S=S\cup\{x,y\}$ [14];
3. Devolver o conjunto S;
   Fim do algoritmo.

Sendo f o fluxo corrente, após a aplicação deste algoritmo, inevitavelmente se obtém uma das seguintes situações: a) $t\in S$ ou b) $t\notin S$.

a) Suponha-se que $t\in S$. Então existe um caminho entre s e t, $P=[v_0=s,v_1,\ldots,v_p=t]$ tal que, para cada i, (*) ou (v_{i-1},v_i) é um arco da rede, *e*, tal que $f(e)<cap(e)$, (**) ou (v_i,v_{i-1}) é um arco da rede tal que $f(e)>0$. Sendo $P^+=\{$arcos do caminho P na situação (*)$\}$ e $P^-=\{$arcos do caminho P na situação (**)$\}$, a partir do fluxo f podemos concluir que a função f' tal que

---

[14]Observe-se que, uma vez que $(x,y)\in\partial(S)$, um dos vértices (x ou y) já pertence a S, pelo que a cardinalidade de S apenas é incrementada de uma unidade.

$$f'(e)=\begin{cases} f(e)+1 \text{ se } e\in P^+ \\ f(e)-1 \text{ se } e\in P^- \\ f(e) \text{ nos outros casos} \end{cases}.$$

é ainda um fluxo.

Com efeito $\forall e\in E$, $e\in P^+$, $e\in P^-$ ou $e\in E\setminus(P^+\cup P^-)$. Dada que todas as capacidades são numeros inteiros positivos, se $e\in P^+$ (i. e, se $0\le f(e)<cap(e)$) então $0\le f(e)+1\le cap(e)$, se $e\in P^-$ (i. e, se $0<f(e)\le cap(e)$) então $0\le f(e)-1<cap(e)$. Finalmente de se $e\in E\setminus(P^+\cup P^-)$, então, uma vez que $f(e)=f'(e)$ tanto (8.1.1) como (8.1.2) permanecem válidas para f'. Logo resta-nos provar que a condição (8.1.2) continua válida para f', relativamente aos arcos que estão em $P^+\cup P^-$. Considere-se um vértice arbitrário v_i do caminho P tal que $i\notin\{0,p\}$.

Se (v_{i-1},v_i) e (v_i,v_{i+1}) são arcos de P (logo de P^+), então o fluxo que entra em v_i e o fluxo que sai de v_i são ambos incrementados de uma unidade, pelo que as equações de conservação do fluxo (8.1.2) permanecem válidas para f'.

Se (v_i,v_{i-1}) e (v_{i+1},vi) são arcos de P (logo de P^-), então o fluxo que sai de v_i e o fluxo que entra em v_i sofrem um decréscimo de uma unidade, pelo que (mais uma vez) se verificam, para f', as equações (8.1.2).

Se (v_{i-1},v_i) e (v_{i+1},v_i) (ou se (v_i,v_{i-1}) e (v_i,v_{i+1})) estão em P, então $(v_{i-1},v_i)\in P^+$ ($(v_i,v_{i-1})\in P^-$) e $(v_{i+1},v_i)\in P^-$ ($(v_i,v_{i+1})\in P^+$), logo o fluxo que entra em (sai de) v_i aumenta (diminui), por intermédio do arco (v_{i-1},v_i) ((v_i,v_{i-1})), e diminui, por intermédio do arco (v_{i+1},v_i) ((v_i,v_{i+1})), de uma unidade, pelo que, tal como anteriormente, se verifica que as equações (8.1.2) permanecem válidas.

Provou-se assim que, na situação a), f' continua a ser um fluxo para G.

Para se provar que val(f')=val(f)+1 considere-se o s-t-corte $C=\partial(V\setminus\{t\})$. Então, existe um único arco $e\in C$, tal que $e\in P^+\cup P^-$ e

$$\begin{aligned} val(f') &= \sum_{a\in\partial^+(V\setminus\{t\})} f'(a) - \sum_{a\in\partial^-(V\setminus\{t\})} f'(a) \\ &= \begin{cases} f(e)+1 + \sum_{a\in\partial^+(V\setminus\{t\})\setminus\{e\}} f(a) - \sum_{a\in\partial^-(V\setminus\{t\})} f'(a) & \text{se } e\in\partial^+(V\setminus\{t\}) \\ \sum_{a\in\partial^+(V\setminus\{t\})} f(a) - \sum_{a\in\partial^-(V\setminus\{t\})\setminus\{e\}} f(a) - (f(e)-1) & \text{se } e\in\partial^-(V\setminus\{t\}) \end{cases} \\ &= \sum_{a\in\partial^+(V\setminus\{t\})} f(a) - \sum_{a\in\partial^-(V\setminus\{t\})} f(a) + 1 \\ &= val(f) + 1. \end{aligned}$$

b) Suponha-se que $t \notin S$. Neste caso $\partial(S)$ é um s-t-corte e, pela contrução de S (tendo em conta o algoritmo), se $e \in \partial^+(S)$, então $f(e)=cap(e)$ e se $e \in \partial^-(S)$, então $f(e)=0$. Logo

$$val(f) = \sum_{e \in \partial^+(S)} f(e) - \sum_{e \in \partial^-(S)} f(e) = \sum_{e \in \partial^+(S)} f(e) = cap(S),$$

conforme é requerido.

A extensão da prova para capacidades racionais e capacidades reais faz-se, consoante os casos, de um dos modos que a seguir se descrevem.

Se as capacidades são número racionais, então multiplicando-as pelo menor múltiplo comum dos denominadores (o qual podemos supôr ser τ) obtém-se uma nova rede com capacidades inteiras, para a qual é válida a prova já feita. Consequentemente, sendo f' o fluxo obtido, tal que val(f')=cap(C'), onde C' é um corte com as capacidades da rede modificada, fazendo $f(e)=\frac{1}{\tau}f'(e)$ $\forall e \in E$, vem que f é um fluxo para a rede original tal que val(f)=cap(C), onde C é o corte constituído pelos arcos de C' mas com as capacidades originais.

Se as capacidades são números reais então, utilizando-se as técnicas de construção dos reais a partir dos racionais (por intermédio de sucessões de Cauchy ou cortes de Dedikind), aproxima-se o vector de capacidades, $u \in \mathbf{R}^E$ tal que $\forall e \in E\ u_e=cap(e)$, por uma sucessão de vectores de racionais $\{u^n\}_{n \in N}$ tal que $\forall n \in N$ o vector de capacidades u^n determina o mesmo conjunto de arcos como corte mínimo e $\forall e \in E$, $\{u_e^n\}_{n \in N}$ é uma sucessão de Cauchy convergente para u_e. Logo, $\forall n \in N$ existe um fluxo f^n e um corte de capacidade mínima C^n tal que $val(f^n)=cap(C^n)$.

Uma vez que, tanto $\{f^n\}_{n \in N}$ como $\{C^n\}_{n \in N}$ são convergentes, respectivamente, para f e para C, pela continuidade das funções val(.) e cap(.) podemos concluir que val(f)=cap(C).

$\Diamond$

Da prova deste teorema (teorema 8.4) decorre o algoritmo de Ford e Fulkerson para a determinação do fluxo máximo numa rede G=(V,E), a cujos arcos estão associados os limites de capacidade dados pela função $c:E \rightarrow \mathbf{R}_0^+$, e cujos vértices origem e destino

são, respectivamente, s e t. Neste algoritmo, os vértices j≠s serão etiquetados pelos pares da forma (p(j),Δ), onde p(j) denota o vértice candidato a enviar o acréscimo de fluxo Δ a j. Porém, a origem s é inicializada com a etiqueta (s,∞) para sifgnificar que s pode receber qualquer quantidade de fluxo do exterior.

8.5 Algoritmo (Ford e Fulkerson)

8.5.1 Fazer f:E→$\mathbf{R}_0^+$ igual à função nula (ou qualquer outra função que defina um fluxo);

8.5.2 Etiquetar s com (s,∞), considerar todos os vértices como vértices não visitados e todos os vértices, à excepção do vértice origem s, como vértices não etiquetados, fazer i=s;

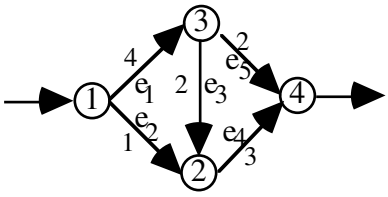
8.5.3 Etiquetar todo o vértice j, ainda não etiquetadado, tal que e=(i,j)∈E e f(e)<c(e), com (i,min{Δ,c(e)-f(e)});
Etiquetar todo o vértice j, ainda não etiquetadado, tal que e=(j,i)∈E e f(e)>0, com (i,min{Δ,f(e)});
Considerar o vértice i como vértice visitado;

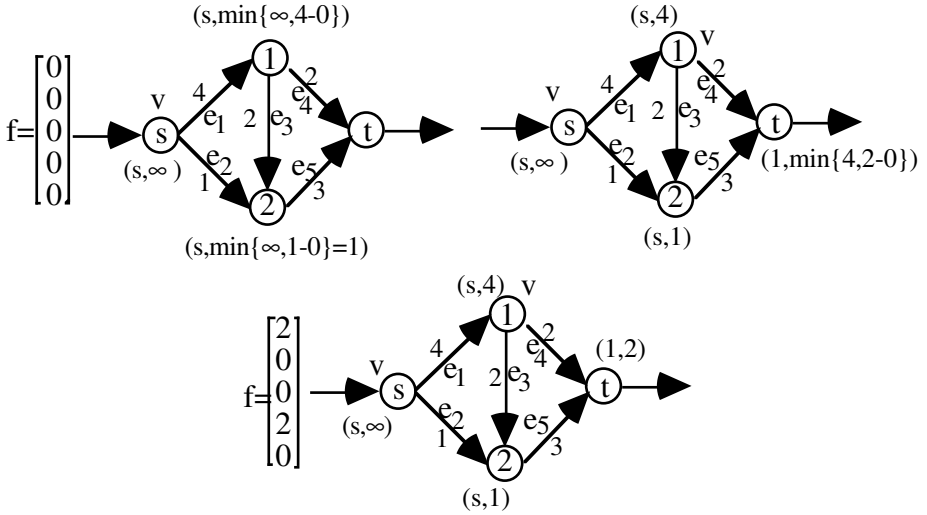
8.5.4 Se o vértice destino, t, está etiquetadado, então saltar para o passo 8.5.5;
Se o vértice destino, t, não está etiquetadado, então
se o conjunto dos vértices etiquetados não visitados é vazio
então STOP (o fluxo corrente é máximo);
senão escolher um vértice etiquetado não visitado, i,
e voltar ao passo 8.5.3;

8.5.5 Suponha-se que o vértice t tem a etiqueta (p(t),Δ). Então, por intermédio da primeira componente das etiquetas, determinar o caminho P (recursivamente até s) e incrementar, com a quantidade Δ, o fluxo dos arcos de P^+ e retirar Δ ao fluxo dos arcos de P^-.
Apagar todas as etiquetas e voltar ao passo 8.5.2;
Fim do algoritmo.

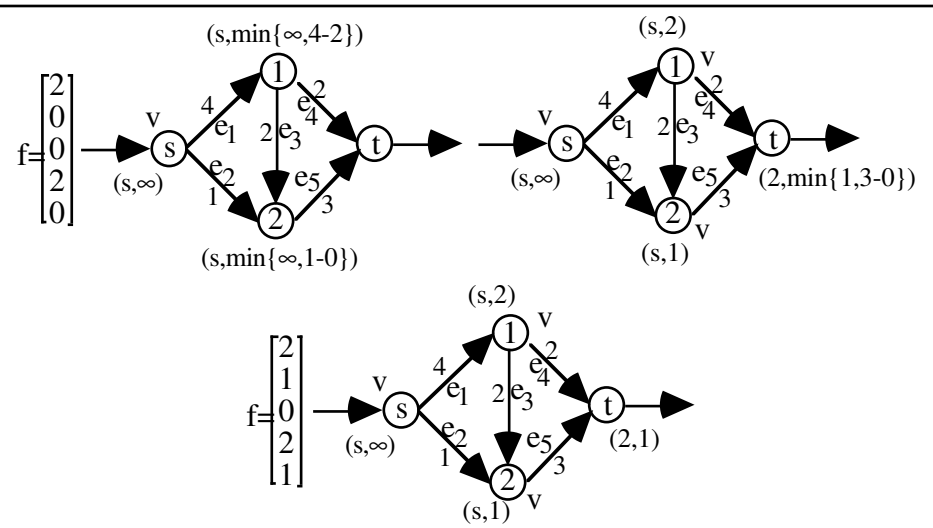
O caminho determinado no passo 8.5.5 do algoritmo de Ford e Fulkerson é usualmente designado por caminho de acréscimos ("augmentation path").

Como exemplo de aplicação do algoritmo de Ford e Fulkerson, considere-se a rede a seguir representada, em cujos arcos se indicam as respectivas capacidades.

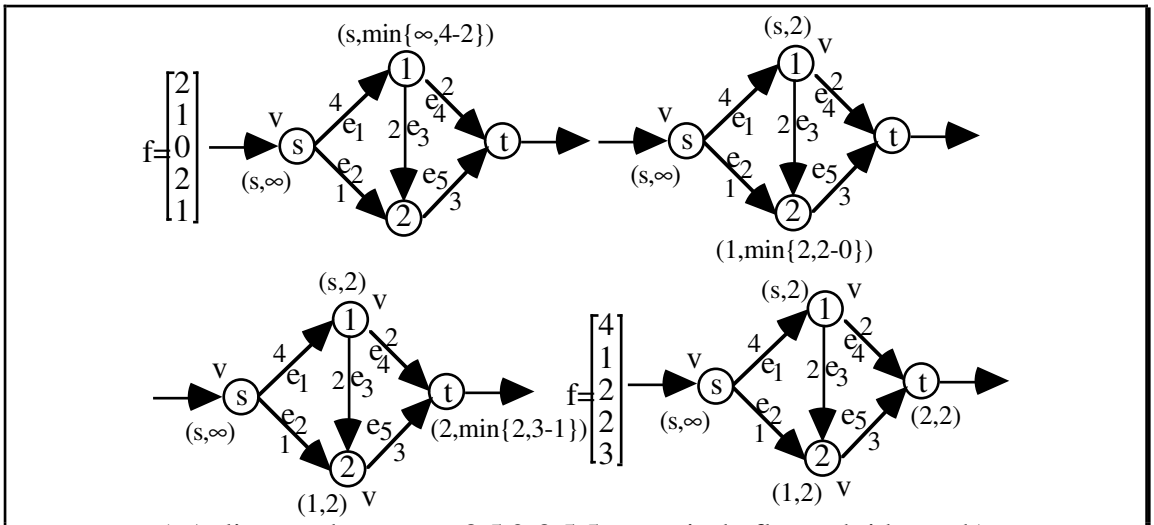




a) Aplicação dos passos 8.5.1-8.5.5, a partir do fluxo nulo.



b) Aplicação dos passos 8.5.2-8.5.5, a partir do fluxo obtido em a).



c) Aplicação dos passos 8.5.2-8.5.5, a partir do fluxo obtido em b).

8.6 Teorema

O algoritmo de Ford e Fulkerson determina, ao fim de um número finito de passos, um fluxo máximo para a rede a que é aplicado.

Prova:

Seja G=(V,E) a rede à qual se aplica o algoritmo de Ford e Fulkerson. Uma vez que, após não mais do que |V| execuções dos passos 8.5.3 e 8.5.4, se o algoritmo não para, então é executado o passo 8.5.5, no qual $val(f) \rightarrow val(f)+\Delta$, tendo em conta que os arcos têm limites de capacidade, ao fim de um número finito de execuções do passo 8.5.5 o algoritmo termina. Logo resta provar que, quando o algoritmo termina, o fluxo f é máximo.

Seja U o subconjunto de V cujos vértices estã etiquetados quando o algoritmo termina. Então podemos concluir que todos os arcos $(x,y) \in \partial^+(U)$ estão saturados (i. e, são atravessados por quantidades de fluxo que atingem as respectivas capacidades), caso contrário (de acordo com o passo 8.5.3) o vértice y teria sido etiquetado quando x foi visitado. De um modo idêntico, podemos concluir que os arcos de $\partial^-(U)$ não são percorridos por qualquer fluxo. Logo $\partial(U)$ é um corte mínimo e o fluxo f é, necessàriamente, óptimo.

◊

Caminhos dirigidos disjuntos (nos arcos)

O teorema do fluxo máximo e corte mínimo, combinado com o facto de se saber que se as capacidades dos arcos de uma rede são números inteiros então o fluxo máximo é também um fluxo de inteiros, permite-nos utilizar o algoritmo de Ford e Fulkerson na determinação dos caminhos dirigidos (cadeias) disjuntos entre dois vértices de um grafo. Com efeito, dado um grafo conexo G=(V,E) e dados dois vértices particulares s e t, associando a cada arco de G uma capacidade com valor 1, podemos concluir que qualquer fluxo de inteiros nesta rede, apresenta em cada arco o valor 0 ou 1. Qualquer arco com fluxo 1 pertence a um único caminho dirigido entre s e t. Logo, se o fluxo máximo é m, então existem m caminhos disjuntos (nos arcos) entre s e t.

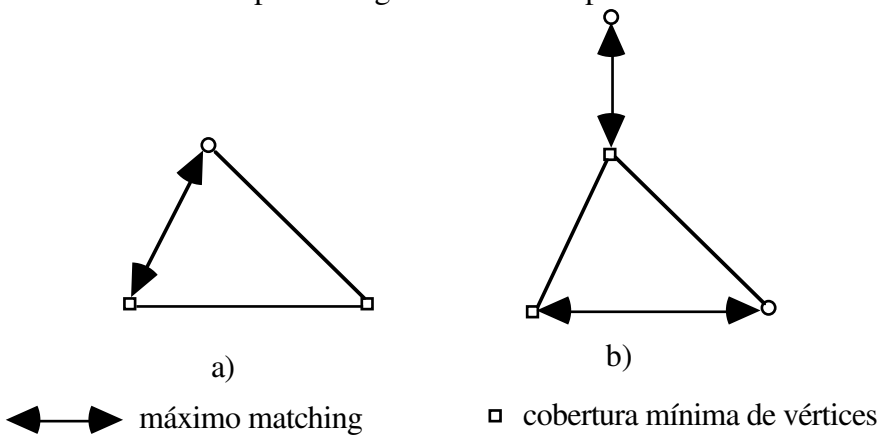
9. Problemas de emparelhamento máximo

As aplicações clássicas dos emparelhamentos envolvem a determinação de pares de objectos de conjuntos disjuntos (como sejam, trabalhadores e tarefas, noivos e noivas, etc.). Por exemplo, o clássico problema de afectação estudado em Programação Matemática e Optimizaçõa II, corresponde ao problema da determinação de um emparelhamento perfeito de um grafo bipartido.

Existe uma certa relação de dualidade entre o problema da determinação do emparelhamento máximo e o problema da cobertura mínima de vértices, relação esta que, conforme veremos, em grafos bipartidos é uma relação forte (no sentido em que os valores óptimos de ambos os problemas coincidem).

Se para um dado grafo G=(V,E), M é um emparelhamento arbitrário e W é uma cobertura arbitrária de vértices, então W inclui pelo menos um extremo de cada elemento de M, pelo que $|W| \geq |M|$. Como consequência, em qualquer grafo o cardinal do emparelhamento máximo é não superior ao cardinal da cobertura mínima de vértices.

Na figura a seguir exemplifica-se a obtenção do emparelhamento máximo e da cobertura mínima de vértices para dois grafos muito simples.



A partir de um grafo bipartido, G=(V',V",E), vamos construir uma rede, que designaremos por rede associada a G e denotaremos por $N(G)=(V_N,E_N)$, procedendo do seguinte modo:

1. $V_N=V' \cup V'' \cup \{s,t\}$, onde s e t são os vértices origem e destino, respectivamente.

2. Vamos considerar que, em N(G), todos os arcos $(x,y)\in E$, têm cauda em V' e cabeça em V".

3. $E_N=E\cup\{(s,v'): v'\in V'\}\cup\{(v'',t): v''\in V''\}$.

4. Todos os arcos de E_N têm capacidade unitária.

Na rede obtida, $N(G)=(V_N,E_N)$, um caminho dirigido (cadeia) entre s e t corresponde a uma sequência de vértices do tipo (s,v',v",t) onde $(v',v")\in E$.

Dada uma rede, G=(V,E), com vértice inicial s e vértice final t, um conjunto de arcos C diz-se um **conjunto de separação** s-t, se qualquer caminho dirigido (cadeia) entre s e t utiliza um arco de C. A partir desta definição, e tendo em vista a prova do teorema de Konig, vamos introduzir o seguinte resultado auxiliar:

9.1 Teorema

Seja G=(V,E) um grafo bipartido e seja $N(G)=(V_N,E_N)$ a rede obtida de G, tal como anteriormente se indicou, onde s e t são, respectivamente, o vértice inicial e final. Se C* é um conjunto de separação s-t de cardinalidade mínima, então |C*| é igual à capacidade do s-t-corte mínimo.

Prova:

Seja S tal que $V_N\supseteq S\supseteq\{s\}$ e $\partial(S)$ é um s-t-corte de capacidade mínima [15]. Então, uma vez que qualquer dos caminhos dirigidos entre s e t utiliza um arco de $\partial^+(S)$, $\partial^+(S)$ é um conjunto de separação s-t, pelo que $|C^*|\leq|\partial^+(S)|$. Por outro lado, sendo k o maior número de caminhos dirigidos disjuntos (nos arcos) entre s e t e sendo $P_1, P_2, \ldots, P_k$, caminhos deste tipo, uma vez que, para $I=\{1,\ldots,k\}$ $\cap_{i\in I} E(P_i)=\emptyset$ e $|P_i\cap C^*|\geq 1\ \forall i\in I$, conclui-se que $|C^*|\geq\sum_{i=1}^{k}|E(P_i)\cap C^*|\geq k$, pelo que $k\leq|C^*|\leq|\partial^+(S)|$ (†).

O número máximo de caminhos dirigidos disjuntos (nos arcos) entre s e t, k, corresponde ao fluxo máximo em N(G) o qual, por sua vez, pelo teorema 8.4 (do fluxo

[15]Dado que os arcos de N(G) têm todos capacidade unitária, a capacidade de $\partial(S)$ é igual a $|\partial^+(S)|$.

máximo-corte mínimo) é igual à capacidade do s-t-corte mínimo (ou de capacidade mínima), i. é, $k=|\partial^+(S)|$. Logo, de (†) decorre que $k=|C^*|=|\partial^+(S)|$.

◊

Uma cobertura de vértices, W, de um grafo bipartido, G=(V',V",E), induz um conjunto de separação s-t em N(G) dado por

$$C_W=\{(s,v'): v'\in W\cap V'\}\cup\{(v",t): v"\in W\cap V"\}.$$

Com efeito, qualquer caminho dirigido entre s e t em N(G) tem de utilizar um arco de E, logo passa por um vértice de W (uma vez que W é uma cobertura de vértices de G) e, consequentemente, por um arco de C_W (devendo observar-se ainda que, por construção, $|C_W|=|W|$). Por outro lado, se W não é uma cobertura de vértices de G, existe $(x,y)\in E$ tal que $\{x,y\}\cap W=\emptyset$, donde o caminho dirigido (s,x,y,t) não contém qualquer arco de C_W e, consequentemente, C_W não é um conjunto de separação s-t.

Considerando W como sendo a cobertura mínima de vértices de G, podem existir outros conjuntos de separação s-t, contendo arcos $(x,y)\in E$ (i. é, arcos (x,y) tais que $x\in V'$ e $y\in V"$) mas nenhum deles tem cardinalidade inferior à de C_W. Com efeito, sendo C um conjunto de separação s-t que contém arcos de E, substituindo os arcos $(v',v")\in E\cap C$ por arcos da forma (s,v') [16] e eliminando os arcos repetidos, o conjunto de separação s-t obtido tem cardinalidade não superior a |C| e apenas conterá arcos da forma (s,v') e (v",t).

Como consequência destas considerações (e tendo em conta o teorema 9.1) podemos concluir que a capacidade do s-t-corte mínimo de N(G) é igual à cardinalidade da cobertura mínima de vértices de G (uma vez que, sendo W uma cobertura mínima de vértices de G, pela análise anterior, C_W é um conjunto de separação s-t de cardinalidade mínima tal que $|W|=|C_W|$ e, pelo teorema 9.1, sendo $\partial(S)$ um s-t-corte mínimo de N(G), $|C_W|=|\partial^+(S)|$).

A prova do teorema de Konig, a seguir, é também consequência imediata do teorema 9.1.

---

[16] Deve observar-se que qualquer caminho dirigido entre s e t que percorra um arco $(x,y)\in E$ (logo $x\in V'$ e $y\in V"$), passa pelo arco (s,x).

9.2 Teorema (Konig, 1916)
Se G=(V,E) é um grafo bipartido, então o emparelhamento máximo e a cobertura mínima de vértices têm a mesma cardinalidade.

Prova:

Com efeito, considerando a rede N(G) (construida a partir do grafo bipartido G, conforme anteriomente se referiu) e tendo em conta o facto dos arcos de N(G) terem capacidades unitárias, o fluxo máximo corresponderá ao máximo número de caminhos dirigidos (disjuntos nos arcos) entre os vértices s e t. Como a cada caminho de um conjunto de caminhos deste tipo, corresponde um arco de um emparelhamento de G (e reciprocamente), o número máximo de caminhos disjuntos entre s e t, em N(G), é igual à cardinalidade do emparelhamento máximo de G. Logo, de acordo com a prova do teorema 9.1 vem que, sendo M é um emparelhamento máximo de G, $|M|=|\partial^+(S)|$.

◊

Com base no teorema de Konig pode concluir-se que a aplicação do algoritmo de Ford e Fulkerson à rede N(G) (construida a partir de um grafo bipartido G conforme anteriormente se referiu), conduz à determinação do emparelhamento máximo de G.

Com o teorema que se segue estabelece-se uma relação entre os emparelhamentos máximos e as coberturas mínimas de arcos [17].

9.3 Teorema
Seja M um emparelhamento de cardinalidade máxima e seja C uma cobertura de arcos de cardinalidade mínima de um grafo G=(V,E). Então $|M|+|C|=|V|$.

---

[17] Ter em atenção que as coberturas de arcos correspondem a conjuntos de arcos que são incidentes em todos os vértices do grafo.

Prova:

Sendo C uma cobertura mínima de arcos, M um emparelhamento máximo e U=V\V(M), vem que |U|=|V|-2|M|. Acrescentando-se |U| arcos (convenientemente escolhidos) ao conjunto M, obtém-se uma cobertura de arcos de G, pelo que

$$|C|\leq|M|+|U|=|M|+|V|-2|M|=|V|-|M| \qquad (*).$$

Seja M' um emparelhamento máximo para G'=(V,C) e U'=V\V(M'), então

$$|C|=|M'|+|U'|=|M'|+|V|-2|M'|=|V|-|M'|$$

Tendo em conta que $|M|\geq|M'|=|V|-|C|$, e ainda (*), conclui-se que $|C|+|M|=|V|$.

◊

Dado um grafo G=(V,E) e um emparelhamento M, denotando por V(M) o subconjunto de vértices em que incidem os arcos de M, designa-se por **vértice exposto** em relação a M (ou por vértice M-exposto, ou ainda, simplesmente, por vértice exposto, quando é claro, no contexto, qual o emparelhamento a que se refere) todo o vértice $v\in V\backslash V(M)$. Os restantes vértices estão em V(M) e designam-se por **vértices saturados** em relação a M (ou vértices M-saturados, ou ainda, simplesmente, por vertices saturados quando decorre, do contexto, qual o emparelhamento a que se referem). Um emparelhamento, M, definido num grafo, G, diz-se **perfeito** se todos os vértices de G são M-saturados. É claro que qualquer emparelhamento perfeito tem cardinalidade máxima.

Dado um emparelhamento, M, de um grafo, G, um caminho de G, $P=[v_1,v_2,\ldots,v_k]$, diz-se **M-alternado** se, sendo

$$E_{impar}=\{[v_1,v_2],[v_3,v_4],\ldots,[v_{2j-1},v_{2j}],\ldots\} \text{ e } E_{par}=\{[v_2,v_3],[v_4,v_5],\ldots,[v_{2j},v_{2j+1}],\ldots\}$$

(ou seja, E_{impar} é o conjunto dos arcos de P com cauda nos vértices de índice impar e E_{par} é o conjunto dos arcos de P com cauda nos vértices de índice par), se verifica que $E_{impar}\cap M=E_{impar}$ e $E_{par}\cap M=\varnothing$, ou que $E_{impar}\cap M=\varnothing$ e $E_{par}\cap M=E_{par}$. Como caso extremo, se P tem um único arco (i. e, $P=[v_1,v_2]$) então, para qualquer emparelhamento, M, P é M-alternado. Um caminho M-alternado diz-se com extremos expostos se os vértices inicial e final são distintos e M-expostos.

A relevância dos caminhos M-alternados com extemos expostos, no contexto dos problemas de emparelhamento máximo, deve-se aos resultados que a seguir se apresentam.

9.4 Teorema

Seja E(P) o conjunto dos arcos de um caminho M-alternado, $P=[v_1,v_2,\ldots,v_{2k}]$. Se v_1 e v_{2k} são vértices expostos, então $M'=M\Delta E(P)$ [18] é um emparelhamento de cardinalidade $|M|+1$.

Prova:

Primeiramente vamos mostrar que $M\Delta E(P)$ é um emparelhamento.

Sendo $e,e'\in M\Delta E(P)$, verifica-se uma das seguintes situações:

a) $e,e'\in M\backslash E(P)$;

b) $e,e'\in E(P)\backslash M$;

c) $e\in M\backslash E(P)$ e $e'\in E(P)\backslash M$.

Em a) verifica-se imediatamente que e e e' não têm vértices comuns (pois são ambos elementos de M).

Em b), por construção de P, mais uma vez se conclui que e e e' não têm vértices comuns (dado que os arcos de $E(P)\backslash M$ são da forma $[v_{2j-1},v_{2j}]$).

Suponha-se que na situação c) $e'=[v_{2j-1},v_{2j}]\in E(P)\backslash M$. Suponha-se ainda (sem perda de generalidade) que v_{2j} é um vértice comum a e e a e'. Porém o arco $e''=[v_{2j},v_{2j+1}]\in E(P)\cap M$, logo e e e'' são dois arcos distintos de M (dado que $e\notin E(P)$ e $e''\in E(P)$) incidentes no mesmo vértice, o que é absurdo.

Deste modo fica provado que $M'=M\Delta E(P)$ é um emparelhamento. Adicionalmente, podemos concluir que $|E(P)|=2k-1$, $|E(P)\backslash M|=k$ e $|M\backslash E(P)|=|M|-(k-1)$. Logo vem que $|M'|=|M\backslash E(P)|+|E(P)\backslash M|=|M|-k+1+k=|M|+1$.

◊

---

[18] Dados dois conjuntos A e B, $A\Delta B$ denota a diferença simétrica entre A e B, i. e,

$$A\Delta B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)=(A\cup B)\backslash(A\cap B).$$

O teorema 9.5, a seguir, é ainda mais forte do que o teorema 9.4 na relação que estabelece entre a existência de caminhos M-alternados com extremos expostos (onde M é um emparelhamento) e a eventual maximalidade de M.

9.5 Teorema
Um emparelhamento M num grafo G=(V,E) é maximal sse não existe em G um caminho M-alternado com extremos expostos.

Prova:

Se M é um emparelhamento de cardinalidade máxima, então, pelo teorema 9.4, podemos concluir que não existe em G qualquer caminho M-alternado com extremos expostos. Suponha-se que M é um emparelhamento que não tem cardinalidade máxima e que não existe em G qualquer caminho M-alternado com extremos expostos. Logo existe um emparelhamento M' tal que $|M'|>|M|$. Considerando o conjunto de arcos $M\Delta M'$, podemos concluir que em $G'=(V,M\Delta M')$ todos os vértices têm grau não superior a 2 (caso existissem 3 ou mais arcos incidentes num mesmo vértice de G', pelo menos dois deles pertenceriam ao mesmo emparelhamento, o que não é possível). Se o grau de um dado vértice de G' é 2, então sendo e e e' os respectivos arcos incidentes, tem-se que $e\in M$ e $e'\in M'$. Consequentemente, todas as componentes conexas de G' consistem em caminhos ou em circuitos de comprimento par. Dado que $|M'|>|M|$, um dos caminhos terá mais arcos de M' do que de M e, consequentemente, será um caminho M-alternado com extremos M-expostos, o que contraria a hipótese.

◊

Emparelhamentos generalizados de peso máximo

No que se segue, vamos lidar com uma noção mais geral de emparelhamento que será designada de emparelhamento-b.

Dado um grafo G=(V,E) e $b\in N_0^{|V|}$, M ($E\supseteq M$) diz-se um b-emparelhamento se induz um subgrafo G[M]=(V,M) tal que em G[M], $\forall v\in V\ \delta(v)\leq b_v$, ou seja, sendo

$$\Delta_{G[M]}(V)=\begin{bmatrix}\delta(v_1)\\ \dots\\ \delta(v_m)\end{bmatrix} \text{ e } b=\begin{bmatrix}b_1\\ \dots\\ b_m\end{bmatrix}\in N_0^{|V|},$$

onde $V=\{v_1, \ldots, v_m\}$, M é um emparelhamento-b se, em G[M], $\Delta(V)\leq b$. Quando as restrições são satisfeitas na forma de igualdade, M diz-se um emparelhamento-b perfeito.

No caso das componentes de b serem todas iguais a 1, caimos no conceito de emparelhamento inicialmente introduzido.

Quando a cada arco do grafo G=(V,E), *e*, temos associado um peso, c_e, a determinação do emparelhamento-b de peso máximo consiste no seguite problema de optimização:

$$(\prod) \qquad \max\{c(M): M \text{ é um emparelhamento e } \Delta_{G[M]}(V)\leq b\},$$

onde $c(M)=\sum_{e\in M} c(e)$. Nos casos em que $c_e=1\ \forall e\in E$, $(\prod)$ corresponde à determinação do b-emparelhamento de G de cardinalidade máxima.

Em termos de programação inteira, a formulação do problema da determinação do b-emparelhamento de peso máximo, consiste no seguinte programa linear de variáveis binárias (P) $\max\{\sum_{e\in E} c_e x_e: Bx\leq b, x\in\{0,1\}^{|E|}\}$, onde B é a matriz de incidência do grafo não dirigido G=(V,E) (pelo que todas as colunas de B têm exactamente duas componentes unitárias). Se G é bipartido, então B é totalmente unimodular e os pontos extremos de $\{x\in \mathbf{R}^n: Bx\leq b, x\geq 0\}$ são precisamente os b-emparelhamentos, pelo que, em tal situação, a condição binária imposta às variáveis pode ser relaxada obtendo-se o programa linear:

$$\max\{\sum_{e\in E} c_e x_e: Bx\leq b, x\geq 0\}.$$

Uma aplicação dos emparelhamentos pesados, que tem sido muito estudada, diz respeito ao problema do carteiro que consiste em, dado um grafo G=(V,E) e uma função $c:E\rightarrow \mathbf{R}_0^+$, determinar o conjunto de arcos de peso mínimo a adicionar a G de modo que o multigrafo obtido admita um circuito de Euler de peso mínimo. A este circuito euleriano corresponderá o caminho fechado de peso mínimo que percorre, pelo menos uma vez, cada um dos arcos do grafo (correspondendo assim à rota de custo mínimo percorrida pelo carteiro).

Para um grafo arbitrário, G=(V,E), o algoritmo que se segue resolve o problema do carteiro.

9.6 Algoritmo

9.6.1 Seja V' um subconjunto de vértices de grau impar em G=(V,E);

9.6.2 Considerar o grafo completo, G=(V',E'), e associar a cada arco $[i,j] \in E'$ o peso c_{ij}, correspondente ao peso do caminho, P_{ij}, de menor peso entre i e j em G;

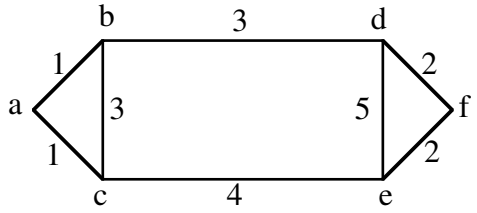
9.6.3 Determinar o emparelhamento perfeito de peso mínimo em G', M';

9.6.4 Para cada $[i,j] \in M'$ fazer $E=E \cup E(P_{ij})$;

9.6.5 Devolver o grafo G=(V,E);

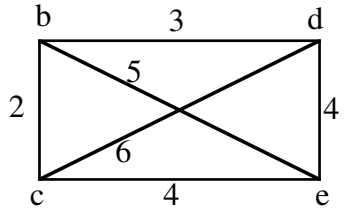
Fim do algoritmo.

Como exemplo de aplicação, considere-se o seguinte grafo:

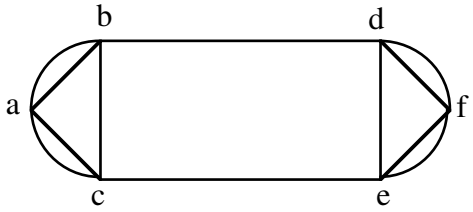


Neste grafo, os vértices de grau impar são os vértices b, c, d e e, e os caminhos de menor comprimento entre eles são P_{bc}=[b,a,c] com c_{bc}=2, P_{bd}=[b,d] com c_{bd}=3, P_{be}=[b,a,c,e] com c_{be}=6, P_{cd}=[c,a,b,d] com c_{cd}=5, P_{ce}=[c,e] com c_{ce}=4 e P_{de}=[d,f,e] com c_{de}=4.

De acordo com o passo 9.6.2, obtém-se o grafo completo G'=({b,c,d,e},E')

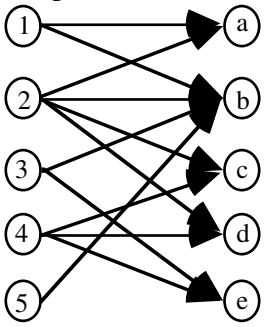


e, de acordo com o passo 9.6.3, determina-se o emparelhamemento perfeito de peso mínimo de G', M'={[b,c],[d,e]}. Aplicando-se o passo 9.6.3, obtém-se finalmente o multigrafo que resolve o problema do carteiro.



9.7 Exercício

Considere o grafo, G, a seguir representado.

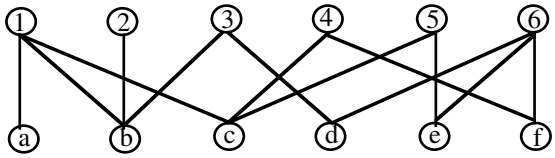


a) Dado o emparelhamento de G, M={(2,a),(3,e),(4,d),(5,b)}, determine um caminho M-alternado com extremos expostos.

b) Determine um emparelhamento máximo para G.

9.8 Exercício

Determine um emparelhamento máximo, para o grafo a seguir representado,



justificando, adequadamente, a respectiva maximalidade.

9.9 Exercício

Sendo G=(V',V",E) um grafo bipartido e N(G) a rede definida por G, o conjunto de arcos de N(G), $C_W=\{(s,v'): v'\in W\cap V'\}\cup\{(v",t): v"\in W\cap V"\}$ é um conjunto de separação s-t sse W é uma cobertura de vértices de G.

9.10 Exercício

Dado um emparelhamento M de um grafo G=(V,E), prove que para qualquer caminho M-alternado com extremos expostos, P, de G, existe $k\in \mathbf{N}$ tal que $|V(P)|=2k$ e $|E(P)|=2k-1$.

Bibliografia

- Tucker, A. *Applied Combinatorics*, John Wiley & Sons, New York (1984).
- Bachen, A. e Kern, W., *Linear Programming Duality: An Introduction to Oriented Matroids*, Springer-Verlag (1992).
- Bastos, M. e Oliveira, A. G., "A Matemática nos Fulerenos", Boletim da SPM, nº 32, pp. 37-43 (1995).
- Bollobás, B. *Graph Theory: An Introductory Course*, Springer Verlag (1979).
- Cameron, P. J. *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms*, Cambridge University Press (1994).
- Cardoso, D. M., *Tópicos de Optimização Combinatória*. Apontamentos para o Seminário do 4º Ano da Licenciatura em Matemática. Departamento de Matemática da U. A. (1995).
- Christos H. P. e Steiglitz, K. *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*, Prentice-Hall, Inc. (1982).
- Claude Berge, *Graphs*, North-Holland (3ª edição - 1991)
- Gouveia, L. E. N., *Grafos: Relatório sobre o programa, o conteúdo e os métodos de ensino*. Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (1994).
- Graham, R. L., Grotschel, M., Lovász, L. (ed.) *Handbook of Combinatorics*, vol I, North-Holland (1995).
- Hall, M Jr., *Combinatorial Theory*, John Wiley & Sons (2ª edição 1986).
- Jensen, T. R. e Toft, B. *Graph Coloring Problems*, John Wiley & Sons (1995).

Índice Alfabético Remissivo

algoritmo de Disjkstra 55
de Ford e Fulkerson 67
de Kruskal 60
devorador 59
heurístico de Little 48
Appel 19
arco (ou aresta) incidente 4
dirigido 2
árvore 8
abrangente 9
base 30
cabeça 22
cadeia 4
caminho 4
de acréscimos 68
de Euler 4
dirigido 4
M-alternado 75
cauda 22
Cayley 19
cintura de um grafo 58
circuito 4
de comprimento mínimo 57
de Euler 4
de Hamilton 35
Circuitos(G) 25
clique 35
cobertura de arcos 35, 74
de vértices 35
cocircuito 19
Cocircuitos(G) 26
código de Gray 42, 44, 45
coloração de mapas 15
de vértices 16
complementar de um grafo 35
componente conexa 4
comprimento de um caminho 4
conjunto de separação 72
independente de arcos 30
independente de vértices 35
contracção de arcos 27
corte 19
Cortes(G) 26
de Morgan 18
diâmetro de um grafo 53
Disciplinamento de tarefas 47
distância entre vértices 53
eliminação de arcos 27
emparelhamento (matching) 35
perfeito 75
espaço dos arcos 24
dos vértices 24
Euler 1, 2
face 12
floresta 30
fluxo 62
fórmula de Euler 12
Francis Guthrie 19
grafo 2
bipartido 7
completo 2
conexo 4
dirigido 2
dual 20
hamiltoniano 39
planar 10
grau (ou valência) de um vértice 5
Hakem 19
hamiltoniano 35
Heawood 19
Kempe 19
$K_{m,n}$ 7
K_n 2
Konigsberg 1

Kuratowski 10
lema de Farkas para grafos e multigrafos 27
matriz de adjacência 22
de incidência 22
"maximum matching problem" 38
menor 27
multigrafo 2
n-cubo 42
orientação de um circuito 25
Problema da árvore abrangente de custo mínimo 37
da Clique máxima 38
da determinação de um circuito de Hamilton 37
de cobertura mínima de vértices 38
de fluxo máximo 37
de "Routing" 46
do caminho mais curto 37
do carteiro 78
do circuito de comprimento mínimo 37
do emparelhamento máximo 38
do independente máximo 38
dos caminhos disjuntos 37
de caminho mais curto 53
de fluxo máximo 62
região 12
semigrau exterior 6
interior 6
subespaço dos circuitos 25
dos cocircuitos 26
teorema das cinco cores 17
de Konig 74
do fluxo máximo-corte mínimo 63
que estabelece a fórmula de Euler 12
"Traveling Salesman Problem" 37
TSP 37
valor do fluxo 62
vector de circuito 25
de corte 25
vértice exposto 75
saturado 75
adjacente 2

Problemas Combinatórios

Problema 1

Seja $A \in \mathbf{R}^{mxn}$ e suponha que, sobre A, se executaram duas operações de ordenação. Com a primeira operação ordenaram-se, por ordem não crescente, as entradas de A em cada linha obtendo-se uma matriz B tal que $\forall i \in \{1,\ldots,m\}$ $b_{ij} \geq b_{i(j+1)}$ para $j=1,\ldots,n-1$ e com a segunda operação ordenaram-se, também por ordem não crescente, as entradas de A em cada coluna, obtendo-se uma matriz C tal que $\forall j \in \{1,\ldots,n\}$ $c_{ij} \geq c_{(i+1)j}$ para $i=1,\ldots,m-1$. Prove que em cada linha da matriz C as entradas se matntêm ordenadas por ordem não crescente, i. e, que $\forall i \in \{1,\ldots,m\}$ $c_{ij} \geq c_{i(j+1)}$ para $j=1,\ldots,n-1$.

Resolução

Suponha-se que $\exists i \in \{1,\ldots,m\}$ e $\exists j \in \{1,\ldots,n-1\}$ tais que $c_{ij} < c_{i(j+1)}$. Então $\exists x$ tal que $c_{ij} < x < c_{i(j+1)}$. Dado que, tanto os elementos da coluna j como os da coluna j+1 de C estão ordenados por ordem não crescente (ou seja, $\forall i \in \{1,\ldots,m\}$ $c_{ij} \geq c_{(i+1)j}$ e $c_{i(j+1)} \geq c_{(i+1)(j+1)}$), podemos concluir que $c_{1(j+1)} \geq c_{2(j+1)} \geq \ldots \geq c_{i(j+1)} > x$. Por outro lado, sendo $C(x)_j = \{c_{qj}: 1 \leq q \leq m, c_{qj} > x\}$, podemos concluir que $C(x)_j = \{c_{qj}: 1 \leq q < i, c_{qj} > x\}$, pelo que $|C(x)_j| < i$. Como consequência, na j-ésima coluna de C existem menos de i componentes maiores do que x e na (j+1)-ésima coluna de C existem pelo menos i componentes maiores do que x (i. e, $|C(x)_{j+1}| = |\{c_{q(j+1)}: 1 \leq q \leq m, c_{q(j+1)} > x\}| \geq i$). Porém, dado que as colunas de B e as coluna de C têm os mesmos elementos (eventualmente distribuidos por diferentes componentes) e dado que

$$\begin{bmatrix} b_{1j} \\ \ldots \\ b_{ij} \\ \ldots \\ b_{mj} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} b_{1(j+1)} \\ \ldots \\ b_{i(j+1)} \\ \ldots \\ b_{m(j+1)} \end{bmatrix},$$

i. e, $b_{ij} \geq b_{i(j+1)}$ $\forall i \in \{1,\ldots,m\}$, sendo

$B(x)_j = \{b_{qj}: 1 \leq q \leq m, b_{qj} > x\} = C(x)_j$ e $B(x)_{j+1} = \{b_{q(j+1)}: 1 \leq q \leq m, b_{q(j+1)} > x\} = C(x)_{j+1}$, conclui-se que $|C(x)_j| = |B(x)_j| \geq |B(x)_{j+1}| = |C(x)_{j+1}| \geq i$. Como consequência obtém-se uma contradição. Esta contradição resultou de havermos suposto que existiriam dois índices, i e j, tais que $c_{ij} < c_{i(j+1)}$.

Exercício

Prove que o grafo bipartido completo $K_{n,n}$ é hamiltoniano e contém $\frac{1}{2}n!(n-1)!$ circuitos de Hamilton distintos.

Resolução

Seja $K_{n,n}=G=(X,Y,E)$ com $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ e $Y=\{y_1,\ldots,y_n\}$. Por aplicação do teorema 5.2 é imediato concluir que G é hamiltoniano. Uma vez que se pode considerar (sem perda de generalidade) que todos os os circuitos de Hamilton começam e terminam em x_1, podemos escolher qualquer dos n vértices de Y a visitar quando se sai de x_1. A partir de um destes vértices, necessariamente voltamos a X, podendo escolher qualquer dos n-1 vértices distintos de x_1. Posteriormente, a escolha do próximo vértice do circuito em construção pode ser feita de entre n-1 vértices de Y, e assim sucessicvamente. Deste modo construimos uma família de circuitos de Hamilton cuja cardinalidade é

$$n(n-1)(n-1)(n-2)(n-2)\ldots(1)(1)=n!(n-1)!$$

Esta família contem cada circuito de Hamilto exactamente duas vezes. Note-se por exemplo que (de acordo com o processo descrito) as duas sequências de vértices

$$[x_1,y_1,x_2,y_2,\ldots,x_{n-1},y_{n-1},x_n,y_n,x_1] \text{ e } [x_1,y_n,x_n,y_{n-1},x_{n-1},\ldots,y_2,x_2,y_1,x_1]$$

embora sejam elementos distintos da família, determinam o mesmo circuito de Hamilton. Logo, pode afirmar-se que o número de circuitos de Hamilton de G é $\frac{1}{2}n!(n-1)!$, completando-se, assim, a prova em questão.

◊

Resolução do exercício 6.4

Vamos fazer a prova de a) por indução sobre n (número de dígitos binários das cadeias produzidas pelo código).

Para n=1, a regra a) é trivialmente válida.

Suponha-se que a) é válida para $1\leq n\leq N$ e que dispomos de um código com cadeias binárias de comprimento N+1.

Sendo α_p uma dessas cadeias, se $p\leq 2^N-1$, então (a menos do zero mais à esquerda) a representação de α_p coincide com a representação produzida pelo código de comprimento N, logo por hipótese de indução a regra é válida.

Suponha-se que $p\geq 2^N$ e seja $p'=2^{N+1}-1-p$ (i. e, $p=2^{N+1}-1-p'$). Então podemos concluir que a) se verifica para p', uma vez que $p'=2^N-1-p\leq 2^{N+1}-1-2^N=2^N(2-1)-1=2^N-1$. Porém os dígitos binários das cadeias que representam

$$\alpha_p=a_Na_{N-1}\ldots a_2a_1a_0 \text{ e } \alpha_{p'}=a'_Na'_{N-1}\ldots a'_2a'_1a'_0$$

estão relacionados da seguinte forma: $a_j=a'_j$ para j=0,1,…,N-1, $a_N=1$ e $a'_N=0$ (pelo que $a_N=a'_N+1$).

Por outro lado, tendo em conta que $p+p'=2^{N+1}-1=11\ldots111$, vem que sendo $p=b_Nb_{N-1}\ldots b_2b_1b_0$ e $p'=b'_Nb'_{N-1}\ldots b'_2b'_1b'_0$, $b_i=b'_i+1 \pmod 2$ (ou seja, se $b'_i=0$ então $b_i=1$ e se $b'_i=1$ então $b_i=0$).

Como consequência vem que $a_i = a'_i = b'_i+b'_{i+1} \pmod 2 = b_i+b_{i+1} \pmod 2$, para i=0, 1, 2, … , N-1, e $a_N = a'_N+1 \pmod 2 = b'_N+b'_{N+1}+1 \pmod 2 = b_N+b_{N+1} \pmod 2$ (uma vez que $b'_N=0$ e $b'_{N+1}=0$, $b_N=1$ e $b_{N+1}=0$).

Deste modo fica completa a prova de a).

A prova de b) obtém-se invertendo a). Com efeito, tendo em conta a sequênia de somas $a_0=b_0+b_1 \pmod 2$, $a_1=b_1+b_2 \pmod 2$, … , $a_N=b_N+b_{N+1} \pmod 2$, vem que

$$\begin{aligned}
&a_i = b_i+b_{i+1} \pmod 2\\
&\Downarrow\\
&a_i+a_{i+1} = b_i+b_{i+1}+b_{i+1}+b_{i+2} \pmod 2 = b_i+b_{i+2} \pmod 2\\
&\Downarrow\\
&a_i+a_{i+1}+a_{i+2} = b_i+b_{i+2}+b_{i+2}+b_{i+3} \pmod 2 = b_i+b_{i+3} \pmod 2\\
&\Downarrow\\
&\ldots\\
&\Downarrow\\
&a_i+a_{i+1}+\ldots+a_N=b_i+b_{N+1} \pmod 2 = b_i \text{ (uma vez que } b_{N+1}=0).
\end{aligned}$$

Logo vem que $b_i=\sum_{j=1}^{N}a_i \pmod 2$, para i=0, 1, … , N, conforme se pretendia demonstrar.

◊