

Tópicos de Teoria Algébrica dos Grafos

Domingos Moreira Cardoso

Universidade de Aveiro
2008

Conteúdo

1	Grafos	1
1.1	Conceitos básicos	1
1.2	Grafos bipartidos	5
1.3	Grafos de Euler e grafos de Hamilton	7
1.4	Representação matricial de grafos	12
2	Matriz de Adjacência	15
2.1	Espectro e estrutura combinatória de grafos	15
2.2	Fórmula de Newton-Girard	20
2.3	Valores e vectores próprios	23
3	Extensões da abordagem de Motzkin-Straus	29
3.1	A formulação quadrática do número de clique	29
3.2	Resultados adicionais	34
4	Digrafos e Espaços Vectoriais	41
4.1	Espaço dos vértices e espaço dos arcos	42
4.2	Subespaços de circuitos e cocircuitos	43
4.3	Lema de Farkas para grafos	45
4.4	Relações entre os subespaços de circuitos e cocircuitos	46
5	Matriz Laplaciana	51
5.1	Propriedades da matriz laplaciana	51
5.2	Relações entre valores próprios das matrizes laplaciana e de adjacência	59
5.3	Representação espectral da matriz laplaciana	61
6	Apêndice	63
6.1	Grafos Planares e Generalizações	63
6.1.1	Fórmula de Euler e aplicações	63
6.1.2	Duais de grafos e digrafos planos	64
6.1.3	Condições necessárias para grafos planares	65
6.1.4	Condições necessárias e suficientes para grafos planares	67
6.1.5	Grafos platónicos	68
6.1.6	Grafos em variedades compactas orientáveis	69

6.1.7	Menores combinatórios e menores topológicos	71
6.1.8	Genus de um grafo e fórmula de Euler generalizada	73
6.1.9	Grafos g -platônicos	76
6.2	Colorações de vértices e arestas	78
Bibliografia		91
Índice		95

1

Grafos

1.1 Conceitos básicos

Um *grafo* G é um par de conjuntos (V, E) , tal que $V = V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ é o conjunto dos *vértices* e $E = E(G)$ é o conjunto das *arestas*, a cada uma das quais corresponde um subconjunto de $V(G)$ de cardinalidade 2, i.e., $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$, com $e_k = \{v_{k_i}, v_{k_j}\}$, para $k \in \{1, \dots, m\}$. Por simplicidade de notação, uma aresta entre os vértices x e y será representada por xy . Um grafo diz-se *simples* se não existem arestas paralelas (mais do que uma aresta entre os mesmos dois vértices) nem lacetes (arestas com ambos os extremos no mesmo vértice), caso contrário diz-se um multigrafo.

O número de vértices e arestas de um grafo designa-se, respectivamente, por *ordem* e *dimensão* do grafo.

Os grafos são muitas vezes representado por figuras planas constituídas por linhas e pontos, as primeiras representando arestas e os segundos vértices. Como exemplo, na Figura 1.1 representa-se um grafo de ordem 6 e dimensão 7.

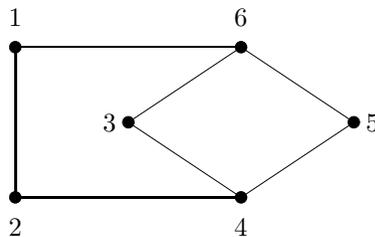


Figura 1.1: Exemplos de grafo.

Dado um grafo G , uma aresta diz-se incidente no vértice v , se v é um dos seus extremos e dois vértices, x e y , dizem-se *adjacentes* se $xy \in E(G)$.

Dados dois grafos G e G' , diz-se que G' é um subgrafo de G e que G é um

supergrafo de G' quando $V(G') \subseteq V(G)$ e $E(G') \subseteq E(G)$. Por sua vez, designa-se por subgrafo de G *induzido* pelo subconjunto de vértices V' e denota-se por $G[V']$ o subgrafo obtido de G ignorando o subconjunto de vértices $V(G) \setminus V'$ e, conseqüentemente, as arestas que lhe são incidentes. Por exemplo, na Figura 1.2 representa-se o subgrafo do grafo G de ordem 6, representado na Figura 1.1, induzido pelo subconjunto de vértices $\{3, 4, 5, 6\}$, ou seja, $G[\{3, 4, 5, 6\}]$.

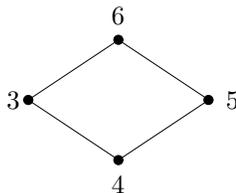


Figura 1.2: Subgrafo $G[\{3, 4, 5, 6\}]$ do grafo representado na Figura 1.1.

Designa-se por grafo *completo* (*nulo*) de ordem n e denota-se por K_n (N_n) um grafo com n vértices dois a dois adjacentes (não adjacentes, ou seja, sem qualquer aresta). Por sua vez, designa-se por grafo *complementar* de um grafo G e denota-se por \bar{G} um grafo com o mesmo conjunto de vértices de G no qual dois vértices são adjacentes se e só se não são adjacentes em G .

Denotando por \mathcal{G}_n o conjunto de todos os grafos de ordem n e por $\subseteq_{\mathcal{G}}$ a relação binária definida em \mathcal{G}_n tal que $G_1 \subseteq_{\mathcal{G}} G_2$ se e só se G_1 é um subgrafo de G_2 , é imediato concluir que $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_n, \subseteq_{\mathcal{G}})$ é um conjunto parcialmente ordenado. Neste conjunto parcialmente ordenado, K_n é o único elemento maximal e N_n o único elemento minimal. Adicionalmente, dado $G \in \mathcal{G}_n \setminus \{N_n, K_n\}$, é claro que G e \bar{G} não são comparáveis.

Dado um grafo G e um vértice $v \in V(G)$ designa-se por *grau* ou *valência* de v e denota-se por $d_G(v)$ o número de arestas de G incidentes em v . O máximo grau dos vértices de G denota-se por $\Delta(G)$ e o mínimo grau por $\delta(G)$.

Existem vários problemas reais que podem ser facilmente modelados por grafos, conforme o exemplo a seguir ilustra.

Exemplo 1.1. *O Sr. e a Sra Silva convidaram quatro casais para jantar em casa. Alguns são amigos do Sr. Silva e outros amigos da Sra Silva. Uma vez em casa do casal Silva os convidados que já se conheciam cumprimentaram-se com um aperto de mão e os restantes apenas se saudaram. Depois de todos terem chegado o Sr. Silva observou o seguinte: se me excluir a mim todos deram um número diferente de apertos de mão. Quantos apertos de mão deu o Sr. Silva?*

Demonstração. É claro que os membros de um mesmo casal não se cumprimentaram um ao outro, pelo que o número de cumprimentos variou entre 0 e 8. Por outro lado, uma vez que excluindo o Sr. Silva todas as restantes 9 pessoas deram um número diferente de apertos de mão, podemos atribuir a cada uma

delas exactamente um dos números entre 0 e 8 (ou seja, podemos identificar cada um deles por n_j , com $j = 0, 1, \dots, 8$). Assim, uma vez que o n_8 deu 8 apertos de mão, conclui-se que apertou a mão a toda a gente, com excepção dele próprio e da mulher. Logo, o n_8 e o n_0 são casados. Por sua vez, o n_7 só não apertou a mão a ele próprio, ao n_0 e ao n_1 (uma vez que este último só deu um aperto de mão e foi ao n_8). Logo, n_7 e n_1 são casados. Por sua vez, o n_6 só não deu apertos de mão a si próprio ao n_0 , n_1 e n_2 (note-se que este último deu um aperto de mão ao n_8 e n_7). Logo, n_2 e n_6 são casados. O n_5 apertou a mão de n_8 , n_7 , n_6 , n_4 e do Sr. Silva e, conseqüentemente, é casado com n_3 . Assim, a n_4 é a Sra Silva (que naturalmente não deu um aperto de mão ao Sr. Silva) e ficam determinados todos os apertos de mão, pelo que o Sr. Silva apertou a mão a 4 convidados (o n_8 , n_7 , n_6 e n_5). \square

Um grafo diz-se p -regular se todos os seus vértices têm grau p (no caso de $p = 3$ estes grafos também se designam por *cúbicos*).

Tendo em conta que ao adicionarmos os graus de todos os vértices de um grafo arbitrário, G , cada aresta conta duas vezes, com facilidade se conclui que

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)| \quad (1.1)$$

e, conseqüentemente, que $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 0 \pmod{2}$. Da igualdade (1.1) decorre ainda que

$$\delta(G) \leq \lfloor \frac{2|E(G)|}{n} \rfloor \leq \Delta(G). \quad (1.2)$$

O conjunto de vértices adjacentes a um vértice v designa-se por vizinhança de v (ou conjunto de vizinhos de v) e denota-se por $N_G(v)$. Como consequência, é claro que $d_G(v) = |N_G(v)|$.

Dados dois grafos G e H , a *união* de G com H denota-se por $G \cup H$ e corresponde ao grafo $G \cup H = (V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H))$ e a *intersecção* de G com H denota-se por $G \cap H$ e corresponde ao grafo

$$G \cap H = (V(G) \cap V(H), E(G) \cap E(H)).$$

Com base nesta definição de união e intersecção, podemos afirmar que um grafo G se parte nos grafos $G_1 = (V_1, E_1), \dots, G_k = (V_k, E_k)$ se $G = \bigcup_{1 \leq j \leq k} G_j$ e $G_p \cap G_q = \emptyset \quad \forall p \neq q$, onde \emptyset denota o grafo definido pelo par (\emptyset, \emptyset) .

Um grafo G diz-se *conexo* se não admite qualquer partição para além da trivial (i.e, $G = G \cup \emptyset$). Caso contrário diz-se não conexo (ou desconexo). Por sua vez, dado um grafo não conexo G , um seu subgrafo diz-se uma *componente conexa* (ou simplesmente *componente*) de G , se é um subgrafo conexo maximal, no sentido em que sendo induzido pelo subconjunto de vértices V' , $\forall x \in V(G) \setminus V'$, o subgrafo $G[V' \cup \{x\}]$ não é conexo.

Designa-se por *passaio* num grafo G , entre os vértices x e y , toda a sequência de vértices e arestas da forma

$$x = v_1, v_1v_2, v_2, \dots, v_{k-1}, v_{k-1}v_k, v_k = y,$$

com eventual repetição de vértices e arestas. Neste caso, os vértices x e y designam-se por vértices extremos do passeio (sendo x o vértice inicial e y o vértice final). Um *trajecto* num grafo G entre os vértices x e y é um passeio entre x e y sem arestas repetidas (podendo, no entanto, existir vértices repetidos). Um *caminho* entre os vértices x e y é um trajecto entre x e y sem vértices repetidos. Os trajectos fechados (onde o vértice final coincide com o inicial) designam-se por *circuitos* e os trajectos fechados, onde os vértices inicial e final são os únicos que coincidem, designam-se por *ciclos*. Geralmente, os caminhos, trajectos, passeios, circuitos e ciclos representam-se pela respectiva sequência de vértices.

Dado um caminho P (ciclo C) de um grafo G designa-se por comprimento de P (C) e denota-se por $comp(P)$ ($comp(C)$) o número de arestas que o constitui. Por exemplo, uma aresta é um caminho de comprimento 1 e um vértice um caminho de comprimento 0. Por outro lado, um triângulo é um ciclo de comprimento 3.

Dado um grafo G de ordem n e dois vértices $x, y \in V(G)$, denotando por $\mathcal{P}_G(x, y)$ o conjunto de todos os caminhos de G entre x e y , designa-se por *distância* entre vértices de G a função

$$d_G : V(G) \times V(G) \mapsto \{0, \dots, n-1\} \cup \{\infty\} \quad (1.3)$$

$$(x, y) \rightsquigarrow d_G(x, y) = \begin{cases} \min\{comp(P) : P \in \mathcal{P}_G(x, y)\} & \text{se } \mathcal{P}_G(x, y) \neq \emptyset, \\ \infty & \text{se } \mathcal{P}_G(x, y) = \emptyset. \end{cases}$$

Embora as notações utilizadas para grau de um vértice e para distância entre dois vértices sejam idênticas, é fácil distingui-las de acordo com o contexto.

A partir das definições dadas de grafo conexo e de componente conexa, podemos concluir que um grafo é conexo se e só se tem uma única componente ou, em alternativa, se e só se existe um caminho entre quaisquer dois dos seus vértices.

A maior distância entre vértices de um grafo G designa-se por *diâmetro* de G e denota-se por $diam(G)$, por sua vez, designa-se por *cintura* de G e denota-se por $g(G)$ o comprimento do ciclo de menor comprimento contido em G . Quando G não é conexo, diz-se que tem diâmetro infinito e escreve-se $diam(G) = \infty$ e quando é acíclico (i.e, não tem ciclos) diz-se que tem cintura infinita e escreve-se $g(G) = \infty$. Como exemplo, na Figura 1.3, representa-se um grafo G cúbico, ou seja, 3-regular, com diâmetro $diam(G) = 3$ e cintura $g(G) = 5$.

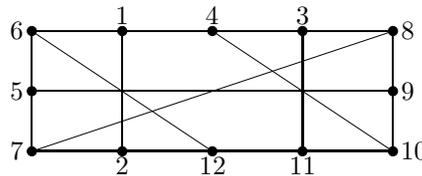


Figura 1.3: Grafo cúbico G tal que $g(G) = 5$ e $diam(G) = 3$.

1.2 Grafos bipartidos

Um grafo G diz-se *bipartido* se existe uma partição do seu conjunto de vértices em V' e V'' tal que não existem arestas entre qualquer par de vértices de V' nem entre qualquer par de vértices de V'' . Um tal grafo bipartido é usualmente representado por $G = (V', V'', E)$, onde E denota o respectivo conjunto de arestas. Quando $|V'| = m$, $|V''| = n$ e $\forall x \in V' \forall y \in V''$, $xy \in E(G)$ este grafo denota-se por K_{mn} e designa-se por grafo bipartido completo.

Teorema 1.1. *Um grafo admite uma bipartição se e só se não tem circuitos de comprimento ímpar.*

Demonstração. Se $G = (V', V'', E(G))$ é um grafo bipartido, então é claro que todos os circuitos têm comprimento par. Com efeito, uma vez que tanto em V' como em V'' não existem vértices adjacentes, partindo-se, por exemplo, de um vértice em V' , de cada vez que se passa para V'' , para se obter um circuito, tem de se voltar a V' na aresta seguinte, pelo que qualquer circuito tem comprimento par. Suponhamos que G não tem circuitos de comprimento ímpar. Uma vez que um grafo é bipartido sse cada uma das suas componentes constitui um subgrafo bipartido, podemos supor, sem perda de generalidade, que G é conexo. Considere-se um vértice arbitrário $z \in V(G)$ e seja $V' = \{w \in V(G) : d_G(z, w) \text{ é ímpar}\}$. Nestas condições não existem arestas que liguem vértices de V' (caso contrário existiriam circuitos de comprimento ímpar). Por outro lado, como todos os vértices de $V(G) \setminus V'$ estão a uma distância par de z (em particular z está a uma distância 0 dele próprio), não existem vértices adjacentes em $V(G) \setminus V'$ (uma vez que, por razões idênticas às anteriores, em tais condições, existiriam circuitos de comprimento ímpar). Logo, fazendo $V'' = V(G) \setminus V'$ obtém-se uma bipartição para G , dada por $G = (V', V'', E(G))$. \square

Os grafos conexos acíclicos (i.e, sem ciclos) designam-se por *árvores* e constituem uma classe especial de grafos bipartidos. Por sua vez, designa-se por *floresta* todo o grafo acíclico, pelo que uma floresta é um grafo cujas componentes são árvores.

Teorema 1.2. *Sendo G um grafo, são equivalentes as seguintes afirmações:*

1. G é uma árvore.
2. G é conexo e tem $|V(G)| - 1$ arestas.
3. G não tem circuitos, mas acrescentando-se uma aresta a G resulta um único circuito.

Demonstração. Para provar a implicação $1 \Rightarrow 2$, dado que uma árvore é um grafo conexo, basta provar que se $G = (V(G), E(G))$ é uma árvore, então tem $|V(G)| - 1$ arestas, para o que vamos utilizar indução sobre o número de arestas de grafos que definem árvores. Seja $G_k = (V(G_k), E(G_k))$ uma árvore com k arestas. Para $k = 1$ vem $|V(G_1)| = 2$, pelo que o resultado se verifica. Suponha-se que o resultado é verdadeiro para k tal que $1 \leq k \leq n - 1$ e considere-se

a árvore G_n . Dado que G_n não tem circuitos, existe pelo menos um vértice, v , com grau 1. Considerando o subgrafo obtido de G_n , retirando-se o vértice v (e conseqüentemente a aresta que lhe é incidente), determina-se G_{n-1} que continua a ser uma árvore (uma vez que permanece conexo e sem circuitos), logo, por hipótese de indução, $E(G_{n-1}) = (|V(G_n)| - 1) - 1$. Dado que $|V(G_n)| = |V(G_{n-1})| + 1$ conclui-se que G_n tem $|V(G_n)| - 1$ arestas, completando-se assim a prova da implicação $1 \Rightarrow 2$. A prova das implicações $2 \Rightarrow 3$ e $3 \Rightarrow 1$, fica como exercício. \square

Como consequência deste teorema, podemos concluir, também, que eliminando uma aresta a uma árvore se obtém um grafo desconexo com duas componentes, cada uma das quais é uma árvore.

Teorema 1.3. *Um grafo G é uma floresta se e só se*

$$|E(G)| - |V(G)| + c(G) = 0,$$

onde $c(G)$ denota o número de componentes de G .

Demonstração. \Rightarrow A prova da condição necessária vai ser feita por indução sobre o número de arestas de G , tendo em conta que o resultado se verifica trivialmente para $|E(G)| = 0$.

Suponha-se $|E(G)| > 0$ e que o resultado se verifica para todas as florestas com menos do que $|E(G)|$ arestas. Seja G' um subgrafo de G obtido por eliminação de uma aresta arbitrária. Logo G' é uma floresta com $|E(G)| - 1$ arestas, $|V(G)|$ vértices e $c(G) + 1$ componentes. Por hipótese de indução, aplicada a G' ,

$$0 = |E(G')| - |V(G')| + c(G') = |E(G)| - 1 - |V(G)| + c(G) + 1 = |E(G)| - |V(G)| + c(G).$$

\Leftarrow Suponha-se que G tem p componentes, G_1, \dots, G_p , pelo que $|E(G)| - |V(G)| + p = \sum_{j=1}^p (|E(G_j)| - |V(G_j)| + 1)$. Então

$$|E(G)| - |V(G)| + p = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^p (|E(G_j)| - |V(G_j)| + 1) = 0$$

e, uma vez que $\forall j \in \{1, \dots, p\} \quad |E(G_j)| - |V(G_j)| + 1 \geq 0$, conclui-se que

$$\forall j \in \{1, \dots, p\} \quad |E(G_j)| - |V(G_j)| + 1 = 0.$$

Conseqüentemente, de acordo com o Teorema 1.2, todos os grafos G_j , com $j \in \{1, \dots, p\}$, são árvores. \square

Deste teorema decorre que todo o grafo G tal que $|E(G)| \geq |V(G)|$ contém pelo menos um circuito.

Dado um grafo conexo G , designa-se por árvore *abrangente* ou de *suporte* de G todo o subgrafo de G que é uma árvore e contém todos os vértices de G .

Teorema 1.4. *Todo o grafo conexo admite uma árvore abrangente.*

Demonstração. Seja G um grafo conexo. Se G não tem circuitos então, por definição, é uma árvore e o resultado verifica-se. Suponha-se que G tem um circuito. Então retirando uma aresta a esse circuito o grafo mantém-se conexo (porquê?). Repetindo este processo, ao fim de um número finito de arestas eliminadas, obtém-se uma árvore abrangente (uma vez que o conjunto de vértices não foi alterado). \square

1.3 Grafos de Euler e grafos de Hamilton

Um trajecto designa-se por *trajecto de Euler* se contém todas as arestas (logo também todos os vértices) do grafo ou multigrafo a que se refere. Por sua vez, designa-se por *circuito de Euler*, todo o circuito que contenha todas as arestas do grafo.

Teorema 1.5. *Um grafo (ou multigrafo) conexo G admite um circuito de Euler se e só se todos os seus vértices têm grau par.*

Demonstração. Uma vez que é imediato verificar que a condição é necessária, vamos apenas provar que é suficiente, utilizando indução sobre o número de arestas do grafo (ou multigrafo) G .

Para um grafo (ou multigrafo) com uma única aresta o resultado é trivial (se a aresta é um lacete, ou seja, existe um único vértice com grau dois, então o grafo admite um circuito de Euler). Assuma-se que todos os vértices de G têm grau par e que todos os grafos (ou multigrafos) em tais condições com menos arestas do que as de G admitem circuitos de Euler. Escolha-se um vértice $v \in V(G)$ e inicie-se um trajecto segundo as arestas de G , sem se passar pela mesma aresta duas vezes, até se encontrar v novamente (note-se que, dada a paridade dos graus, este trajecto fechado existe). Posteriormente, retirando-se as arestas relativas ao trajecto percorrido obtém-se um certo número de subgrafos (ou submultigrafos) conexos que cujos vértices continuam a ter grau par. Consequentemente, (por hipótese de indução) admitem circuitos de Euler. Nestas condições, podemos criar um circuito de Euler para G , acrescentando ao circuito inicial os circuitos de Euler de cada um dos subgrafos (ou submultigrafos) obtidos. \square

Os únicos grafos não conexos, cujos vértices têm grau par, que admitem circuitos de Euler são os que têm uma única componente com um número de arestas superior a zero (i. e, as demais componentes são constituídas por vértices isolados). Com base neste teorema fica claro que a pretensão dos habitantes de Königsberg era impossível de satisfazer.

A prova construtiva do Teorema 1.5 sugere um algoritmo recursivo para a determinação de circuitos de Euler em grafos ou multigrafos conexos, onde todos os vértices têm grau par. Assim, denotando por $\text{Euler}(G, v_1)$ o algoritmo recursivo para a determinação de um circuito de Euler num grafo ou multigrafo, G , a partir de um vértice $v_1 \in V(G)$, podemos formaliza-lo do seguinte modo :

- **Algoritmo** Euler(G, v_1);
 - Se $d_G(v_1) = 0$
 - então Euler(G, v_1) := v_1 ;
 - senão faz
 1. construir um circuito, $C = (v_1, v_2, \dots, v_k, v_1)$, em G ;
 2. fazer $G := (V(G), E(G) \setminus E(C))$;
 3. devolver (Euler(G, v_1), Euler(G, v_2), \dots , Euler(G, v_k));
 - fim faz.

Fim do algoritmo.

O corolário que se segue estabelece as condições necessárias e suficientes para a existência de um trajecto de Euler nos grafos que não admitem circuitos de Euler (uma vez que um circuito de Euler é também um trajecto de Euler).

Corolário 1.6. *Um grafo (ou multigrafo) conexo G admite um trajecto de Euler, mas não um circuito de Euler, se e somente se tem exactamente dois vértices de grau ímpar.*

Demonstração. Se G admite um trajecto de Euler que não é um circuito, então, uma vez que os vértices de partida e chegada são distintos, apenas estes têm grau ímpar. Relativamente aos demais, em cada visita, foi utilizado uma aresta para atingir o vértice e outra para o abandonar, pelo que têm grau par. Suponha-se que em G todos os vértices têm grau, com excepção de dois deles. Então, pelo Teorema 1.5, é claro que não existe um circuito de Euler, pelo que resta provar a existência de um trajecto de Euler. Suponha-se que u e v são os vértices de grau ímpar em G e considere-se o grafo (ou multigrafo) G' , $E(G') = E(G) \cup \{uv\}$ (note-se que no caso da aresta uv já existir em $E(G)$, obtém-se um multigrafo, pelo que, nesse caso, $E(G')$ é um multiconjunto com arestas repetidas). É claro que G' satisfaz as hipóteses do Teorema 1.5, pelo que admite um circuito de Euler. Se a este circuito retirarmos a aresta uv obtém-se um trajecto de Euler em G . \square

Os grafos (ou multigrafos) que admitem circuitos de Euler designam-se por grafos de Euler ou eulerianos. Existem várias caracterizações de grafos (ou multigrafos) eulerianos, alternativas ao Teorema 1.5, das quais apenas vamos referir a que se relaciona com a partição do conjunto de arestas em ciclos.

Teorema 1.7 (Veblen, 1912). *Um grafo ou multigrafo conexo G não nulo (ou seja, com pelo menos uma aresta) é euleriano sse $E(G)$ admite uma partição em ciclos.*

Demonstração. Supondo que G é euleriano, vamos provar, por indução sobre o número de arestas, que então G admite uma partição em ciclos, tendo em conta que o resultado é trivialmente verdadeiro para $|E(G)| = 1$ (lacete). Com efeito, suponha que o resultado é verdadeiro para grafos ou multigrafos conexos

com um número de arestas, m , tal que $1 \leq m < |E(G)|$. Uma vez que para todo o vértice $v \in V(G)$ $d_G(v) \geq 2$, é claro que G contém um ciclo C . Logo, $G - E(C) = (V(G), E(G) \setminus E(C))$, é um grafo (ou multigrafo), possivelmente desconexo, cujas vértices das componentes G_1, \dots, G_q têm todos grau par. Consequentemente, cada componente é euleriana e, por hipótese de indução, cada uma delas é a união disjunta de um conjunto, possivelmente vazio (no caso da componente ser constituída por um vértice isolado) de ciclos. Se à união destes conjuntos de ciclos (que constituem uma partição para cada uma das componentes) adicionarmos o ciclo C , obtém-se a partição desejada para G . Reciprocamente, suponha-se que $E(G)$ é a união disjunta dos ciclos C_1, \dots, C_p . Logo, para todo o vértice $v \in V(G)$, v pertence à intersecção de k_v ($k_v \in \mathbb{N}$) ciclos do conjunto $\{C_1, \dots, C_p\}$, donde vem que $d_G(v) = 2k_v$ e, consequentemente, todos os vértices têm grau par. \square

Um exemplo de aplicação (lúdico) deste corolário, está relacionado com passatempos em jornais e revistas onde se convida o leitor a testar se uma dada figura pode ser decalcada sem se levantar a caneta e sem se repetir qualquer dos segmentos e/ou curvas que o constituem.

Um ciclo que contém todos os vértices de um grafo, designa-se *ciclo de Hamilton* (ou *hamiltoniano*). Por sua vez, um caminho que contém todos os vértices do grafo diz-se um *caminho de Hamilton* (ou *hamiltoniano*). Um grafo que admite um ciclo de Hamilton diz-se um *grafo hamiltoniano*. Conforme já se referiu na introdução, a associação do nome do matemático irlandês Hamilton ¹ a estes grafos, deve-se ao facto de ter sido ele a propor e a resolver (em 1857) um problema que designou por *viagem à volta do mundo* que consiste em percorrer todos os vértices de um dodecaedro passando uma única vez em cada um, com partida e chegada no mesmo vértice. De acordo com (Berge, 1991) Hamilton resolveu este problema observando que quando o viajante chega a um dado vértice, percorrendo uma certa aresta, tem três opções: ou (L) continua pela aresta da esquerda, ou (R) continua pela aresta da direita, (ou) (1) fica no vértice (o que acontece quando percorre um ciclo). A partir desta observação, definiu certos procedimentos à custa de operações com L e R , representando, por exemplo, por L^2R o procedimento de voltar duas vezes seguidas à esquerda e posteriormente à direita. Adicionalmente, considerou que duas sequências de operações têm o mesmo resultado se, a partir de um mesmo vértice, ambas conduzem a esse vértice. Este produto, embora não seja comutativo (uma vez que $LR \neq RL$) é um produto associativo (por exemplo, $(LL)R = L(LR)$). Devido ao facto das faces serem pentagonais é claro que $R^5 = L^5 = 1$ e, por outro lado, com facilidade se verifica que $LR^3L = R^2$. Com base nestas conclusões obtém-se

$$\begin{aligned} 1 &= R^5 = R^2R^3 = (LR^3L)R^3 = (LR^3)^2 = (L(LR^3L)R)^2 = (L^2R^3LR)^2 \\ &= (L^2(LR^3L)RLR)^3 = (L^3R^3LRLR)^3 = LLLRRRLRLRLRLRLRLR. \end{aligned}$$

¹Sir William Rowan Hamilton nasceu em Dublin na Irlanda em 1805 e faleceu em 1865.

A sequência obtida contém 20 operações e nenhuma subsequência dá resultado 1 (pelo que não determina subciclos), logo representa um ciclo de Hamilton. Note-se ainda que este ciclo se pode iniciar em qualquer dos 20 vértices do dodecaedro.

Com facilidade se conclui que também os restantes 4 poliedros convexos regulares, ou seja, o tetraedro, hexaedro, octaedro e icosaedro (que, conjuntamente com o dodecaedro constituem os designados sólidos platónicos), admitem ciclos de Hamilton. Outro exemplo de grafo hamiltoniano é o que se obtém, a partir de um tabuleiro de xadrez, associando a cada um dos seus 64 quadrados um vértice de um grafo G cujas arestas ligam os vértices associados a quadrados entre as quais é possível efectuar um movimento de cavalo. Neste grafo, os ciclos de Hamilton correspondem a movimentos sucessivos de um cavalo de forma a que todos os quadrados (brancos e pretos) são visitados uma única vez. Na Figura 1.4 representa-se um dos ciclos de Hamilton possíveis para o referido grafo.

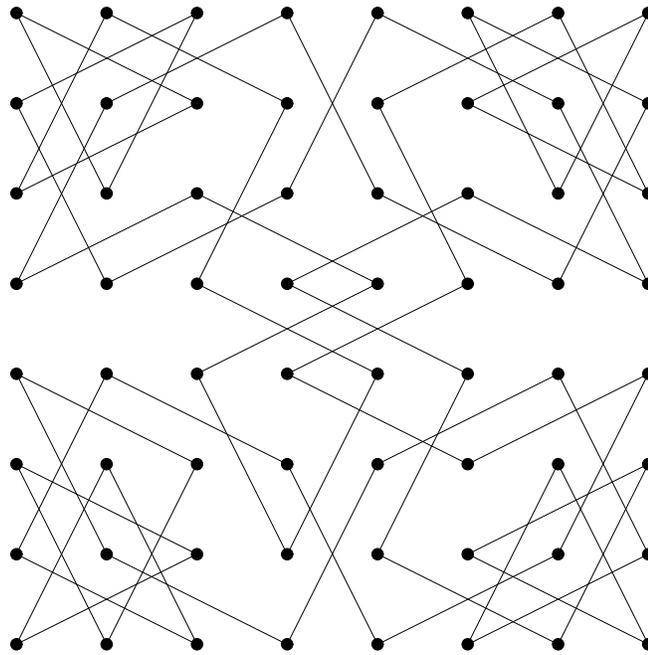


Figura 1.4: Ciclo de Hamilton.

Encontrar um ciclo de Hamilton num grafo de pequena dimensão que o admita é relativamente fácil. Porém, quando a dimensão cresce, provar que não existe qualquer ciclo de Hamilton pode tornar-se muito difícil. Na tentativa de obtenção de ciclos de Hamilton deve ter-se em conta as seguintes três regras

básicas:

1. Se um vértice tem grau 2, então ambas as arestas incidentes no vértice devem fazer parte do ciclo.
2. Não se deve obter qualquer subciclo (ou seja, não se deve percorrer um ciclo que não contém todos os vértices).
3. Uma vez que se visite um dado vértice, todas as arestas incidentes nesse vértice que não foram utilizadas podem ser eliminadas.

É claro que os grafos completos são hamiltonianos, pelo que, dado um grafo G não hamiltoniano, adicionando arestas a G , necessariamente se obtém um grafo hamiltoniano. O teorema a seguir, dá-nos uma condição suficiente para que um grafo admita um ciclo de Hamilton.

Teorema 1.8 (Ore, 1960). *Seja G um grafo de ordem n . Se para quaisquer dois vértices não adjacentes a soma dos respectivos graus é não inferior a n , então G é hamiltoniano.*

Demonstração. Suponha que G é um grafo que satisfaz a hipótese mas não é hamiltoniano. Suponha-se ainda que G é um grafo maximal (relativamente ao número de arestas) com esta propriedade, ou seja, é tal que acrescentando uma aresta se obtém um ciclo de Hamilton². Uma vez que G não é completo (caso contrário admitiria um ciclo de Hamilton), existem dois vértices não adjacentes, $x, y \in V(G)$ e dado que G é maximal (não hamiltoniano), por adição da aresta xy obtém-se um ciclo de Hamilton que contém xy . Logo, G contém um caminho, entre x e y , que percorre todos os restantes vértices de G , i.e., (após, eventual, reordenação dos vértices) contém o caminho $(x = v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n = y)$. Seja $Q(y) = \{v_i : v_{i-1} \in N_G(y)\}$ (uma vez que o vértice y não é adjacente a ele próprio, i.e., $y \notin N_G(y)$, o conjunto $Q(y)$ está bem definido e $|Q(y)| = |N_G(y)|$). Por hipótese, $|N_G(x)| + |Q(y)| \geq n$ e, dado que $v_1 = x \notin N_G(x)$ e $v_1 \notin Q(y)$, então $|N_G(x) \cup Q(y)| \leq n - 1$ e, conseqüentemente, $|N_G(x) \cap Q(y)| \geq 1$. Seja $v_i \in N_G(x) \cap Q(y)$ e, a partir de $x = v_1$, considere-se o caminho (v_1, \dots, v_{i-1}) , o qual (uma vez que $v_{i-1} \in N_G(y)$) se pode estender ao caminho $P_1 = (v_1, \dots, v_{i-1}, v_n)$. A partir de $y = v_n$, pode obter-se o caminho $(v_n, v_{n-1}, \dots, v_i)$ que, por sua vez (dado que $v_i \in N_G(x)$) se pode estender ao caminho $P_2 = (v_n, v_{n-1}, \dots, v_i, v_1)$. A partir dos caminhos P_1 e P_2 podemos construir um ciclo de Hamilton, o que contraria a hipótese. \square

Note-se que qualquer grafo que satisfaça as hipóteses do Teorema 1.8 é um grafo conexo. Com efeito, supondo que G é um grafo de ordem n com k componentes, G_j , para $j = 1, \dots, k$, dados dois vértices pertencentes a componentes distintas, $x \in V(G_p)$ e $y \in V(G_q)$ (com $p, q \in \{1, \dots, k\}$), vem que x e y não

²Note-se que uma tal situação pode sempre ser atingida sem se alterarem as hipóteses (com efeito, ao acrescentarem-se arestas, unindo vértices previamente não adjacentes, não só não se faz decrescer o grau de nenhum vértice, como não se criam novos pares de vértices não adjacentes).

são adjacentes e, adicionalmente, $d_G(x) < |V(G_p)|$ e $d_G(y) < |V(G_q)|$. Logo, $d_G(x) + d_G(y) \leq |V(G_p)| + |V(G_q)| - 2 < |V(G)|$, o que contraria a hipótese do Teorema 1.8. Como corolário do Teorema 1.8, pode concluir-se o resultado obtido por Dirac, oito anos antes do teorema de Ore ter sido provado.

Teorema 1.9 (Dirac, 1952). *Seja G um grafo tal que $|V(G)| \geq 3$. Se $\delta(G) \geq \lfloor \frac{|V(G)|}{2} \rfloor$, então G é hamiltoniano.*

Deve observar-se, porém, que a hipótese do teorema de Dirac não pode ser relaxada para $\delta(G) \geq \lfloor \frac{|V(G)|}{2} \rfloor$. Com efeito, o grafo da Figura 1.5 satisfaz esta última condição e, no entanto, não é hamiltoniano.

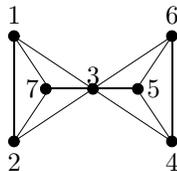


Figura 1.5: Grafo G não hamiltoniano tal que $\delta(G) \geq \lfloor \frac{|V(G)|}{2} \rfloor$.

1.4 Representação matricial de grafos

Dado um grafo G , tal que $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$, designa-se por matriz de adjacência de G e denota-se por A_G , a matriz quadrada $n \times n$, tal que

$$(A_G)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } v_i v_j \in E(G), \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Sendo G um grafo de ordem n , uma vez que A_G é uma matriz simétrica, tem n valores próprios reais os quais vamos denotar por $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Por sua vez, o espectro de A_G , que corresponde ao conjunto dos valores próprios com eventuais repetições, denotar-se-á por $\sigma(A_G)$. Assim, supondo que A_G tem r valores próprios distintos, o polinómio característico de A_G é $p(A_G, x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_r)^{n_r}$ e $\sigma(A_G) = \{[\lambda_1]^{n_1}, \dots, [\lambda_r]^{n_r}\}$, onde n_j denota a multiplicidade do valor próprio λ_j , pelo que $\sum_{j=1}^r n_j = n$. Sendo G um grafo simples, as entradas ao longo da diagonal principal de A_G são todas nulas e, consequentemente, $tr(A_G) = 0$. Por outro lado, se G tem pelo menos uma aresta então A_G tem valores próprios positivos e negativos tais que $\lambda_{\min}(A_G) \leq -1$ e $1 \leq \lambda_{\max}(A_G)$, sabendo-se que $\lambda_{\min}(A_G) = -1$ se e só se todas as componentes de G são subgrafos completos.

De agora em diante, para um grafo G arbitrário, vamos considerar o valores próprios de G como sendo os da sua matriz de adjacência e segundo a ordem

$$\lambda_{\min}(A_G) = \lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \cdots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1 = \lambda_{\max}(A_G).$$

Para além da matriz de adjacência, têm sido estudadas outras matrizes representativas de grafos, as quais têm revelado propriedades interessantes. Uma destas matrizes é a *matriz de Seidel* que tem zeros ao longo da diagonal principal, -1 nas entradas correspondentes e vértices adjacentes e 1 nas restantes. Uma outra matriz muito estudada tem sido a *matriz laplaciana* de G que se denota por L_G e se define pela igualdade:

$$L_G = D - A_G,$$

onde D denota uma matriz diagonal, $D = \text{diag}(d_G(v_1), \dots, d_G(v_n))$. Por sua vez designa-se por matriz laplaciana sem sinal de G a matriz $|L_G| = D + A_G$. No caso de grafos regulares, todas estas matrizes são casos particulares de uma matriz que se designa por *matriz de adjacência generalizada*, designando-se por matriz de adjacência generalizada de um grafo G , toda a combinação linear das matrizes A_G , J e I ,

$$\alpha A_G + \beta J + \gamma I,$$

com $\alpha \neq 0$, onde J denota a matriz com entradas todas iguais à unidade e I denota a matriz identidade. Com efeito, sendo G um grafo p -regular, fazendo $\alpha = -2$, $\beta = 1$ e $\gamma = -1$ obtém-se a matriz de Seidel e, adicionalmente, fazendo $\alpha = -1$, $\beta = 0$ e $\gamma = p$ obtém-se a matriz laplaciana.

Teorema 1.10. *Seja G um grafo p -regular de ordem n cujos valores próprios são $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1 = p$. Então a matriz de adjacência generalizada $\alpha A_G + \beta J + \gamma I$ tem valores próprios $\alpha n + \beta p + \gamma$ e $\alpha \lambda_i + \gamma$, para $i = 2, \dots, n$.*

Demonstração. O primeiro valor próprio é obtido tendo em conta que \hat{e} (o vector de componentes todas unitárias) é o vector próprio de A_G associado a p e os restantes valores próprios decorrem do facto dos vectores próprios de A_G associados a $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ serem ortogonais a \hat{e} e, conseqüentemente, pertencerem ao núcleo de J . \square

O maior valor próprio de um grafo designa-se por *dominante* e qualquer dos restantes por *subdominante*.

Teorema 1.11. *Seja G um grafo λ um valor próprio subdominante com multiplicidade m_λ . Então a matriz de adjacência generalizada, $\alpha A_G + \beta J + \gamma I$ tem $\alpha \lambda + \gamma$ como valor próprio com multiplicidade m tal que $m_\lambda - 1 \leq m \leq m_\lambda + 1$.*

Demonstração. Seja H o hiperplano ortogonal ao vector \hat{e} e seja E_λ o subespaço invariante associado ao valor próprio λ . Então

$$\dim(H + E_\lambda) + \dim(H \cap E_\lambda) = \dim(H) + \dim(E_\lambda).$$

Se $E_\lambda \subseteq H$, então $\dim(H + E_\lambda) = n - 1$ e $\dim(H \cap E_\lambda) = m_\lambda$. Tal significa que o argumento utilizado na prova do Teorema 1.10 (caso em que G é regular) continua válido e, conseqüentemente, conclui-se que $m = m_\lambda$. Caso contrário, $\dim(H + E_\lambda) = n$ e $\dim(H \cap E_\lambda) = m_\lambda - 1$. O argumento utilizado na prova do Teorema 1.10 implica que se tenha $m \geq m_\lambda - 1$. Se $C = \alpha A_G + \beta J + \gamma I$, então

$$A_G = -\alpha^{-1}\beta J + \alpha^{-1}C - \alpha^{-1}\gamma I.$$

Aplicando os argumentos utilizados no parágrafo anterior à nova matriz, vem que $m_\lambda \geq m - 1$. Logo, $m_\lambda - 1 \leq m \leq m_\lambda + 1$. \square

Este resultado pode aplicar-se directamente ao grafo complementar e à matriz de Seidel. Porém, não se pode aplicar directamente matriz laplaciana.

A matriz de *incidência* aresta vértice de um grafo de ordem n e dimensão m é uma matriz $n \times m$, B_G , tal que

$$(B_G)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } e_j = v_i v_k, \text{ para algum } v_k \in V(G), \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Um *grafo linha* (ou, *grafo representativo das arestas*) de G que se denota por $L(G)$, obtém-se de G , considerando como vértices as arestas de G e como relação de adjacência entre os seus vértices a respectiva relação de adjacência entre arestas. Assim, dois vértices de $L(G)$ são adjacentes se e só se as correspondentes arestas em G são adjacentes (ou seja, têm um vértice comum). Como consequência, com facilidade se conclui que, dado um grafo arbitrário G de ordem n ,

$$B_G^T B_G = 2I_n + A_{L(G)},$$

onde I_n denota a matriz identidade de ordem n (deve observar-se que $B_G B_G^T = D + A_G$). Ao longo deste texto vamos denotar os valores próprios da matriz laplaciana de um grafo de ordem n por $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_n$. É claro que $\text{tr}(L_G) = 2|E(G)|$ e $\theta_1 = 0$ (uma vez que $\forall i \in V(G)$ $(L_G \hat{e})_i = (D\hat{e} - A_G \hat{e})_i = d_G(i) - d_G(i) = 0$). O estudo de valores e vectores próprios de um grafos refere-se, usualmente, ao estudo de valores e vectores próprios da respectiva matriz de adjacência (generalizada ou não) ou laplacina (com ou sem sinal). A matriz laplaciana é um caso particular da família de combinações lineares da matriz de adjacência generalizada com a matriz D . Assim, a matriz laplaciana (com ou sem sinal) é uma caso particular da família de matrizes:

$$\alpha A_G + \beta J + \gamma I + \delta D,$$

onde α, β, γ e δ são escalares e D denota a matriz diagonal $\text{diag}(d_G(v_1), \dots, d_G(v_n))$. Porém, quando falamos de espectros de grafos em geral falamos de valores próprios das matrizes de adjacência as quais, sendo simétricas com a mesma ordem n dos grafos, têm n valores próprios reais, contando eventuais repetições. Por outro lado, uma vez que as entradas da diagonal principal destas matrizes são nulas e, conseqüentemente, os respectivos traços são nulos, podemos concluir que a soma dos valores próprios é também nula.

2

Matriz de Adjacência

2.1 Espectro e estrutura combinatória de grafos

O próximo teorema estabelece uma relação entre o número de passeios fechados de comprimento k de um grafo G e o traço da potência de ordem k da respectiva matriz de adjacência.

Teorema 2.1. *Dado um grafo G e a sua matriz de adjacência A_G , denotando as entradas da matriz A_G^k por a_{ij}^k e por $p_{ij}(k)$ o número de passeios de comprimento k entre os vértices i e j de G , podemos concluir que $a_{ij}^k = p_{ij}(k)$ (nestas condições, note-se que as entradas da diagonal principal de A_G^k correspondem ao número de passeios fechados de comprimento k que começam e terminam no vértice i , $p_{ii}(k)$).*

Demonstração. Dado que o resultado é trivialmente verdadeiro para $k = 0$ (admitindo que $A_G^0 = I$) e para $k = 1$, vamos fazer a prova por indução sobre k . Assim, suponha que o resultado se verifica para k , com $k \geq 1$, e considere a matriz $A_G^{k+1} = A_G^k A_G$. Então, qualquer que seja $ij \in E(G)$, vem que

$$a_{ij}^{k+1} = \sum_{r=1}^n a_{ir}^k a_{rj} = \sum_{r=1}^n p_{ir}(k) a_{rj} = p_{ij}(k+1).$$

□

Corolário 2.2. *Um grafo G de ordem n é conexo se e somente se $\sum_{k=0}^{n-1} A_G^k \geq J$, onde J denota a matriz quadrada de ordem n com entradas unitárias.*

Demonstração. Supondo que G é conexo, então existe um caminho (de comprimento não superior a $n - 1$) entre quaisquer pares de vértices, pelo que $\forall ij \in E(G)$ existe $k \leq n - 1$ tal que $a_{ij}^k \geq 1$. Consequentemente, podemos

concluir a desigualdade $\sum_{k=0}^{n-1} A_G^k \geq J$. Reciprocamente, suponha-se que a desigualdade $\sum_{k=0}^{n-1} A_G^k \geq J$ se verifica. Então, $\forall ij \in E(G)$ existe $k \leq n-1$ tal que $a_{ij}^k \geq 1$ e, uma vez que $p_{ij}^k = a_{ij}^k$, podemos concluir que existe pelo menos um passeio de comprimento não superior a $n-1$ entre i e j . \square

Denotando por t o número de triângulos, \mathcal{C}_k o conjunto de ciclos de comprimento k e por $\triangleright-$ o conjunto de triângulos com uma aresta pendente, com base Teorema 2.1, podemos tirar ainda as seguintes conclusões:

1. $tr(A_G^1) = 0$.
2. $tr(A_G^2) = 2|E(G)|$.
3. $tr(A_G^3) = 6t$.
4. $tr(A_G^4) = 8|\mathcal{C}_4| - 2|E(G)| + 2 \sum_{v \in V(G)} d_G^2(v)$. Note-se que

$$\begin{aligned} tr(A_G^4) &= 2|E(G)| + 8|\mathcal{C}_4| + \sum_{ij \in E(G)} (d_G(i) + d_G(j) - 2) + 2 \sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{2} \\ &= 2|E(G)| + 8|\mathcal{C}_4| + \sum_{v \in V(G)} d_G^2(v) - 2|E(G)| + 2 \sum_{v \in V(G)} \frac{d_G^2(v) - d_G(v)}{2} \\ &= 8|\mathcal{C}_4| - 2|E(G)| + 2 \sum_{v \in V(G)} d_G^2(v), \end{aligned}$$

donde se conclui que $|\mathcal{C}_4| = \frac{1}{8}(tr(A_G^4) + tr(A_G^2) - 2 \sum_{v \in V(G)} d_G^2(v))$.

5. $tr(A_G^5) = 10(|\triangleright-| + |\mathcal{C}_5|)$, donde se $g(G) > 3$, então $|\mathcal{C}_5| = \frac{1}{10}tr(A_G^5)$.

Lema 2.3. *Qualquer que seja o valor próprio λ da matriz de adjacência A_G ,*

$$-\Delta(G) \leq \lambda \leq \Delta(G).$$

Demonstração. Seja \hat{u} o vector próprio (que vamos supor de norma unitária) associado ao valor próprio λ e \hat{u}_i a componente de \hat{u} com maior valor absoluto, então vem que $|\lambda||\hat{u}_i| = |\lambda\hat{u}_i| = |\sum_{j \in N_G(i)} \hat{u}_j| \Leftrightarrow |\lambda| = |\sum_{j \in N_G(i)} \frac{\hat{u}_j}{|\hat{u}_i}||$. Logo,

$$|\lambda| \leq \sum_{j \in N_G(i)} \left| \frac{\hat{u}_j}{\hat{u}_i} \right| \leq \Delta(G). \quad (2.1)$$

\square

Teorema 2.4 (Collatz, Sinogowitz, 1957). *Seja \bar{d} o valor médio dos graus dos vértices de um grafo G . Então*

$$\bar{d} \leq \lambda_{max}(A_G), \quad (2.2)$$

e esta desigualdade verifica-se na forma de igualdade se e só se G é regular.

Demonstração. Como se sabe, uma vez que a matriz de adjacência de G é simétrica, o problema da determinação do maior valor do quociente de Rayleigh

$$R = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (2.3)$$

(com x_i tomando valores reais arbitrários não todos nulos) tem uma solução real. Fazendo $x_i = 1$, para $i = 1, \dots, n$, vem que $R = \bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_G(v_i)$, uma vez que $d_G(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}$. Logo, \bar{d} é um valor particular para R e, conseqüentemente, verifica a desigualdade (2.2).

Se G é regular então a desigualdade (2.2) verifica-se na forma de igualdade, uma vez que $\bar{d} \leq \lambda_{max}(A_G) \leq \Delta(G)$ e $\Delta(G) = \bar{d}$. Reciprocamente, supondo que a desigualdade (2.2) se verifica na forma de igualdade, considerando o vector \hat{e} (de componentes todas unitárias) no quociente (2.3), obtém-se $R = \bar{d}$. Logo, sendo $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n$ uma base ortonormal de \mathbb{R}^n formada por vectores próprios de A_G , existem escalares μ_1, \dots, μ_n tais que $\hat{e} = \sum_{j=1}^n \mu_j \hat{u}_j$ e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{(\sum_{j=1}^n \mu_j \hat{u}_j)^T A_G (\sum_{j=1}^n \mu_j \hat{u}_j)}{(\sum_{j=1}^n \mu_j \hat{u}_j)^T (\sum_{j=1}^n \mu_j \hat{u}_j)} \\ &= \frac{(\sum_{j=1}^n \mu_j \hat{u}_j)^T \sum_{j=1}^n \mu_j \lambda_j \hat{u}_j}{\sum_{j=1}^n \mu_j^2} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\mu_j^2}{\sum_{j=1}^n \mu_j^2} \lambda_j, \end{aligned}$$

donde, supondo que λ_1 tem multiplicidade k (ou seja, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k > \lambda_{k+1}$), se conclui que $\lambda_1 = (\sum_{j=1}^k \frac{\mu_j^2}{\sum_{j=1}^n \mu_j^2}) \lambda_1 + \sum_{j=k+1}^n \frac{\mu_j^2}{\sum_{j=1}^n \mu_j^2} \lambda_j$, ou seja, λ_1 é combinação linear convexa de $\lambda_1, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$. Assim, uma vez que $\lambda_1 > \lambda_{k+1} \geq \dots \geq \lambda_n$, vem que $\lambda_1 = (\sum_{j=1}^k \frac{\mu_j^2}{\sum_{j=1}^n \mu_j^2}) \lambda_1$ e $\sum_{j=1}^k \frac{\mu_j^2}{\sum_{j=1}^n \mu_j^2} = 1$. Logo, $\mu_{k+1} = \dots = \mu_n = 0$, pelo que o vector \hat{e} pertence ao subespaço invariante associado a λ_1 , ou seja, é vector próprio de A_G e, como consequência, G é regular. \square

Combinando a desigualdade $\delta(G) \leq \bar{d}$ com o Lema 2.3 e o Teorema 2.4, obtém-se

$$\delta(G) \leq \lambda_{max}(A_G) \leq \Delta(G). \quad (2.4)$$

Outra consequência do Teorema 2.4 é a desigualdade $\frac{1}{n} tr(A_G^2) \leq \lambda_{max}(A_G)$ que se verifica na forma de igualdade se e só se G é regular (com efeito, $\frac{1}{n} tr(A_G^2) = \bar{d}$).

Teorema 2.5. *Dado um grafo conexo G , se a matriz de adjacência de G tem r valores próprios distintos, então $diam(G) \leq r - 1$.*

Demonstração. Suponha que $diam(G) = d \geq r$ e sejam $u, v \in V(G)$ tais que $d_G(u, v) = diam(G)$. Sendo $A^k = [a_{ij}^{(k)}]$, vem que

1 $a_{uv}^{(k)} = 0$, para $k = 0, 1, \dots, d-1$,

2 $a_{uv}^{(d)} > 0$.

Porém, sendo $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, os valores próprios distintos de A_G , o seu polinómio característico tem a forma $p(A_G, x) = (\lambda_1 - x)^{n_1} \cdots (\lambda_r - x)^{n_r}$ e, consequentemente, escolhendo um conjunto de inteiros m_1, \dots, m_r , tais que $1 \leq m_1 \leq n_1, \dots, 1 \leq m_r \leq n_r$ e $m_1 + \dots + m_r = d$, podemos concluir que

$$q_{A_G}(x) = (\lambda_1 - x)^{m_1} \cdots (\lambda_r - x)^{m_r} = q_0 + q_1x + \cdots + q_{d-1}x^{d-1} + x^d.$$

Em tais condições, o polinómio mínimo de A_G divide $q_{A_G}(x)$ e, consequentemente,

$$q_{A_G}(A_G) = q_0I + q_1A_G + \cdots + q_{d-1}A_G^{d-1} + A_G^d,$$

donde, em particular,

$$0 + q_1a_{uv}^{(1)} + \cdots + a_{uv}^{(d-1)} + a_{uv}^{(d)} = 0,$$

o que contraria **1** e **2**. □

Antes do próximo teorema, convém lembrar que um grafo é bipartido se e só se não tem circuitos de comprimento ímpar.

Teorema 2.6. *Um grafo com pelo menos uma aresta é bipartido se e somente se o espectro da sua matriz de adjacência é simetricamente distribuído relativamente ao zero.*

Demonstração. Seja G um grafo bipartido e, sem perda de generalidade, suponha que a sua matriz de adjacência tem a forma $A_G = \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix}$. Seja λ um valor próprio de A_G e seja $\hat{u} = \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{pmatrix}$ um vector próprio associado. Então,

$$\begin{aligned} A_G \hat{u} = \lambda \hat{u} &\Leftrightarrow \begin{cases} A_1 \hat{u}_2 = \lambda \hat{u}_1, \\ A_2 \hat{u}_1 = \lambda \hat{u}_2, \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} A_1 \hat{u}_2 = (-\lambda)(-\hat{u}_1), \\ A_2(-\hat{u}_1) = (-\lambda)\hat{u}_2, \end{cases} \\ &\Leftrightarrow A_G \begin{pmatrix} -\hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{pmatrix} = (-\lambda) \begin{pmatrix} -\hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha-se que o espectro de A_G é simetricamente distribuído relativamente ao zero. Então, vem que $\text{tr}(A_G^{2k+1}) = \sum_{j=1}^n \lambda_j^{2k+1} = 0$, para $k = 0, 1, 2, \dots$. Logo, pelo Teorema 2.1, podemos concluir que o número de passeios fechados de comprimento ímpar em G é zero e, em particular, o número de ciclos de comprimento ímpar em G é também zero, pelo que G é bipartido. □

Dada uma matriz arbitrária A , com entradas reais ou complexas, quadrada, de ordem n (logo com n valores próprios) designa-se por *raio espectral* de A e denota-se por $\rho(A)$, o módulo do valor próprio de A de maior módulo, ou seja, $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$. No caso da matriz de adjacência de um grafo, podemos concluir um resultado que relaciona o raio espectral e o correspondente vector próprio com a conexidade do grafo. Antes, porém, convém introduzir o conceito irredutibilidade e o teorema de Perron-Frobenius.

Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ com índices linha e coluna indexados por um conjunto K diz-se *irredutível* quando não é possível encontrar um subconjunto próprio $S \subset K$ tal que $a_{ij} = 0$, para $i \in S$ e $j \in K \setminus S$. Caso contrário, a matriz A diz-se *redutível*. De um modo equivalente, diz-se que A é irredutível se e só se não é possível permutar, simultaneamente, linhas e colunas de modo a transformar A numa matriz da forma

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix},$$

onde B e D são matrizes quadradas. É claro que se A é a matriz de adjacência de um grafo G então A é irredutível se e só se G é conexo.

Teorema 2.7 (Perron-Frobenius). *Seja A uma matriz quadrada, irredutível, de ordem n com entradas não negativas. Então existe um vector próprio \hat{u} de componentes todas positivas e o correspondente valor próprio ρ é simples e tal que para qualquer valor próprio λ de A , $|\lambda| \leq \rho$.*

Agora, estamos em condições de introduzir o seguinte resultado:

Teorema 2.8. *Um grafo é conexo se e só se o seu raio espectral é um valor próprio simples cujo vector próprio associado tem as suas componentes todas positivas.*

Demonstração. Se G é um grafo conexo então A_G é irredutível e, consequentemente, pelo teorema de Frobenius, tem um valor próprio $\rho > 0$, simples, cujo vector próprio associado tem as suas componentes todas positivas e é tal que $|\lambda| \leq \rho$ qualquer que seja $\lambda \in \sigma(A_G) \setminus \{\rho\}$. Suponha-se que G não é conexo e que G_1, G_2, \dots, G_p são as suas componentes conexas cujas respectivas matrizes de adjacência são $A_{G_1}, A_{G_2}, \dots, A_{G_p}$. Então, uma vez que $\sigma(A_G) = \bigcup_{i=1}^k \sigma(A_{G_i})$ e os vectores próprios de A_{G_j} , com zeros nas entradas associadas aos vértices fora de $V(G_j)$, para $j = 1, \dots, p$, são vectores próprios de A_G , se

$$\rho = \max \sigma(A_{G_k}) = \max \sigma(A_G),$$

então o vector próprio de A_{G_k} associado ao valor próprio ρ , com zeros nas entradas associadas aos vértices fora de $V(G_k)$, é vector próprio de A_G associado a ρ . \square

2.2 Fórmula de Newton-Girard

Um polinómio $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$, nas variáveis x_1, x_2, \dots, x_n designa-se por *polinómio simétrico* ou *polinómio totalmente simétrico* se é invariante relativamente a qualquer permutação de índices das variáveis. Um conjunto especial de polinómios simétricos é o conjunto Π dos polinómios simétricos elementares (relativamente ao conjunto de variáveis $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$):

$$\begin{aligned}\Pi_0(x_1, \dots, x_n) &= 1, \\ \Pi_1(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n x_i, \\ \Pi_2(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i < j}^n x_i x_j, \\ &\vdots \\ \Pi_k(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}, \\ &\vdots \\ \Pi_n(x_1, \dots, x_n) &= \prod_{i=1}^n x_i, \\ \Pi_{n+j}(x_1, \dots, x_n) &= 0, \quad \text{para, } j = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Este conjunto Π constitui uma base para os polinómios simétricos que, naturalmente se podem exprimir como função dos polinómios simétricos elementares do conjunto Π . Uma outra base para os polinómios simétricos é o conjunto de polinómios simétricos elementares de potências \mathcal{S} :

$$\begin{aligned}S_1(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n x_i, \\ S_2(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n x_i^2, \\ &\vdots \\ S_k(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n x_i^k, \\ &\vdots \\ S_n(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n x_i^n.\end{aligned}$$

Por exemplo, expandindo o polinómio $\prod_{i=1}^n (x - x_i)$ (cujas raízes são x_1, x_2, \dots, x_n), obtém-se:

$$\prod_{i=1}^n (x - x_i) = x^n - \Pi_1 x^{n-1} + \Pi_2 x^{n-2} + \cdots + (-1)^n \Pi_n, \quad (2.5)$$

onde $\Pi_j = \Pi_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

O lema a seguir estabelece uma relação entre estes conjuntos de polinômios, através de uma fórmula conhecida por fórmula de Newton-Girard.

Lema 2.9 (Fórmula de Newton-Girard). *Denotando os polinômios simétricos elementares $\Pi_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ por Π_j , para $j = 0, 1, \dots$ e $S_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ por S_j , para $j = 1, 2, \dots$, é válida a seguinte fórmula que relaciona estes polinômios:*

$$\Pi_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{j=1}^k (-1)^{j+k} S_j \Pi_{k-j}, \quad (2.6)$$

Demonstração. Vamos fazer esta prova com recurso às séries formais de potências. Assim, considere-se o polinômio na variável z

$$\begin{aligned} f(z) &= \prod_{i=1}^n (1 - x_i z) \\ &= 1 - \Pi_1 z + \Pi_2 z^2 - \Pi_3 z^3 + \dots + (-1)^n \Pi_n z^n. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Aplicando logaritmos a ambos os membros da igualdade (2.7) e derivando em ordem a z , obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \sum_{i=1}^n \frac{-x_i}{1 - x_i z} \\ &= \sum_{i=1}^n (-x_i \sum_{j=0}^{\infty} (x_i z)^j) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-z^j \sum_{i=1}^n x_i^{j+1}) \\ &= - \sum_{j=0}^{\infty} S_{j+1} z^j, \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde $f'(z)$ denota a derivada de $f(z)$ em ordem a z , ou seja,

$$f'(z) = -\Pi_1 + 2\Pi_2 z - 3\Pi_3 z^2 + \dots + (-1)^n n \Pi_n z^{n-1}. \quad (2.9)$$

Logo, da igualdade (2.8), vem que

$$\begin{aligned} f'(z) &= -f(z)(S_1 + S_2 z + S_3 z^2 + \dots) \\ &= -(1 - \Pi_1 z + \Pi_2 z^2 + \dots + (-1)^n \Pi_n z^n)(S_1 + S_2 z + S_3 z^2 + \dots) \\ &= -S_1 + (-S_2 + \Pi_1 S_1)z + (-S_3 + \Pi_1 S_2 - \Pi_2 \Pi_1)z^2 + \dots. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Finalmente, tendo em conta (2.9) e (2.10), igualando os coeficientes associados à mesma potências em cada um dos membros da igualdade

$$-\Pi_1 + 2\Pi_2 z - 3\Pi_3 z^2 + \dots + (-1)^n n \Pi_n z^{n-1} = -S_1 + (S_1 \Pi_1 - S_2)z + (-S_1 \Pi_2 + \Pi_1 S_2 - S_3)z^2 + \dots, \quad (2.11)$$

obtêm-se

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= S_1, \\
\Pi_2 &= \frac{-1}{2}(-S_1\Pi_1 + S_2), \\
\Pi_3 &= \frac{1}{3}(S_1\Pi_2 - S_2\Pi_1 + S_3), \\
&\vdots \\
\Pi_k &= \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{j=1}^k (-1)^{j+k} S_j \Pi_{k-j}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

□

Tendo em conta o conhecimento que já temos relativamente aos valores de S_j , para $j = 1, 2, 3, 4$ e 5 , vem

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= (-1)^2 S_1 \Pi_0 = 0, \\
\Pi_2 &= \frac{-1}{2}((-1)^3 S_1 \Pi_1 + (-1)^4 S_2 \Pi_0) = \frac{-1}{2} S_2 = -|E(G)|, \\
\Pi_3 &= \frac{1}{3}((-1)^4 S_1 \Pi_2 + (-1)^5 S_2 \Pi_1 + (-1)^6 S_3 \Pi_0) = \frac{1}{3} S_3 = 2t, \\
\Pi_4 &= \frac{-1}{4}((-1)^5 S_1 \Pi_3 + (-1)^6 S_2 \Pi_2 + (-1)^7 S_3 \Pi_1 + (-1)^8 S_4 \Pi_0) \\
&= \frac{-1}{4}(S_2 \Pi_2 + S_4 \Pi_0) = \frac{-1}{4}(-2|E(G)|^2 + 8|\mathcal{C}_4| - 2|E(G)| + 2 \sum_{v \in V(G)} d_G^2(v)) \\
&= \frac{1}{2}|E(G)|(|E(G)| + 1) - \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} d_G^2(v) - 2|\mathcal{C}_4|, \\
\Pi_5 &= \frac{1}{5}((-1)^6 S_1 \Pi_4 + (-1)^7 S_2 \Pi_3 + (-1)^8 S_3 \Pi_2 + (-1)^9 S_4 \Pi_1 + (-1)^{10} S_5 \Pi_0) \\
&= \frac{1}{5}(-S_2 \Pi_3 + S_3 \Pi_2 + S_5) \\
&= \frac{1}{5}(-2|E(G)|2t - 6t|E(G)| + 10|\triangleright - | + 10|\mathcal{C}_5|) \\
&= 2(-|E(G)| + |\triangleright - | + |\mathcal{C}_5|).
\end{aligned}$$

Assim, podemos concluir que $|E(G)| = -\Pi_2$, $t = \frac{1}{2}\Pi_3$, $|\mathcal{C}_4| = \frac{1}{4}(\Pi_2(\Pi_2 - 1) - \frac{1}{4} \sum_{v \in V(G)} d_G^2(v))$ e se $g(G) > 3$ então $|\mathcal{C}_5| = \frac{1}{2}\Pi_5 - \frac{1}{2}\Pi_2$.

Tendo em conta que duas matrizes são *co-espectrais* quando têm os mesmos valores próprios, com recurso à fórmula de Newton-Girard, com facilidade se conclui o resultado que se segue.

Lema 2.10. *Dadas duas matrizes quadradas de ordem n , A e B , são equivalentes as seguintes afirmações:*

1. A e B são co-espectrais;
2. A e B têm o mesmo polinómios característico;
3. $\text{tr}(A^i) = \text{tr}(B^i)$, para $i = 1, \dots, n$.

Demonstração. Uma vez que a equivalência entre 1 e 2 é evidente, apenas vamos provar a equivalência entre 2 e 3. Se A e B têm o mesmo polinómios característico, então têm os mesmo valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ e, consequentemente, obtém-se 3 (uma vez que $\text{tr}(A^i) = \sum_{j=1}^n \lambda_j^i = \text{tr}(B^i)$, para $i = 1, \dots, n$). Reciprocamente, suponha-se que 3 se verifica e, de acordo com (2.5), sejam

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \lambda^n - \Pi_1^A \lambda^{n-1} + \Pi_2^A \lambda^{n-2} + \dots + (-1)^n \Pi_n^A \\ p_B(\lambda) &= \lambda^n - \Pi_1^B \lambda^{n-1} + \Pi_2^B \lambda^{n-2} + \dots + (-1)^n \Pi_n^B \end{aligned}$$

os polinómios característicos das matrizes A e B , respectivamente. Então, de acordo com a fórmula (2.6) e tendo em conta a hipótese (ou seja, $\text{tr}(A^i) = S_i = \text{tr}(B^i)$, para $i = 1, \dots, n$), vem que

$$\begin{aligned} \Pi_1^A &= \text{tr}(A) = S_1 = \text{tr}(B) = \Pi_1^B \\ \Pi_2^A &= \frac{(-1)^3}{2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+2} S_j \Pi_{2-j}^A \\ &= \frac{1}{2} (S_1 \Pi_1^A - S_2 \Pi_0^A) \\ &= \frac{1}{2} (S_1 \Pi_1^B - S_2 \Pi_0^B) \\ &= \Pi_2^B \\ &\vdots \\ \Pi_n^A &= \Pi_n^B. \end{aligned}$$

Logo, A e B têm o mesmo polinómio característico. \square

Se A é a matriz de adjacência de um grafo G , então $\text{tr}(A^i)$ é igual ao número de passeios fechados de comprimento i . Consequentemente, grafos co-espectrais têm o mesmo número de passeios fechados de comprimento i . Em particular, têm o mesmo número de arestas (que se obtém para $i = 2$), o mesmo número de triângulos (que se obtém para $i = 3$), o mesmo número determinado pela fórmula $8|\mathcal{C}_4| - 2 \sum_{v \in V(G)} d_G^2(v)$ (que se obtém para $i = 4$), etc.

2.3 Valores e vectores próprios

Se N é um grafo nulo, isto é, sem arestas, então $\forall \lambda \in \sigma(A_N) \quad \lambda = 0$, onde $\sigma(A_N)$ denota o espectro de A_N , ou seja, o conjunto dos seus valores próprios. Mais geralmente, qualquer que seja o grafo G , é claro que $\text{tr}(A_G) = \sum_{i=1}^n \lambda_i =$

0. No caso do grafo completo de ordem n , K_n , denotando o seu polinómio característico (ou seja, o polinómio característico da sua matriz de adjacência) por $p(K_n, \lambda)$, vem que

$$p(K_n, \lambda) = \det(A_{K_n} - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Logo, é claro que $-1 \in \sigma(A_{K_n})$. Por outro lado, $A_{K_n} \hat{e} = (n-1)\hat{e}$, onde \hat{e} denota o vector de componentes unitárias, pelo que $n-1 \in \sigma(A_{K_n})$. Com facilidade se conclui que os $n-1$ vectores, $\hat{e}_1 - \hat{e}_2, \hat{e}_1 - \hat{e}_3, \dots, \hat{e}_1 - \hat{e}_n$, são vectores próprios de A_{K_n} associados ao valor próprio -1 , pelo que podemos concluir que o subespaço invariante associado ao valor próprio -1 tem dimensão $n-1$ e, conseqüentemente, este valor próprio tem multiplicidade $n-1$. Assim, podemos concluir que K_n tem apenas dois valores próprios distintos ($n-1$) com multiplicidade 1 e -1 com multiplicidade $n-1$.

Teorema 2.11 (do entrelaçamento). *Seja A uma matriz quadrada, simétrica de ordem n , com valores próprios $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Então os valores próprios $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_m$ de uma submatriz principal de A verificam as desigualdades:*

$$\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{n-m+i}, \quad \text{para } i = 1, \dots, m.$$

Como consequência imediata deste teorema, denotando por $\lambda_{\min}(C)$ e $\lambda_{\max}(C)$ os valores próprios mínimos e máximos da matriz C , respectivamente, podemos concluir que, sendo H um subgrafo induzido G , vem que

$$\lambda_{\min}(A_G) \leq \lambda_{\min}(A_H) \leq \dots \leq \lambda_{\max}(A_H) \leq \lambda_{\max}(A_G). \quad (2.12)$$

Assim, supondo que G tem pelo menos uma aresta, ou seja, contém K_2 como subgrafo induzido, vem que

$$\lambda_{\min}(A_G) \leq -1 = \lambda_{\min}(A_{K_2}) \leq \lambda_{\max}(A_{K_2}) = 1 \leq \lambda_{\max}(A_G).$$

Adicionalmente, se G contém $K_{1,2}$ como subgrafo induzido, uma vez que

$$p(K_{1,2}, \lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda(-\lambda^2 + 2)$$

e, conseqüentemente, $\sigma(A_{K_{1,2}}) = \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$, podemos concluir que

$$\lambda_{\min}(A_G) \leq -\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \leq \lambda_{\max}(A_G).$$

Teorema 2.12. *Dado um grafo G , supondo que existem dois vértices $x, y \in V(G)$ tais que $N_G(x) \setminus \{y\} = N_G(y) \setminus \{x\}$, podemos concluir o seguinte:*

1. Se $xy \in E(G)$, então $-1 \in \sigma(A_G)$;
2. Se $xy \notin E(G)$, então $0 \in \sigma(A_G)$.

Demonstração. Suponha-se, sem perda de generalidade, que $x = v_1$, $y = v_2$ e $N_G(x) \setminus \{y\} = \{v_1, \dots, v_k\}$, então

$$A_G - \lambda I = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & \dots & v_k & v_{k+1} & \dots & v_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_k \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} -\lambda & z & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ z & -\lambda & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda & \dots & & & \dots & \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & & & -\lambda & & & \\ 0 & 0 & & & & -\lambda & & \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & & & & & -\lambda \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Assim, podemos tirar as seguintes conclusões:

1. Se $xy \in E(G)$, então $z = 1$ e, conseqüentemente, para $\lambda = -1$, as duas primeiras linhas de $A_G - \lambda I$, são iguais. Logo, $\det(A_G + I) = 0$, pelo que $-1 \in \sigma(A_G)$.
2. Se $xy \notin E(G)$, então $z = 0$ e, conseqüentemente, para $\lambda = 0$, as duas primeiras linhas de $A_G - \lambda I$, são iguais. Logo, $\det(A_G) = 0$, pelo que $0 \in \sigma(A_G)$.

□

Como corolário deste teorema, para os grafos bipartidos completos $K_{p,q}$, vem que $0 \in \sigma(A_{K_{p,q}})$. Por outro lado, dado um grafo G , se existem dois vértices $x, y \in V(G)$ tais que $N_G(x) = N_G(y)$, sendo \hat{u} um vector próprio de A_G , associado a um valor próprio λ , vem que

$$\lambda \hat{u}_x = (A_G \hat{u})_x = \sum_{j \in N_G(x)} \hat{u}_j = \sum_{i \in N_G(y)} \hat{u}_i = (A_G \hat{u})_y = \lambda \hat{u}_y.$$

Logo, $\lambda(\hat{u}_x - \hat{u}_y) = 0$, pelo que $\lambda \neq 0 \Rightarrow \hat{u}_x = \hat{u}_y$.

Voltando aos grafos bipartidos completos, podemos concluir o resultado a seguir.

Teorema 2.13. $\sigma(A_{K_{p,q}}) = \{-\sqrt{pq}, 0, \sqrt{pq}\}$.

Demonstração. Dado que a matriz de adjacência de $K_{p,q}$ tem característica 2, podemos concluir que existem apenas dois valores próprios não nulos de sinais contrários, λ_1 e λ_n , tais que $\lambda_1 = -\lambda_n$, com $n = p+q$. Adicionalmente, qualquer vector próprio \hat{u} , associado a um valor próprio não nulo λ , é tal que para todo o índice i , $\hat{u}_i \in \{y, z\}$. Como consequência, vem que $\lambda y = qz$ e $\lambda z = py$, donde $\lambda^2 zy = (pq)zy \Rightarrow \lambda^2 = pq$. □

Teorema 2.14. *Dado um grafo arbitrário G e o seu grafo-linha $L(G)$, então $\lambda_{\min}(A_{L(G)}) \geq -2$ e esta desigualdade verifica-se na forma de igualdade se e só se G contém um ciclo de comprimento par ou dois ciclos de comprimento ímpar na mesma componente conexa.*

Demonstração. Sendo B_G a matriz de incidência aresta vértice, vem

$$B_G^T B_G = 2I + A_{L(G)}.$$

Dado que $\forall x \in \mathbb{R}^n \ x^T B_G^T B_G x = \|B_G x\|^2 \geq 0$, podemos concluir que $2I + A_{L(G)}$ é semidefinida positiva e, conseqüentemente que $\lambda_{\min}(A_{L(G)}) \geq -2$. Supondo que G tem um ciclo comprimento par formado pelas arestas a_1, a_2, \dots, a_{2r} , aos quais correspondem as colunas de B_G , $\hat{b}_1, \hat{b}_2, \dots, \hat{b}_{2r}$, considerando o vector \hat{u} definido por $\hat{u} = -\hat{e}_{a_1} + (-1)^2 \hat{e}_{a_2} + \dots + (-1)^{2r-1} \hat{e}_{a_{2r-1}} + (-1)^{2r} \hat{e}_{a_{2r}}$, obtém-se

$$B_G^T B_G \hat{u} = B_G^T \sum_{j=1}^{2r} (-1)^j \hat{b}_j = B_G^T \hat{0} = 0.$$

Note-se que sendo $a_j = xy$ e $a_{j+1} = yz$,

$$(-1)^j \hat{b}_j + (-1)^{j+1} \hat{b}_{j+1} = \begin{cases} \hat{e}_x + \hat{e}_y - \hat{e}_y - \hat{e}_z = \hat{e}_x - \hat{e}_z, & \text{se } j \text{ é par;} \\ -\hat{e}_x - \hat{e}_y + \hat{e}_y + \hat{e}_z = -\hat{e}_x + \hat{e}_z, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, $\hat{u} \in \text{Ker}(2I - A_{L(G)})$ e, conseqüentemente, que é vector próprio de $A_{L(G)}$ associado ao valor próprio -2 . Idêntica conclusão se obtém na presença de dois ciclos de comprimento ímpar, considerando o vector definido por um passeio fechado de comprimento par obtido percorrendo cada um dos ciclos no caso de terem um vertice comum ou cada um dos ciclos mais duas vezes uma caminho que os ligue no caso contrário. \square

Dado um grafo G designa-se por *coloração dos vértices* de G com k cores, uma função sobrejectiva $c_k : V(G) \mapsto \{1, \dots, k\}$ tal que $ij \in E(G) \Rightarrow c(i) \neq c(j)$. A função c_k designa-se por função de coloração de vértices. Designa-se por *número cromático* de G e denota-se por $\chi(G)$ o menor k para o qual existe uma função de coloração de vértices c_k . Antes de prosseguirmos convém introduzir o seguinte conceito: um grafo G diz-se *k-crítico* se $\chi(G) = k$ e para todo o subgrafo induzido $H \neq G$, $\chi(H) < k$.

Lema 2.15. *Dado um grafo arbitrário G com número cromático $\chi(G) = k$, existe um subgrafo induzido H que é *k-crítico* e $\delta(H) \geq k - 1$.*

Demonstração. Seja Γ um subgrafo induzido de G com número cromático $\chi(\Gamma) = \chi(G) = k$ e que é um subgrafo minimal com estas propriedades, relativamente ao número de vértices. É claro que Γ é *k-crítico* e se $v \in V(\Gamma)$, então $\chi(G[V(\Gamma) \setminus \{v\}]) = k - 1$. Se $d_\Gamma(v) < k - 1$, então podemos estender qualquer coloração de $G[V(\Gamma) \setminus \{v\}]$ a Γ , o que contraria o facto de se ter $\chi(\Gamma) = k$. Logo, $d_\Gamma(v) \geq k - 1$. \square

Teorema 2.16. [41] Dado um grafo arbitrário G , verifica-se a desigualdade

$$\chi(G) \leq 1 + \lambda_{max}(A_G).$$

Demonstração. Tendo em conta o Lemma 2.15, existe um subgrafo induzido de G , H , talq ue $\chi(H) = \chi(G)$ e $\delta(H) \geq \chi(H) - 1$. Logo, tendo em conta (2.4) e (2.12),

$$\chi(H) \leq 1 + \delta(H) \leq 1 + \lambda_{max}(A_H) \leq 1 + \lambda_{max}(A_G).$$

□

Lema 2.17. Dada uma matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{pmatrix},$$

onde X e Y são submatrizes quadradas simétricas, verifica-se a desigualdade

$$\lambda_{max}(A) + \lambda_{min}(A) \leq \lambda_{max}(X) + \lambda_{max}(Z).$$

Demonstração. Seja $\lambda = \lambda_{min}(A)$ e seja $\epsilon > 0$. Então $A^* = A - (\lambda - \epsilon)I$ é uma matriz simétrica definida positiva, tal que

$$A^* = \begin{pmatrix} X^* & Y^* \\ Y^{*T} & Z^* \end{pmatrix},$$

com $X^* = X - (\lambda - \epsilon)I$, $Y^* = Y$ e $Z^* = Z - (\lambda - \epsilon)I$. Seja $[\hat{u}^T, \hat{v}^T]$ um vector próprio de A^* associado a $\lambda_{max}(A^*)$. Então, $\lambda_{max}(A^*) = \lambda_{max}(A) - (\lambda - \epsilon)$ e

$$\begin{aligned} \lambda_{max}(A^*) &= [\hat{u}^T, \hat{v}^T] A^* \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{bmatrix} \\ &= \hat{u}^T X^* \hat{u} + \hat{v}^T Z^* \hat{v} + 2\hat{u}^T Y^* \hat{v} \\ &\leq \lambda_{max}(X^*) + \lambda_{max}(Z^*) \\ &= \lambda_{max}(X) - (\lambda - \epsilon) + \lambda_{max}(Y) - (\lambda - \epsilon) \end{aligned}$$

donde se obtém $\lambda_{max}(A) + \lambda - \epsilon \leq \lambda_{max}(X) + \lambda_{max}(Y)$. Uma vez que esta desigualdade é válida para todo o $\epsilon > 0$, podemos concluir a desigualdade pretendida. □

Corolário 2.18. Seja A uma matriz real simétrica partida em t^2 submatrizes A_{ij} , de tal modo que cada submatriz A_{ii} , para $i = 1, \dots, t$, é quadrada. Então,

$$\lambda_{max}(A) + (t - 1)\lambda_{min}(A) \leq \sum_{i=1}^t \lambda_{max}(A_{ii}).$$

Demonstração. Vamos fazer a prova por indução sobre t , sabendo que, de acordo com o Lema 2.17, o resultado é verdadeiro para $t = 2$. Suponha que é o resultado se verifica para t tal que $2 \leq t \leq T - 1$ e admita-se uma partição de A em T^2 submatrizes A_{ij} tais que A_{ii} , para $i = 1, \dots, T$, são submatrizes quadradas. Seja B a submatriz que se obtém de A eliminando a última linha e a última coluna de submatrizes. Pelo Lema 2.17,

$$\lambda_{max}(A) + \lambda_{min}(A) \leq \lambda_{max}(B) + \lambda_{max}(A_{TT}) \quad (2.13)$$

e, por hipótese de indução, $\lambda_{max}(B) + (T - 2)\lambda_{min}(B) \leq \sum_{i=1}^{T-1} \lambda_{max}(A_{ii})$. Uma vez que $\lambda_{min}(A) \leq \lambda_{min}(B)$, adicionando $(T - 2)\lambda_{min}(A)$ ao lado esquerdo de (2.13) e $(T - 2)\lambda_{min}(B)$ ao lado direito, vem

$$\begin{aligned} \lambda_{max}(A) + (T - 1)\lambda_{min}(A) &\leq \lambda_{max}(B) + (T - 2)\lambda_{min}(B) + \lambda_{max}(A_{TT}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{T-1} \lambda_{max}(A_{ii}) + \lambda_{max}(A_{TT}) \\ &= \sum_{i=1}^T \lambda_{max}(A_{ii}) \end{aligned}$$

□

Teorema 2.19 (Hoffman, [26]). *Dado um grafo G com pelo menos uma aresta, verifica-se a desigualdade*

$$\chi(G) \geq 1 - \frac{\lambda_{max}(A_G)}{\lambda_{min}(A_G)}.$$

Demonstração. Sendo $\chi(G) = t$, sem perda de generalidade, podemos reordenar os vértices de G de tal forma que A_G tem t submatrizes nulas quadradas A_{ii} , para $i = 1, \dots, t$, ao longo da sua diagonal principal. Uma vez que $\lambda_{max}(A_G) + (t - 1)\lambda_{min}(A_G) \leq \sum_{i=1}^t \lambda_{max}(A_{ii})$, podemos concluir que

$$\lambda_{max}(A_G) + (t - 1)\lambda_{min}(A_G) \leq 0. \quad (2.14)$$

Consequentemente, dado que $\lambda_{min}(A_G) < 0$, tendo em conta (2.14), obtém-se

$$t - 1 \geq -\frac{\lambda_{max}(A_G)}{\lambda_{min}(A_G)}.$$

□

Como consequência deste resultado, tendo em conta que o teorema das 4 cores implica que os *grafos planares*, ou seja, os grafos que se podem representar num plano sem que as arestas se cruzem, têm um número cromático não superior a 4, podemos concluir que se G é um grafo planar, então

$$1 - \frac{\lambda_{max}(A_G)}{\lambda_{min}(A_G)} \leq 4 \Leftrightarrow \lambda_{max}(A_G) \leq -3\lambda_{min}(A_G).$$

3

Extensões da abordagem de Motzkin-Straus

3.1 A formulação quadrática do número de clique

Dado um grafo arbitrário G , Motzkin e Straus em [30] formularam o programa quadrático

$$f(G) = \max\left\{\frac{1}{2}x^T A_G x : x \in \Delta\right\}, \quad (3.1)$$

onde $\Delta = \{x \geq 0 : \hat{e}^T x = 1\}$, cujo valor óptimo está directamente relacionado com o número de clique $\omega(G)$. O teorema a seguir estabelece, precisamente, esta relação.

Teorema 3.1. [30] Dado um grafo G , cujo número de clique é $\omega(G)$,

$$f(G) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\omega(G)}\right).$$

Demonstração. Seja G um grafo de ordem n e, sem perda de generalidade, suponha que os índices $1, 2, \dots, k$ se referem a vértices que constituem uma clique máxima. Se $x^* \in \Delta$ é tal que $x_1^* = \dots = x_k^* = \frac{1}{k}$ e $x_{k+1}^* = \dots = x_n^* = 0$, então

$$\frac{1}{2}x^{*T} A_G x^* = \sum_{ij \in E(G)} x_i^* x_j^* = \binom{k}{2} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{k}\right),$$

onde $ij = ji$, ou seja,

$$f(G) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\omega(G)}\right). \quad (3.2)$$

A prova da desigualdade recíproca de (3.2) vai ser feita por indução sobre n , tendo em conta que, para $n = 1$, se obtém $k = 1$ e $f(G) = 0$. Supondo que a desigualdade

$$f(G) \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\omega(G)}\right) \quad (3.3)$$

é válida para grafos com menos do que n vértices, com $n > 1$, fazendo $F(x) = \frac{1}{2}x^T A_G x$, vamos considerar dois casos:

1. Se o $\max_{x \in \Delta} F(x)$ é atingido num ponto x^* da fronteira do simplex Δ , então $\exists j$ tal que $x_j^* = 0$ e, conseqüentemente, $f(G) = f(G - \{j\})$. Logo, por hipótese de indução,

$$f(G) = f(G - \{j\}) \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\omega(G - \{j\})}\right) \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\omega(G)}\right),$$

uma vez que $\omega(G - \{j\}) \leq \omega(G)$.

2. Se o $\max_{x \in \Delta} F(x)$ é atingido no interior relativo do simplex Δ , ou seja, num ponto x^* cujas componentes são todas positivas, então a função $\varphi(x) = \frac{F(x)}{(\sum_{j=1}^n x_j)^2}$ atinge também o seu máximo no interior do ortante não negativo,¹ mais particularmente em x^* , pelo que $\nabla \varphi(x^*) = 0$. Nestas condições, vamos considerar dois subcasos:

- (a) Suponha que o grafo G não é completo e considere-se a equação $\nabla \varphi(x) = 0$, a partir da qual, cada uma das derivadas parciais em ordem a x_i , para $i = 1, \dots, n$, determina as equações

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^n x_j\right)^2 \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} - 2 \left(\sum_{j=1}^n x_j\right) F(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} = \frac{2F(x)}{\sum_{j=1}^n x_j}.$$

Conseqüentemente, $\frac{\partial F(x)}{\partial x_i} \Big|_{x=x^*} = 2F(x^*)$, para $i = 1, \dots, n$.

Suponha, sem perda de generalidade, que a aresta 12 não pertence a $E(G)$. Logo, qualquer que seja a constante c ,

$$F(x_1^* - c, x_2^* + c, x_3^*, \dots, x_n^*) = F(x^*) - c \left(\frac{\partial F(x)}{\partial x_1} \Big|_{x=x^*} - \frac{\partial F(x)}{\partial x_2} \Big|_{x=x^*} \right) = F(x^*).$$

Em particular, para $c = x_1^*$, $F(0, x_1^* + x_2^*, x_3^*, \dots, x_n^*) = F(x^*)$, ou seja, o máximo é também atingido na fronteira, pelo que, tal como se provou anteriormente, a desigualdade (3.3) verifica-se.

¹Uma vez que $\forall x \in \Delta$ $\varphi(x) = F(x)$, podemos concluir que $\max_{x \in \Delta} F(x) \leq \max_{x \geq 0} \varphi(x)$. Por outro lado, dado que $\forall \lambda > 0$ $\varphi(\lambda x) = \frac{F(\lambda x)}{(\sum_{j=1}^n \lambda x_j)^2} = \frac{\lambda^2 F(x)}{\lambda^2 (\sum_{j=1}^n x_j)^2} = \varphi(x)$, se $\max_{x \geq 0} \varphi(x) = \varphi(x')$, então existe $\lambda' > 0$ tal que $\lambda' x' \in \Delta$ e

$$F(\lambda' x') = \varphi(\lambda' x') = \varphi(x') \geq \max_{x \in \Delta} F(x).$$

Conseqüentemente, podemos considerar $x^* = \lambda' x'$.

(b) Se o grafo G é completo, então

$$\begin{aligned}
F(x^*) &= \frac{1}{2}[(\sum_{j=1}^n x_j^*)^2 - \sum_{j=1}^n x_j^{*2}] \\
&= \frac{1}{2}(1 - \|x^*\|^2) \\
&\leq \frac{1}{2}(1 - \min_{|x_1|+\dots+|x_n|=n} \|x\|^2) \\
&= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n}).
\end{aligned}$$

□

Considerando um grafo de ordem n e dimensão m , no programa quadrático do Teorema 3.1, e fazendo $x_i = 1/n$, para $i = 1, \dots, n$, obtém-se

$$1 - \frac{1}{\omega(G)} \geq \frac{2m}{n^2},$$

donde, no caso particular de grafos sem triângulos, se obtém a desigualdade determinada pelo Teorema de Turan, $m \leq \frac{n^2}{4}$. Alternativamente, dado um grafo G de ordem n , sendo \hat{u} o vector próprio de A_G associado a $\lambda_{max}(A_G)$ (logo, com componentes não negativas) que se supõe de norma unitária, considerando $\hat{x} = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \hat{u}_j} \hat{u}$ no programa quadrático de Motzkin-Straus (note-se que $\hat{x} \in \Delta$) podemos concluir a desigualdade de Wilf [42]

$$\omega(G) \geq \frac{(\sum_{j=1}^n \hat{u}_j)^2}{(\sum_{j=1}^n \hat{u}_j)^2 - \lambda_{max}(A_G)}. \quad (3.4)$$

Com efeito, $\frac{1}{2} \hat{x}^T A_G \hat{x} = \frac{1}{2(\sum_{j=1}^n \hat{u}_j)^2} \hat{u}^T A_G \hat{u} = \frac{\lambda_{max}(A_G)}{2(\sum_{j=1}^n \hat{u}_j)^2} \leq \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\omega(G)})$, donde decorre (3.4). Adicionalmente, tendo em conta que $(\sum_{j=1}^n \hat{u}_j)^2 \leq n$ (dado que $(\hat{e}^T \hat{u})^2 \leq \|\hat{e}\|^2 \|\hat{u}\|^2 = n$), obtém-se $\frac{\lambda_{max}(A_G)}{(\sum_{j=1}^n \hat{u}_j)^2} \geq \frac{\lambda_{max}(A_G)}{n}$ e, conseqüentemente, $1 - \frac{1}{\omega(G)} \geq \frac{\lambda_{max}(A_G)}{n} \Leftrightarrow \omega(G) \geq \frac{n}{n - \lambda_{max}(A_G)}$. Assim, uma vez que $\chi(G) \geq \omega(G)$, obtém-se a desigualdade de Cvetkovic [13],

$$\chi(G) \geq \frac{n}{n - \lambda_{max}(A_G)}. \quad (3.5)$$

Tendo em conta a formulação quadrática de Motzkin-Straus, deve observar-

-se que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\omega(G)}\right) &= \max_{x \in \Delta} \frac{1}{2} x^T A_G x \\
&= \max_{x \in \Delta} \sum_{ij \in E(G)} x_i x_j \\
&= \max_{x \in \Delta} \sum_{ij \in E(K_n)} x_i x_j - \sum_{rs \in E(\bar{G})} x_r x_s \\
&= \max_{x \in \Delta} \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{j=1}^n x_j \right)^2 - \|x\|^2 \right] - \sum_{rs \in E(\bar{G})} x_r x_s \\
&= \max_{x \in \Delta} \frac{1}{2} (1 - \|x\|^2 - x^T A_{\bar{G}} x) \\
&= \frac{1}{2} + \max_{x \in \Delta} -\frac{1}{2} x^T (I + A_{\bar{G}}) x \\
&= \frac{1}{2} - \min_{x \in \Delta} \frac{1}{2} x^T (I + A_{\bar{G}}) x.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\min_{x \in \Delta} x^T (A_{\bar{G}} + I) x = \frac{1}{\omega(G)} \Leftrightarrow \min_{x \in \Delta} x^T (A_{\bar{G}} + I) x = \frac{1}{\alpha(G)}$$

Nestas condições, podemos concluir que a formulação quadrática de Motzkin-Straus para a determinação do número de clique do complementar \bar{G} de um grafo G é equivalente à formulação quadrática para a determinação do número de estabilidade de G , ou seja,

$$\frac{1}{\alpha(G)} = \min_{x \in \Delta} x^T (A_G + I) x. \quad (3.6)$$

No que segue, vamos abordar uma família de formulações quadráticas, relativamente à qual, como veremos mais tarde, a formulação (3.6) é um caso particular. Assim, considere-se o programa quadrático

$$(P_G(\tau)) \quad v_G(\tau) = \max \left\{ 2\hat{e}^T x - x^T \left(\frac{1}{\tau} A_G + I_n \right) x : x \geq 0 \right\},$$

com $\tau > 0$. Então podemos concluir o seguinte resultado que também decorre do Teorema 5 publicado em [9].

Teorema 3.2 ([12]). *Considere-se o programa quadrático*

$$(Q_G(\tau)) \quad \nu_G(\tau) = \min \left\{ z^T \left(\frac{A_G}{\tau} + I_n \right) z : \hat{e}^T z = 1, z \geq 0 \right\},$$

com $\tau > 0$, e sejam x^* e z^* soluções ótimas para $P_G(\tau)$ e $Q_G(\tau)$, respectivamente. Então $\frac{z^*}{\nu_G(\tau)}$ e $\frac{x^*}{v_G(\tau)}$ são soluções ótimas para $P_G(\tau)$ e $Q_G(\tau)$, respectivamente, e $v_G(\tau) = \frac{1}{\nu_G(\tau)}$.

Demonstração. Da optimalidade de x^* para $P_G(\tau)$, pelas condições de Karush-Khun-Tucker, $\exists y^* \geq 0$ tal que

$$A_G x^* = \tau(\hat{e} - x^*) + y^*, \quad (3.7)$$

$$x^{*T} y^* = 0. \quad (3.8)$$

Então $x^{*T}(\frac{A_G}{\tau} + I_n)x^* = \hat{e}^T x^* = v_G(\tau)$ e, conseqüentemente,

$$\frac{1}{v_G(\tau)} = \frac{x^{*T}}{v_G(\tau)} \left(\frac{A_G}{\tau} + I_n \right) \frac{x^*}{v_G(\tau)}.$$

Por outro lado, tendo em atenção que $\frac{x^*}{v_G(\tau)}$ é admissível para $(Q_G(\tau))$, da optimalidade de z^* para $(Q_G(\tau))$, vem que

$$z^{*T} \left(\frac{A_G}{\tau} + I_n \right) z^* \leq \frac{x^{*T}}{v_G(\tau)} \left(\frac{A_G}{\tau} + I_n \right) \frac{x^*}{v_G(\tau)}.$$

Logo,

$$v_G(\tau) z^{*T} \left(\frac{A_G}{\tau} + I_n \right) v_G(\tau) z^* \leq x^{*T} \left(\frac{A_G}{\tau} + I_n \right) x^*$$

\Downarrow

$$v_G(\tau) = 2\hat{e}^T x^* - x^{*T} \left(\frac{A_G}{\tau} + I_n \right) x^* \leq 2\hat{e}^T (v_G(\tau) z^*) - (v_G(\tau) z^*)^T \left(\frac{A_G}{\tau} + I_n \right) (v_G(\tau) z^*),$$

uma vez que $\hat{e}^T x^* = v_G(\tau)$ e $\hat{e}^T z^* = 1$. Conseqüentemente, $v_G(\tau) z^*$ é uma solução óptima para $(P_G(\tau))$ e $v_G(\tau) = (v_G(\tau))^2 z^{*T} \left(\frac{A_G}{\tau} + I_n \right) z^* \Leftrightarrow v_G(\tau) = \frac{1}{v_G(\tau)}$. A partir da última igualdade, também concluímos que $\frac{z^*}{v_G(\tau)}$ é uma solução óptima para $(P_G(\tau))$. Por outro lado, a optimalidade de x^* para $(P_G(\tau))$ implica

$$v_G(\tau) = 2\hat{e}^T x^* - x^{*T} \left(\frac{A_G}{\tau} + I_n \right) x^* \geq 2\hat{e}^T (v_G(\tau) z^*) - (v_G(\tau) z^*)^T \left(\frac{A_G}{\tau} + I_n \right) (v_G(\tau) z^*).$$

Uma vez que $\hat{e}^T x^* = \hat{e}^T (v_G(\tau) z^*)$, vem que

$$(v_G(\tau) z^*)^T \left(\frac{A_G}{\tau} + I_n \right) (v_G(\tau) z^*) \geq x^{*T} \left(\frac{A_G}{\tau} + I_n \right) x^* = v_G(\tau)$$

\Downarrow

$$v_G(\tau) = z^{*T} \left(\frac{A_G}{\tau} + I_n \right) z^* \geq \frac{x^{*T}}{v_G(\tau)} \left(\frac{A_G}{\tau} + I_n \right) \frac{x^*}{v_G(\tau)} = \frac{1}{v_G(\tau)}.$$

□

Tendo em conta a igualdade (3.6), sabe-se que

$$\frac{1}{\min\{z^T (A_G + I_n) z : \hat{e}^T z = 1, z \geq 0\}} = \alpha(G). \quad (3.9)$$

Logo, combinando este resultado com o Teorema 3.2, obtém-se a igualdade

$$v_G(1) = \frac{1}{v_G(1)} = \alpha(G).$$

Se x^* é uma solução óptima para $(P_G(\tau))$, com $\tau \geq 1$, então

$$2\hat{e}^T x^* - x^{*T}(A_G + I_n)x^* \leq v_G(1) = \alpha(G) \leq v_G(\tau)$$

e, uma vez que $v_G(\tau) = \hat{e}^T x^*$ e $x^{*T}A_G x^* = \tau(v_G(\tau) - \|x^*\|^2)$, obtém-se também um minorante para o número de estabilidade de G , ou seja,

$$v_G(\tau) - \frac{\tau - 1}{\tau} x^{*T}A_G x^* \leq \alpha(G) \leq v_G(\tau).$$

3.2 Resultados adicionais

Dada uma matriz quadrada simétrica A com pelo menos um valor próprio negativo, vamos considerar a função quadrática $f_{A;\tau} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f_{A;\tau}(x) = 2\hat{e}^T x - x^T \left(\frac{A}{\tau} + I \right) x \quad (3.10)$$

que é uma função côncava para $\tau \geq -\lambda_{\min}(A)$, uma vez que a matriz hessiana de $f_{A;\tau}(x)$, $-\left(\frac{A}{\tau} + I\right)$, é semidefinida negativa para $\tau \geq -\lambda_{\min}(A)$. Adicionalmente, dado que, sendo x o vector característico de um estável máximo de G , $f_{A;\tau}(x) = \alpha(G) \quad \forall \tau > 0$, podemos concluir que $\forall \tau > 0$

$$\alpha(G) \leq \max_{x \geq 0} f_{A;\tau}(x) \quad (3.11)$$

$$\leq \max f_{A;\tau}(x). \quad (3.12)$$

Teorema 3.3. *Dada uma matriz quadrada simétrica A com pelo menos um valor próprio não nulo λ , o sistema*

$$\left(\frac{A}{-\lambda} + I \right) x = \hat{e} \quad (3.13)$$

tem solução se e somente se o subespaço próprio de A associado a λ é ortogonal a \hat{e} .

Demonstração. Suponha que o sistema de equações (3.13) tem uma solução \bar{x} . Se \hat{u} pertence ao subespaço próprio de A associado a λ , então $\hat{u}^T \hat{e} = \hat{u}^T \left(\frac{A}{-\lambda} + I \right) \bar{x} = 0$. Logo, o subespaço próprio de A associado a λ é ortogonal a \hat{e} .

Reciprocamente, suponha que o subespaço próprio de A associado a λ é ortogonal a \hat{e} , que $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_{n-k} = \dots = \lambda_{n-(k+p-1)} < \lambda_{n-(k+p)} \leq \dots \leq \lambda_1$ são os n valores próprios de A (onde, $1 \leq k+p \leq n-1$ e $\lambda = \lambda_{n-k} = \dots = \lambda_{n-(k+p-1)}$) e, adicionalmente, suponha que $\hat{u}_n, \dots, \hat{u}_{n-k}, \dots, \hat{u}_{n-(k+p-1)}, \hat{u}_{n-(k+p)}, \dots, \hat{u}_1$ são os correspondentes vectores próprios. É claro que estes vectores próprios

são também vectores próprios de $(\frac{A}{-\lambda} + I)$, aos quais correspondem os valores próprios

$$\frac{\lambda_n}{-\lambda} + 1 \leq \dots \leq \frac{\lambda_{n-k}}{-\lambda} + 1 = \dots = \frac{\lambda_{n-(k+p-1)}}{-\lambda} + 1 < \frac{\lambda_{n-(k+p)}}{-\lambda} + 1 \leq \dots \leq \frac{\lambda_1}{-\lambda} + 1.$$

Tendo em conta que estes vectores próprios geram \mathbb{R}^n , existem escalares $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, tais que $\hat{e} = \sum_{j=1}^n \gamma_j \hat{u}_j$ e, dado que os vectores $\hat{u}_{n-k}, \dots, \hat{u}_{n-(k+p-1)}$ são ortogonais a \hat{e} , $\gamma_{n-k} = \dots = \gamma_{n-(k+p-1)} = 0$, $\hat{e} = \sum_{j=1}^{n-(k+p)} \gamma_j \hat{u}_j + \sum_{j=n-s}^n \gamma_j \hat{u}_j$, com $s = \max\{0, k-1\}$. Logo, fazendo $\bar{x} = \sum_{j=1}^{n-(k+p)} \frac{-\lambda}{\lambda_j - \lambda} \gamma_j \hat{u}_j + \sum_{j=n-s}^n \frac{-\lambda}{\lambda_j - \lambda} \gamma_j \hat{u}_j$, vem

$$\begin{aligned} \left(\frac{A}{-\lambda} + I\right)\bar{x} &= \sum_{j=1}^{n-(k+p)} \frac{-\lambda}{\lambda_j - \lambda} \gamma_j \left(\frac{A}{-\lambda} + I\right)\hat{u}_j + \sum_{j=n-s}^n \frac{-\lambda}{\lambda_j - \lambda} \gamma_j \left(\frac{A}{-\lambda} + I\right)\hat{u}_j \\ &= \sum_{j=1}^{n-(k+p)} \frac{-\lambda}{\lambda_j - \lambda} \gamma_j \frac{\lambda_j - \lambda}{-\lambda} \hat{u}_j + \sum_{j=n-s}^n \frac{-\lambda}{\lambda_j - \lambda} \gamma_j \frac{\lambda_j - \lambda}{-\lambda} \hat{u}_j \\ &= \sum_{j=1}^{n-(k+p)} \gamma_j \hat{u}_j + \sum_{j=n-s}^n \gamma_j \hat{u}_j \\ &= \hat{e}. \end{aligned}$$

□

Assim, no caso particular da matriz de adjacência de um grafo, A_G , podemos afirmar que o subespaço próprio associado a $\lambda \in \sigma(A_G)$ é ortogonal a \hat{e} se e somente se o sistema $(\frac{A_G}{-\lambda} + I)x = \hat{e}$ tem solução.

Corolário 3.4. *Seja G um grafo tal que $\lambda_n = \lambda_{\min}(A_G)$ tem multimplicidade p e sejam \hat{u}_j , para $j = 1, \dots, n$, os vectores próprios de A_G associados, respectivamente, aos valores próprios λ_j , para $j = 1, \dots, n$. Se $\varepsilon(A_G, \lambda_n)$ é ortogonal a \hat{e} , então*

$$\alpha(G) \leq \sum_{j=1}^{n-p} \frac{-\lambda_n}{-\lambda_n + \lambda_j} (\hat{e}^T \hat{u}_j)^2.$$

Demonstração. Tendo em conta que uma solução do sistema

$$\left(\frac{A_G}{-\lambda_n} + I\right)x = \hat{e} \tag{3.14}$$

é um ponto crítico da função quadrática côncava $f_{A_G, -\lambda_n}(x)$ e que o máximo desta função é um majorante para $\alpha(G)$, podemos concluir que sendo x uma solução do sistema (3.14),

$$\alpha(G) \leq \hat{e}^T x.$$

Sendo $\hat{e} = \sum_{i=1}^n \gamma_i \hat{u}_i$, uma vez que $\varepsilon(A_G, \lambda_n)$ é ortogonal a \hat{e} e λ_n tem multimplicidade p , $\gamma_{n-p+1} = \gamma_{n-p+2} = \dots = \gamma_n = 0$ e, conseqüentemente, $\hat{e} =$

$\sum_{i=1}^{n-p} \gamma_i \hat{u}_i \Leftrightarrow \hat{e} = U\hat{\gamma} \Leftrightarrow \hat{\gamma} = U^T \hat{e}$, onde $\hat{\gamma}$ é o vector de componentes γ_i , para $i = 1, \dots, n$ e U é a matriz cujas colunas são os vectores próprios \hat{u}_i , para $i = 1, \dots, n$, os quais vamos supor ortonormais. Fazendo

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^{n-p} \frac{-\lambda_n}{-\lambda_n + \lambda_j} \gamma_j \hat{u}_j \\ &= U \text{diag}\left(\frac{-\lambda_n}{-\lambda + \lambda_1}, \dots, \frac{-\lambda_n}{-\lambda + \lambda_{n-p}}, 0, \dots, 0\right) \hat{\gamma} \\ &= U \text{diag}\left(\frac{-\lambda_n}{-\lambda + \lambda_1}, \dots, \frac{-\lambda_n}{-\lambda + \lambda_{n-p}}, 0, \dots, 0\right) U^T \hat{e}, \end{aligned}$$

vem

$$\begin{aligned} \left(\frac{A}{-\lambda_n} + I\right)x &= \sum_{j=1}^{n-p} \frac{-\lambda_n}{-\lambda_n + \lambda_j} \gamma_j \left(\frac{A}{-\lambda_n} + I\right) \hat{u}_j \\ &= \sum_{j=1}^{n-p} \frac{-\lambda_n}{-\lambda_n + \lambda_j} \gamma_j \frac{-\lambda_n + \lambda_j}{\lambda_j} \hat{u}_j \\ &= \sum_{j=1}^{n-p} \gamma_j \hat{u}_j \\ &= U\hat{\gamma} \\ &= \hat{e}, \end{aligned}$$

Logo, $x = U \text{diag}\left(\frac{-\lambda_n}{-\lambda + \lambda_1}, \dots, \frac{-\lambda_n}{-\lambda + \lambda_{n-p}}, 0, \dots, 0\right) U^T \hat{e}$ é solução do sistema (3.14) e $\hat{e}^T x = \hat{e}^T U \text{diag}\left(\frac{-\lambda_n}{-\lambda + \lambda_1}, \dots, \frac{-\lambda_n}{-\lambda + \lambda_{n-p}}, 0, \dots, 0\right) U^T \hat{e} = \sum_{j=1}^{n-p} \frac{-\lambda_n}{-\lambda_n + \lambda_j} (\hat{e}^T \hat{u}_j)^2$, donde

$$\alpha(G) \leq \sum_{j=1}^{n-p} \frac{-\lambda_n}{-\lambda_n + \lambda_j} (\hat{e}^T \hat{u}_j)^2.$$

□

De agora em diante, dado um grafo arbitrário G , \bar{G} denota o grafo complementar de G e, sendo λ um valor próprio de A_G , $\varepsilon(A_G, \lambda)$ denota o correspondente subespaço próprio.

Teorema 3.5. *Seja G um grafo de ordem n e λ um valor próprio da sua matriz de adjacência, A_G , com multiplicidade $m(\lambda)$. Se $m(\lambda) > 1$, então existe um vector próprio $\hat{u} \in \varepsilon(A_G, \lambda)$ tal que $\hat{e}^T \hat{u} = 0$.*

Demonstração. Uma vez que $\dim(\text{Ker}(A_G - \lambda I)) + \dim(\text{Im}(A_G - \lambda I)) = n$ e $\dim(\text{Ker}(A_G - \lambda I)) \geq 2$, podemos concluir que $\text{rank}(A_G - \lambda I) \leq n - 2$, ou seja, $A_G - \lambda I$ tem no máximo $n - 2$ linhas (colunas) linearmente independentes. Logo, a matriz $[A_G - \lambda I, \hat{e}]$ tem no máximo $n - 1$ linhas (colunas) linearmente

independentes. Consequentemente, existe $y \neq 0$ tal que $y^T[A_G - \lambda I, \hat{e}] = 0$, donde se obtém:

$$y^T A_G = \lambda y^T \text{ e } y^T \hat{e} = 0,$$

ou seja, o vector $y \in \varepsilon(G, \lambda)$ é ortogonal a \hat{e} . \square

Com base neste teorema, podemos concluir que se $\varepsilon(A_G, \lambda) \cap \hat{e}^\perp = \emptyset$, então λ é um valor próprio simples e, consequentemente, o respectivo subespaço próprio é unidimensional.

Seja G um grafo de ordem n e $J = A_G + A_{\bar{G}} + I$. Os vectores próprios de J são $\hat{e}_1 - \hat{e}_j$, para $j = 2, \dots, n$ e \hat{e} . Sendo \hat{u} um vector próprio de A_G associado ao valor próprio $\lambda \neq -1$, existem escalares β_1, \dots, β_n tais que

$$\hat{u} = \beta_1 \hat{e} + \sum_{j=2}^n \beta_j (\hat{e}_1 - \hat{e}_j) = \beta_1 \hat{e} + \left(\sum_{j=2}^n \beta_j \right) \hat{e}_1 - \sum_{j=2}^n \beta_j \hat{e}_j,$$

donde decorrem as igualdades:

$$\begin{aligned} \beta_n &= \beta_1 - \hat{u}_n \\ \beta_{n-1} &= \beta_1 - \hat{u}_{n-1} \\ &\vdots \\ \beta_2 &= \beta_1 - \hat{u}_2 \\ \beta_1 &= \hat{u}_1 - \sum_{j=2}^n \beta_j, \end{aligned}$$

e, consequentemente, $\beta_1 = \hat{u}_1 - (n-1)\beta_1 + \sum_{j=2}^n \hat{u}_j \Leftrightarrow n\beta_1 = \hat{e}^T \hat{u}$. Logo, supondo $\beta_1 \neq 0$,

$$\begin{aligned} J\hat{u} = n\beta_1 \hat{e} &\Leftrightarrow (\lambda + 1)\hat{u} + A_{\bar{G}}\hat{u} = n\beta_1 \hat{e} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{A_{\bar{G}}}{\lambda + 1} + I \right) \hat{u} = \frac{n\beta_1}{\lambda + 1} \hat{e} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{A_{\bar{G}}}{\lambda + 1} + I \right) \left(\frac{\lambda + 1}{\hat{e}^T \hat{u}} \hat{u} \right) = \hat{e}. \end{aligned}$$

Teorema 3.6. *Dado um grafo G , se $\lambda \in \sigma(A_G)$, então são verdadeiras as seguintes proposições:*

1. *Se $\lambda \neq -1$ e $\exists \hat{u} \in \varepsilon(A_G, \lambda) \setminus \hat{e}^\perp$, então $\frac{\lambda+1}{\hat{e}^T \hat{u}} \hat{u}$ é ponto crítico da função quadrática $f_{A_{\bar{G}}; \lambda+1}$ (ou seja, é solução do sistema $\nabla f_{A_{\bar{G}}; \lambda+1}(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{A_{\bar{G}}}{\lambda+1} + I \right) x = \hat{e}$).*
2. *Se $E(G, \lambda) \cap \hat{e}^\perp \neq \emptyset$, então $-(\lambda + 1) \in \sigma(A_{\bar{G}})$.*

Demonstração. Uma vez que a primeira parte decorre directamente da análise anterior, apena vamos provar a segunda. Assim, sendo $\varepsilon(A_G, \lambda) \cap \hat{e}^\perp \neq \emptyset$, existe $\hat{v} \in \varepsilon(A_G, \lambda)$ tal que $\hat{e}^T \hat{v} = 0$ e

$$(A_G + A_{\bar{G}} + I)\hat{v} = 0 \Leftrightarrow A_{\bar{G}}\hat{v} = -(A_G + I)\hat{v} \quad (3.15)$$

$$\Leftrightarrow A_{\bar{G}}\hat{v} = -(\lambda + 1)\hat{v}. \quad (3.16)$$

□

Como consequência do Teorema 3.6, podemos concluir que se G é um grafo k -regular de ordem n cujos valores próprios da matriz de adjacência, A_G , são $k = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, então, denotando os valores próprios da matriz de adjacência do grafo complementar \bar{G} por $n - 1 - k = \bar{\lambda}_1 \geq \bar{\lambda}_2 \geq \dots \geq \bar{\lambda}_n$,

$$\bar{\lambda}_i = -(\lambda_{n+2-i} + 1), \text{ para } i = 2, \dots, n.$$

Adicionalmente, $\varepsilon(A_G, k) = \varepsilon(A_{\bar{G}}, n - 1 - k)$ e

$$\varepsilon(A_G, \lambda_i) = \varepsilon(A_{\bar{G}}, -(\lambda_i + 1)), \text{ para } i = 2, \dots, n.$$

Assim, podemos concluir o seguinte corolário:

Corolário 3.7. *Um grafo G de ordem n tal que $\sigma(A_G) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ é λ_1 -regular se e só se*

$$\begin{aligned} \sigma(A_{\bar{G}}) &= \{\bar{\lambda}_1 = n - (\lambda_1 + 1), \bar{\lambda}_2 = -(\lambda_n + 1), \dots, \bar{\lambda}_n = -(\lambda_2 + 1)\}, \\ \varepsilon(G, \lambda_1) &= \varepsilon(\bar{G}, n - (\lambda_1 + 1)), \\ \varepsilon(G, \lambda_i) &= \varepsilon(\bar{G}, -(\lambda_i + 1)), \text{ para } i = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Como consequência do Teorema 3.6 temos ainda o seguinte corolário:

Corolário 3.8. *Dado um grafo G e $\lambda \in \sigma(A_G)$ tal que $\lambda \geq -\lambda_{\min}(A_{\bar{G}}) - 1$, se $E(G, \lambda)$ contém um vector \hat{u} tal que $\hat{e}^T \hat{u} \neq 0$, então*

$$\omega(G) \leq \lambda + 1. \quad (3.17)$$

Demonstração. Com efeito, uma vez que $\lambda \in \sigma(A_G)$, $\lambda \geq -\lambda_{\min}(A_{\bar{G}}) - 1 \geq 0$ (logo, $\lambda \neq -1$) e $\hat{u} \in E(G, \lambda) \setminus \hat{e}^\perp$, pelo Teorema 3.6, $\bar{x} = \frac{\lambda+1}{\hat{e}^T \hat{u}} \hat{u}$ é solução do sistema $\nabla f_{A_{\bar{G}}; \lambda+1}(x) = 0$, ou seja, é ponto crítico da função quadrática $f_{A_{\bar{G}}; \lambda+1}$. Por outro lado, tendo em conta que $f_{A_{\bar{G}}; \lambda+1}$ é uma função côncava (note-se que $\lambda + 1 \geq -\lambda_{\min}(A_{\bar{G}})$) que atinge o seu máximo no ponto crítico \bar{x} , $f_{A_{\bar{G}}; \lambda+1}(\bar{x}) = 2\hat{e}^T \bar{x} - \bar{x}^T (\frac{A_{\bar{G}}}{\lambda+1} + I) \bar{x} = \hat{e}^T \bar{x} = \lambda + 1$ e, de acordo com (3.12),

$$\omega(G) = \alpha(\bar{G}) \leq f_{A_{\bar{G}}; \lambda+1}(\bar{x}) = \lambda + 1.$$

□

Definido-se um conjunto (k, τ) -regular como sendo um subconjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ que induz um subgrafo k -regular tal que

$$\forall v \in V(G) \setminus S \quad |N_G(v) \cap S| = \tau,$$

ainda podemos concluir que o majorante (3.17) é atingido se e só se \bar{G} tem um conjunto $(0, \lambda + 1)$ -regular ou, de um modo equivalente, se G tem um conjunto $(\omega - 1, \omega - (\lambda + 1))$ -regular. Com efeito, este majorante é atingido se e só se o vector característico de um estável máximo de \bar{G} é um ponto de máximo da

função quadrática $f_{A_{\bar{G}}; \lambda+1}$, ou seja, se e só se é solução do sistema de equações $(\frac{A_{\bar{G}}}{\lambda+1} + I)x = \hat{e}$, donde decorre a conclusão pretendida.

Note-se que, dado um grafo G , se todos os subespaços próprios associados a valores próprios $\lambda < \lambda_{max}(A_G)$ são ortogonais a \hat{e} , é claro que \hat{e} é o vector próprio associado a $\lambda_{max}(A_G)$ e, conseqüentemente, G é $\lambda_{max}(A_G)$ -regular. Em qualquer caso, porém, o vector próprio associado a $\lambda_{max}(A_G)$ não só não é ortogonal a \hat{e} , como verifica a desigualdade $\lambda \geq -\lambda_{min}(A_{\bar{G}}) - 1$ (conforme o lema a seguir estabelece).

Lema 3.9. *Dado um grafo arbitrário G , verifica-se a desigualdade*

$$\lambda_{max}(A_G) + 1 \geq -\lambda_{min}(A_{\bar{G}}).$$

Adicionalmente, se \bar{G} é k -regular, então $\lambda_{min}(A_{\bar{G}}) \geq k - n$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} \lambda_{min}(A_{\bar{G}}) &= \min_{\|\hat{u}\|=1} \hat{u}^T A_{\bar{G}} \hat{u} \\ &= \min_{\|\hat{u}\|=1} \hat{u}^T (J - I - A_G) \hat{u} \\ &= \min_{\|\hat{u}\|=1} (\hat{u}^T J \hat{u} - 1 - \hat{u}^T A_G \hat{u}) \\ &\geq \min_{\|\hat{u}\|=1} \hat{u}^T J \hat{u} + \min_{\|\hat{u}\|=1} (-\hat{u}^T A_G \hat{u} - 1) \\ &= -1 - \max_{\|\hat{u}\|=1} \hat{u}^T A_G \hat{u} \\ &= -1 - \lambda_{max}(A_G). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Logo, tendo em conta (3.18), $\lambda_{max}(A_G) + 1 \geq -\lambda_{min}(A_{\bar{G}})$. Adicionalmente, supõe-se que \bar{G} é um grafo k -regular e, conseqüentemente, $\lambda_{max}(A_G) = n - k - 1$, obtém-se $\lambda_{min}(A_{\bar{G}}) \geq k - n$. \square

Segue-se um novo corolário do Teorema 3.6.

Corolário 3.10. *Dado um grafo G e sendo $\lambda_{max}(A_G)$ o maior valor próprio de A_G , $\omega(G) \leq \lambda_{max}(A_G) + 1$.*

Demonstração. Tendo em conta o Lema 3.9, é claro que $\lambda_{max}(A_G)$ verifica as condições do Corolário 3.8. Logo,

$$\omega(G) \leq \lambda_{max}(A_G) + 1.$$

\square

Esta desigualdade pode ser obtida a partir da desigualdade clássica $\chi(G) \leq \lambda_{max}(A_G) + 1$, tendo em conta que para um grafo arbitrário G , $\omega(G) \leq \chi(G)$. Adicionalmente, com base neste resultado e tendo em conta o Teorema 2.19,

se G é perfeito (logo $\chi(G) = \omega(G)$) e tem pelo menos uma aresta, podemos concluir as desigualdades:

$$1 - \frac{\lambda_{max}(A_G)}{\lambda_{min}(A_G)} \leq \omega(G) \leq 1 + \lambda_{max}(A_G),$$

as quais se verificam na forma de igualdade se e só se $|E(G)| > 0$ e todas as componentes são subgrafos completos. Por outro lado, sendo G perfeito, $|V(G)| \leq \alpha(G)\omega(G)$ e, conseqüentemente, $\frac{|V(G)|}{\alpha(G)} \leq \omega(G) \leq 1 + \lambda_{max}(A_G)$, donde podemos concluir a desigualdade

$$\frac{|V(G)|}{1 + \lambda_{max}(A_G)} \leq \alpha(G). \quad (3.19)$$

O próximo corolário estabelece um majorante mais apertado para o número de clique.

Teorema 3.11. *Dado um grafo arbitrário G , verifica-se a desigualdade*

$$\omega(G) \leq 1 + \lambda^*,$$

onde $\lambda^* = \min\{\lambda \in \sigma(A_G) : \lambda + 1 \geq -\lambda_{min}(A_{\bar{G}}) \wedge E(G, \lambda) \not\perp \hat{e}\}$.

Demonstração. Tendo em conta o Lemma 3.9 e o facto do subespaço próprio $E(G, \lambda_{max}(A_G))$ não ser ortogonal a \hat{e} (uma vez que contém um vector de componentes não negativas), é claro que

$$\lambda_{max}(A_G) \in \{\lambda \in \sigma(A_G) : \lambda \geq -\lambda_{min}(A_{\bar{G}}) - 1 \wedge E(G, \lambda) \not\perp \hat{e}\}.$$

Logo, o mínimo do conjunto $\{\lambda \in \sigma(A_G) : \lambda \geq -\lambda_{min}(A_{\bar{G}}) - 1 \wedge E(G, \lambda) \not\perp \hat{e}\}$ existe e, de acordo com o Corolário 3.8, a desigualdade verifica-se. \square

Tendo em conta este teorema e a desigualdade (3.19), sendo G um grafo perfeito e $\lambda^* = \min\{\lambda \in \sigma(A_G) : \lambda + 1 \geq -\lambda_{min}(A_{\bar{G}}) \wedge E(G, \lambda) \not\perp \hat{e}\}$, obtém-se

$$\frac{|V(G)|}{1 + \lambda^*} \leq \alpha(G).$$

4

Digrafos e Espaços Vectoriais

Um *digrafo* ou *grafo orientado* \vec{G} é um par de conjuntos (V, A) , tal que $V = V(\vec{G}) = \{x_1, \dots, x_n\}$ é o conjunto dos *vértices* e $A = A(\vec{G}) \subset V \times V$ é o conjunto dos *arcos*, ou seja, pares ordenados de vértices xy os quais, por simplicidade, denotaremos da mesma forma que as arestas. Neste caso porém, x designa-se por cauda do arco xy e y designa-se por cabeça. Um digrafo diz-se *simples* se não tem nem arcos múltiplos (mais do que um arco entre o mesmo par de vértices) nem arcos com ambos os extremos no mesmo vértice. Identicamente ao que acontece com os grafos, neste texto, os digrafos simples são designados apenas digrafos e digrafos com lacetes orientados e/ou arcos paralelos por *multidigrafos*.

Com algumas exceções que oportunamente se abordarão, a grande maioria dos conceitos associados aos grafos permanecem válidos para os digrafos. Como exemplo, na Figura 6.1 representa-se um digrafo de ordem 5 e dimensão 6.

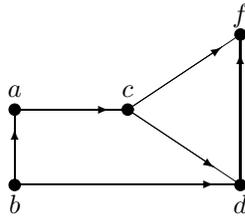


Figura 4.1: Exemplo de digrafo.

No caso de um digrafo, \vec{G} , podemos separar o grau de um vértice $v \in V(\vec{G})$ em semi-grau incidente $d_{\vec{G}}^{-}(v) = |\{(x, v) \in A(\vec{G}) : x \in V(\vec{G})\}|$ e semi-grau emergente $d_{\vec{G}}^{+}(v) = |\{(v, x) \in A(\vec{G}) : x \in V(\vec{G})\}|$, pelo que $d_{\vec{G}}(v) = d_{\vec{G}}^{-}(v) + d_{\vec{G}}^{+}(v)$, sendo também imediato concluir que $\sum_{v \in V(\vec{G})} d_{\vec{G}}^{+}(v) = \sum_{v \in V(\vec{G})} d_{\vec{G}}^{-}(v)$.

Como exemplo, o vértice c do digrafo \vec{G} representado na Figura 6.1 é tal que $d_{\vec{G}}^-(c) = 1$ e $d_{\vec{G}}^+(c) = 2$.

A matriz de *adjacência* de um digrafo \vec{G} de ordem n é uma matriz quadrada $n \times n$, $A_{\vec{G}}$, tal que

$$(A_{\vec{G}})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } v_i v_j \in A(\vec{G}), \\ 0 & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

A matriz de *incidência* arco vértice de um digrafo de ordem n e dimensão m é uma matriz $n \times m$, $B_{\vec{G}}$, tal que

$$(B_{\vec{G}})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } a_j = v_i v_k, \text{ para algum } v_k \in V(\vec{G}), \\ -1 & \text{se } a_j = v_k v_i, \text{ para algum } v_k \in V(\vec{G}), \\ 0 & \text{se } a_j = v_p v_q, \text{ e } v_i \notin \{v_p, v_q\}. \end{cases}$$

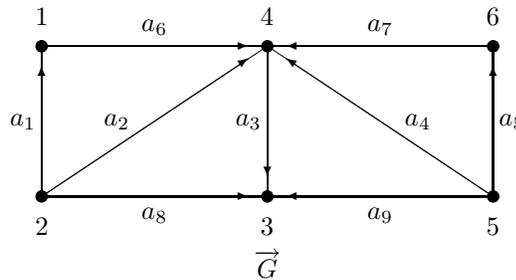


Figura 4.2: Exemplo de um digrafo de ordem 6 e dimensão 9.

Considerando o digrafo \vec{G} , representados na Figura 6.4, obtém-se:

$$A_{\vec{G}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \text{ e } B_{\vec{G}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

4.1 Espaço dos vértices e espaço dos arcos

Dado um digrafo \vec{G} , designa-se por *espaço dos vértices* de \vec{G} o espaço vectorial sobre o corpo K (onde K denota, usualmente, um dos conjunto \mathbb{R} ou \mathbb{C}) e

denota-se por $K^{V(\vec{G})}$, o espaço vectorial de todas as funções de $V(\vec{G})$ em K . De modo análogo, designa-se por *espaço dos arcos* de \vec{G} sobre K e denota-se por $K^{A(\vec{G})}$, o espaço vectorial de todas as funções de $A(\vec{G})$ em K . Se o digrafo \vec{G} é tal que $V(\vec{G}) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $A(\vec{G}) = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, então $\dim(K^{V(\vec{G})}) = n$ e $\dim(K^{A(\vec{G})}) = m$. Os elementos $x \in K^{V(\vec{G})}$ são usualmente escritos na forma $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$ e, neste somatório, devemos interpretar cada v_j como sendo uma função de $V(\vec{G})$ em K que é nula em todo os pontos à excepção de v_j , para o qual toma o valor 1. Nestas condições, o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ constitui uma base para $K^{V(\vec{G})}$ e o somatório anterior pode interpretar-se como uma representação de x nesta base. Analogamente, um elemento arbitrário $y \in K^{A(\vec{G})}$ pode representar-se por $y = \sum_{i=1}^m \beta_i a_i$. Designamos $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ e $\langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$ como sendo as bases canónicas, respectivamente, de $K^{V(\vec{G})}$ e $K^{A(\vec{G})}$. Podemos munir estes espaços vectoriais do produto interno usual $\langle u, w \rangle = \sum_{k=1}^p u_k w_k$, onde p corresponde a n ou m , consoante se trate de $K^{V(\vec{G})}$ ou $K^{A(\vec{G})}$. Considerando a norma induzida por este produto interno e tendo em conta a definição usual de ortogonalidade, com facilidade se conclui que as bases anteriormente referidas são ortonormais.

Neste contexto, dado um digrafo \vec{G} de ordem n e dimensão m , a matriz de incidência arco vértice $B_{\vec{G}}$ é uma aplicação linear que transforma vectores do espaço dos arcos em vectores do espaço dos vértices,

$$B_{\vec{G}} : K^{A(\vec{G})} \mapsto K^{V(\vec{G})},$$

tal que, admitindo que cada coluna \hat{b}_j de $B_{\vec{G}}$ corresponde a um arco $v_{j_1} v_{j_2}$, para $j = 1, \dots, m$, considerando $\hat{u} \in K^{A(\vec{G})}$,

$$B_{\vec{G}} \hat{u} = \sum_{j=1}^m \hat{b}_j \hat{u}_j = \sum_{j=1}^m (\hat{e}_{j_1} - \hat{e}_{j_2}) \hat{u}_j.$$

4.2 Subespaços de circuitos e cocircuitos

Antes de prosseguirmos convém introduzir o conceito orientação em circuitos e trajectos e o conceito de cocircuito (ou corte), no contexto dos grafos orientados.

Dado um digrafo \vec{G} e um seu circuito C (trajecto T), definido pela sequência de arcos a_1, \dots, a_k , vamos considerar como *orientação positiva* a que é determinada pela ordem segundo a qual percorremos os vértices de $V(C)$ e como *orientação negativa* a orientação oposta. Assim, fixada uma orientação positiva num circuito ou num trajecto que contém um arco a , esse arco diz-se positivo se é favorável à orientação e negativo no caso contrário. Os conjuntos de arcos positivos de C (T) denota-se por C^+ (T^+) e o conjunto de arcos negativos por C^- (T^-).

Exemplo 4.1. Considerando o digrafo representado na Figura 6.4, o circuito $X = (a_1, a_6, a_7, a_5, a_9, a_8)$ e o trajecto $T = (a_2, a_4, a_5)$, com a orientação positiva definida, respectivamente, pela sequência de vértices 1, 4, 6, 5, 3, 2, 1 no caso de X e 2, 4, 5, 6 no caso de T , podemos concluir que $X^+ = \{a_1, a_6, a_9\}$, $X^- = \{a_5, a_7, a_8\}$, $T^+ = \{a_2, a_5\}$ e $T^- = \{a_4\}$.

Dado um grafo orientado conexo \vec{G} , designa-se por *cocircuito* (ou *corte*) de \vec{G} e denota-se por $\partial(V_1)$ o subconjunto de arcos de \vec{G} com um único extremo no subconjunto de vértices V_1 , onde $\emptyset \neq V_1 \neq V(\vec{G})$. Neste caso, podemos partir $\partial(V_1)$ nos subconjuntos $\partial^+(V_1)$ e $\partial^-(V_1)$, onde o primeiro subconjunto corresponde aos arcos com cauda em V_1 e cabeça no complementar de V_1 e o segundo conjunto corresponde aos arcos com cauda no complementar de V_1 e cabeça em V_1 . Também se diz que $\partial^+(V_1)$ é o subconjunto dos arcos para a frente e $\partial^-(V_1)$ é o subconjunto dos arcos para trás do cocircuito $\partial(V_1)$.

Dados dois vértices $x, y \in V(\vec{G})$ de um grafo conexo G , designa-se por *x-y-corte*, todo o cocircuito $\partial(V_1)$ de G tal que $x \in V_1$ e $y \in V(G) \setminus V_1$.

Exemplo 4.2. Voltando ao digrafo \vec{G} representado na Figura 6.4, considerando o cocircuito definido pelo subconjunto de vértices $S = \{1, 3, 6\}$ e destacando os vértices 1 e 5, podemos concluir que $\partial(S)$ é um 1-5-corte e

$$\begin{aligned}\partial(S) &= \{a_1, a_3, a_6, a_5, a_7, a_8, a_9\}, \\ \partial^+(S) &= \{a_6, a_7\}, \\ \partial^-(S) &= \{a_1, a_3, a_5, a_8, a_9\}.\end{aligned}$$

Dado um circuito C de um digrafo \vec{G} designa-se por *vector do circuito* C o vector \hat{u} do espaço dos arcos que define a aplicação de \vec{G} em $\{1, 0, -1\}$:

$$u(a_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } a_j \in A(C) \text{ e } a_j \in C^+, \\ -1, & \text{se } a_j \in A(C) \text{ e } a_j \in C^-, \\ 0, & \text{se } a_j \notin A(C). \end{cases}$$

De acordo com esta definição, o vector do circuito X do Exemplo 4.1 é o vector $\hat{u}^X = [1, 0, 0, 0, -1, 1, -1, -1, 1]$.

A partir dos vectores de circuitos, estamos em condições de definir o subespaço de $K^{A(\vec{G})}$ gerado por estes vectores, o qual se designa por *subespaço de circuitos* e se denota por $Circuitos(\vec{G})$.

Por sua vez, tal como para os circuitos, associado a qualquer cocircuito $\partial(V_1)$, existe um vector $\hat{v} \in K^{A(\vec{G})}$ que se designa por *vector de cocircuito* (ou *corte*), o qual define a aplicação de $A(\vec{G})$ em $\{1, 0, -1\}$:

$$v(a_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } a_j \in \partial^+(V_1), \\ -1, & \text{se } a_j \in \partial^-(V_1), \\ 0, & \text{se } a_j \notin \partial(V_1). \end{cases}$$

De acordo com esta definição, o vector do cocircuito $\partial(S)$ do Exemplo 4.2 é o vector $\hat{v} = [-1, 0, -1, 0, -1, 1, 1, -1, -1]$.

O subespaço de $K^{A(\vec{G})}$ gerado pelos vectores de cocircuitos designa-se por *subespaço de cocircuitos* e denota-se por $Cocircuitos(\vec{G})$.

4.3 Lema de Farkas para grafos

Seguem-se alguns resultados que estabelecem condições de existência mutuamente exclusivas para caminhos orientados, circuitos e cocircuitos.

Teorema 4.1 (Lema de Farkas para digrafos ou multidigrafos). *Dado um digrafo (ou multidigrafo) \vec{G} conexo, se $x, y \in V(\vec{G})$, então*

1. *existe um caminho orientado \vec{P} entre x e y , ou seja, tal que $\vec{P}^- = \emptyset$, ou*
2. *existe um x - y -corte $\partial(V_1)$ com $x \in V_1$, tal que $\partial^+(V_1) = \emptyset$,*

mas não ambos.

Demonstração. A prova é construtiva. Vamos construindo o subconjunto V_1 , formado pelos vértices que podem ser alcançados a partir de x por um caminho orientado, por intermédio do algoritmo que se segue.

- **Algoritmo**

1. Iniciar $V_1 = \{x\}$;
2. Enquanto $\partial^+(V_1) \neq \emptyset$ e $y \notin V_1$ faz
 - (a) escolher $a = st \in \partial^+(V_1)$;
 - (b) fazer $V_1 = V_1 \cup \{t\}$;
 - (c) fazer *predecessor*(t) = s ;
 fim faz;

- **Fim do algoritmo.**

É claro que o algoritmo termina no máximo em $|V(\vec{G})|$ passos. Se termina com $y \in V_1$, então existe um caminho orientado entre x e y e este caminho pode ser obtido por intermédio da função *predecessor* do algoritmo. Se o algoritmo termina com $y \notin V_1$, então $\partial(V_1) = \partial^-(V_1)$ é um corte que está de acordo com 2. \square

Este resultado constitui o principal teorema da dualidade no contexto dos grafos e, apesar da sua simplicidade, tem implicações muito interessantes. O corolário a seguir apresenta uma nova versão do lema de Farkas para grafos, na qual se estabelecem condições de existência, mutuamente exclusivas, de circuitos e cortes com determinadas características.

Corolário 4.2 (do Lema de Farkas para digrafos ou multidigrafos). *Seja \vec{G} um digrafo (ou multidigrafo) conexo. Então, para todo o arco $a \in A(\vec{G})$, ou*

1. Existe um circuito $X \subseteq E(\vec{G})$ tal que $a \in X$ e $X^- = \emptyset$, ou
2. Existe um corte $Y \subseteq E(\vec{G})$ tal que $a \in Y$ e $Y^+ = \emptyset$,

mas não ambos.

Demonstração. Seja $a = yx$ e aplique-se o Teorema 4.1 ao digrafo (ou multidigrafo) $\vec{G} - a$. A existência de um caminho orientado entre x e y no grafo $\vec{G} - a$ garante a existência de um circuito X em \vec{G} que contém o arco a e para o qual se verifica $X^- = \emptyset$. Por sua vez, a não existência de um caminho orientado entre x e y implica a existência de um x - y -corte Y , tal que $a \in Y$ e $Y^+ = \emptyset$. \square

4.4 Relações entre os subespaços de circuitos e cocircuitos

Nesta secção vamos provar que os subespaços de circuitos e de cocircuitos de um digrafo formam um par de subespaços complementares L e L^\perp .

Lema 4.3. *Os espaços de circuitos e cocircuitos de um digrafo (ou multidigrafo) \vec{G} são ortogonais.*

Demonstração. Seja X um circuito que se parte em X^+ e X^- e seja Y um cocircuito que desconexa \vec{G} nos subdigrafos \vec{G}_1 e \vec{G}_2 . Suponha-se que Y^+ é o subconjunto de arcos de Y com cauda em \vec{G}_1 e cabeça em \vec{G}_2 e seja Y^- o subconjunto de arcos com cauda em \vec{G}_2 e cabeça em \vec{G}_1 . Sejam \hat{x} e \hat{y} os vectores de $K^{A(\vec{G})}$ associados, respectivamente, a X e a Y . É fácil ver que o produto interno $\hat{x}^T \hat{y}$ é o número de vezes que vamos de \vec{G}_1 para \vec{G}_2 menos o número de vezes que vamos de \vec{G}_2 para \vec{G}_1 , quando se percorre o circuito X , pelo que se obtém $\hat{x}^T \hat{y} = 0$. Logo, \hat{x} e \hat{y} são ortogonais, o que completa a prova, uma vez que estes espaços são gerados, respectivamente, pelos vectores de circuitos e cocircuitos. \square

Para se provar que os espaços de circuitos e cocircuitos são complementares, teremos de investigar as respectivas dimensões.

Dado um digrafo (ou multidigrafo) \vec{G} , um subconjunto de arcos $A' \subseteq A(\vec{G})$ diz-se um *conjunto independente de arcos* de \vec{G} , se não contém circuitos. Um conjunto independente maximal (no sentido da inclusão) designa-se por *base* de \vec{G} . Quando um grafo é conexo, uma base coincide com uma árvore abrangente e quando uma base tem várias componentes coincide com uma floresta abrangente.

Lema 4.4. *Seja \vec{G} um digrafo (ou multidigrafo) com k componentes. Então, qualquer base de \vec{G} tem precisamente $|V(\vec{G})| - k$ elementos.*

Demonstração. Suponha que \vec{G} tem k componentes conexas e sejam \vec{G}_i , para $i = 1, \dots, k$, os correspondentes subdigrafos. Uma vez que em \vec{G}_i uma base é

uma árvore abrangente, sendo E_i uma base para \vec{G}_i , $|E_i| = |V(\vec{G}_i)| - 1$. Logo, dado que qualquer base de \vec{G} corresponde à união dos arcos que, em cada componente, formam uma árvore abrangente, podemos concluir que uma base E de \vec{G} é tal que $E = \bigcup_{i=1}^k E_i$ e, conseqüentemente,

$$|E| = \sum_{i=1}^k (|V(\vec{G}_i)| - 1) = \sum_{i=1}^k |V(\vec{G}_i)| - k = |V(\vec{G})| - k.$$

□

Lema 4.5. *Seja \vec{G} um dígrafo (ou multidígrafo) com k componentes. Então a dimensão de $\text{Circuitos}(\vec{G})$ é pelo menos $|A(\vec{G})| - |V(\vec{G})| + k$ e a dimensão de $\text{Cocircuitos}(\vec{G})$ é pelo menos $|V(\vec{G})| - k$*

Demonstração. Suponha que \vec{G} é conexo, ou seja, $k = 1$. Seja E uma base para \vec{G} , pelo que $|E| = |V(\vec{G})| - 1$.

- Pela maximalidade de E , qualquer arco de $A(\vec{G}) \setminus E$ adicionado a E produz um circuito. Para um arco arbitrário $a \in A(\vec{G}) \setminus E$ seja $X(a)$ o circuito de \vec{G} constituído pelo único caminho do subdígrafo $(V(\vec{G}), E)$ que liga os dois vértices de a mais o próprio a . Sendo $\hat{x}(a) \in K^{A(\vec{G})}$ o respectivo vector de circuito, obtém-se um conjunto de $|A(\vec{G}) \setminus E| = |A(\vec{G})| - |V(\vec{G})| + 1$ vectores linearmente independentes do espaço dos circuitos. Com efeito, note-se que para cada arco particular $a \in A(\vec{G}) \setminus E$, $\hat{x}(a)$ tem a a -ésima componente não nula, enquanto os restantes a têm igual a zero. Como consequência, a dimensão de $\text{Circuitos}(\vec{G})$ é não inferior a $|A(\vec{G})| - |V(\vec{G})| + 1$.
- Vamos considerar agora os cocircuitos de \vec{G} . Se $a \in E$, então o subdígrafo $(V(\vec{G}), E \setminus \{a\})$ é constituído por duas componentes, a saber, $\vec{G}_1(a)$ e $\vec{G}_2(a)$. Para cada $a \in E$ seja $Y(a)$ o cocircuito de \vec{G} constituído pelos arcos que ligam $\vec{G}_1(a)$ a $\vec{G}_2(a)$ em \vec{G} . Todos estes cocircuitos $Y(a)$, com $a \in E$, dão origem a um conjunto de $|E| = |V(\vec{G})| - 1$ vectores de cocircuitos $\hat{y}(a)$ linearmente independentes. Com efeito, para cada $a \in E$, $\hat{y}(a)$ tem a a -ésima componente não nula, enquanto os vectores representativos dos restantes cocircuitos a têm igual a zero. Logo, a dimensão de $\text{Cocircuitos}(\vec{G})$ é não inferior a $|V(\vec{G})| - 1$.

No caso de \vec{G} ter mais componentes, o resultado obtém-se, facilmente, escolhendo circuitos e cocircuitos independentes em cada componente. □

Teorema 4.6. *Os subespaços de circuitos e cocircuitos de um dígrafo (multidígrafo) \vec{G} , formam um par de subespaços complementares e ortogonais de $K^{A(\vec{G})}$, ou seja, se $\text{Circuitos}(\vec{G}) = L$, então $\text{Cocircuitos}(\vec{G}) = L^\perp$.*

Demonstração. A prova decorre de modo imediato, combinando o Lema 4.3 com o Lema 4.5. \square

Lema 4.7. Denotando por $\text{Ker}(B_{\vec{G}})$ o subespaço nulo da matriz $B_{\vec{G}}$, podemos concluir que

$$\text{Circuitos}(\vec{G}) \subseteq \text{Ker}(B_{\vec{G}}).$$

Demonstração. Seja X um circuito de \vec{G} que, sem perda de generalidade, se supõe definido pela sequência de vértices $(v_0, v_1, \dots, v_k, v_0)$. Considere o trajecto $\vec{P} = (v_0, \dots, v_k)$ e seja $A(\vec{P}) = \{a_1, \dots, a_k\}$ o conjunto dos arcos deste trajecto. Seja $\hat{p} \in K^{A(\vec{G})}$ o vector do espaço dos arcos que representa \vec{P} , pelo que cada componente de \hat{p} é igual a $+1$ se o arco que lhe corresponde pertence a P^+ , é igual a -1 se pertence a P^- e igual a zero se não pertence ao trajecto. Nestas condições, denotando por \hat{b}_{a_j} a coluna de $B_{\vec{G}}$ associado ao arco a_j , para $j = 1, \dots, k$, vem

$$B_{\vec{G}}\hat{p} = \sum_{j=1}^k \hat{p}_{a_j} \hat{b}_{a_j} = \sum_{j=1}^k (\hat{e}_{j-1} - \hat{e}_j) = \hat{e}_0 - \hat{e}_k.$$

Deve observar-se que dada a sequência $\dots, v_{r-1}, v_r, v_{r+1}, \dots$, embora existam quatro possibilidades para $\hat{p}_{a_r} \hat{b}_{a_r} + \hat{p}_{a_{r+1}} \hat{b}_{a_{r+1}}$, obtém-se sempre o mesmo resultado, ou seja,

$$(+1)(\hat{e}_{r-1} - \hat{e}_r) + (+1)(\hat{e}_r - \hat{e}_{r+1}) = \hat{e}_{r-1} - \hat{e}_{r+1} \quad (4.1)$$

$$(-1)(\hat{e}_r - \hat{e}_{r-1}) + (+1)(\hat{e}_r - \hat{e}_{r+1}) = \hat{e}_{r-1} - \hat{e}_{r+1} \quad (4.2)$$

$$(+1)(\hat{e}_{r-1} - \hat{e}_r) + (-1)(\hat{e}_r - \hat{e}_{r+1}) = \hat{e}_{r-1} - \hat{e}_{r+1} \quad (4.3)$$

$$(-1)(\hat{e}_r - \hat{e}_{r-1}) + (-1)(\hat{e}_r - \hat{e}_{r+1}) = \hat{e}_{r-1} - \hat{e}_{r+1} \quad (4.4)$$

uma vez que em (4.1) os arcos a_r e a_{r+1} são positivos, em (4.2) a_r é negativo e a_{r+1} é positivo, em (4.3) a_r é positivo e a_{r+1} é negativo e, finalmente, em (4.4) a_r e a_{r+1} são arcos negativos. Como consequência, adicionando ao trajecto \vec{P} o arco a_{k+1} que liga os vértices v_k e v_0 (ou v_0 e v_k), determina-se o circuito X para o qual, sendo \hat{x} o vector do espaço de circuitos que o representa, se obtém $B_{\vec{G}}\hat{x} = 0$. \square

Lema 4.8. Denotando por $\text{Im}(B_{\vec{G}})$ o subespaço imagem da matriz $B_{\vec{G}}$, podemos concluir que

$$\text{Cocircuitos}(\vec{G}) \subseteq \text{Im}(B_{\vec{G}}^T),$$

Demonstração. Seja $Y = \partial(V_1)$ um cocircuito de \vec{G} (pelo que $\emptyset \neq V_1 \neq V(\vec{G})$). Seja $\hat{u} \in K^{V(\vec{G})}$ o vector característico de V_1 , ou seja, a i -ésima componente de \hat{u} é igual a 1 se $i \in V_1$ e igual a zero no caso contrário. Logo, a a -ésima componente do vector do espaço dos arcos $\hat{y}^T = \hat{u}^T B_{\vec{G}}$ é determinada pelo

somatório das componentes da a -ésima coluna da matriz $B_{\vec{G}}$ (que representa o arco a) associadas aos vértices de V_1 . Assim, temos quatro casos:

$$\hat{y}_a = (+1) + (-1) = 0, \quad \text{se } a \text{ liga dois vértices de } V_1, \quad (4.5)$$

$$\hat{y}_a = 0, \quad \text{se } a \text{ liga dois vértices de } V(\vec{G}) \setminus V_1, \quad (4.6)$$

$$\hat{y}_a = 1, \quad \text{se } a \in \partial^+(V_1), \quad (4.7)$$

$$\hat{y}_a = -1, \quad \text{se } a \in \partial^-(V_1). \quad (4.8)$$

Logo, \hat{y} é vector do cocircuito $\partial(V_1)$ e $\hat{y} \in \text{Im}(B_{\vec{G}}^T)$. \square

Teorema 4.9. *Se \vec{G} é um digrafo (ou multidigrafo) então os espaços de circuitos e cocircuitos de \vec{G} são $\text{Ker}(B_{\vec{G}})$ e $\text{Im}(B_{\vec{G}}^T)$, respectivamente.*

Demonstração. A prova é consequência imediata do Teorema 4.6, combinado com os Lemas 4.7 e 4.8. \square

5

Matriz Laplaciana

5.1 Propriedades da matriz laplaciana

Dado um grafo G , atribuindo uma orientação (arbitrária) às suas arestas, obtendo-se \vec{G} , é fácil concluir a igualdade

$$B_{\vec{G}} B_{\vec{G}}^T = L_G,$$

onde L_G é a matriz laplaciana de G (ou seja, $L_G = D_G - A_G$, com $D_G = \text{diag}(d_G(v_1), \dots, d_G(v_n))$).

Observe-se que $\text{tr}(L_G) = \sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|$ e, adicionalmente, se G é k -regular e $\lambda \in \sigma(A_G)$, então $k - \lambda \in \sigma(L_G)$ (com efeito, sendo \hat{u} um vector próprio de A_G pertencente ao subespaço próprio associado a λ , $L_G \hat{u} = (kI - A_G) \hat{u} = (k - \lambda) \hat{u}$).

É claro que L_G é semidefinida positiva e, uma vez que $L_G \hat{e} = 0$, podemos ordenar os valores próprios do seguinte modo: $0 = \theta_1(L_G) \leq \theta_2(L_G) \leq \dots \leq \theta_{n-1}(L_G) \leq \theta_n(L_G)$. Adicionalmente, tendo em conta que L_G admite um conjunto ortonormal de vectores próprios que é uma base para \mathbb{R}^n , podemos concluir que

$$\theta_2(L_G) = \min_{\hat{u} \perp \hat{e}} \frac{\hat{u}^T L_G \hat{u}}{\hat{u}^T \hat{u}}.$$

Teorema 5.1. *Dado um grafo arbitrário G , se θ é um valor próprio não nulo da matriz laplaciana L_G e \hat{u} é um vector próprio associado a θ , então \hat{u} é um vector próprio de $L_{\vec{G}}$ associado ao valor próprio $n - \theta$.*

Demonstração. Sendo \hat{u} um vector próprio de L_G associado a um valor próprio não nulo θ , obtém-se

$$\theta \hat{u} + L_{\vec{G}} \hat{u} = (L_G + L_{\vec{G}}) \hat{u} = (D_G - A_G + D_{\vec{G}} - A_{\vec{G}}) \hat{u} = (nI - J) \hat{u} = n \hat{u},$$

uma vez que \hat{u} é ortogonal a \hat{e} e, consequentemente, $J \hat{u} = 0$. Logo, vem $L_{\vec{G}} \hat{u} = (n - \theta) \hat{u}$. \square

Como consequência imediata deste teorema, L_G e $L_{\vec{G}}$ têm os mesmos vectores próprios e, uma vez que os valores próprios das matrizes laplacianas de grafos são todos não negativos, segue-se que qualquer valor próprio $\theta \in \sigma(L_G) \setminus \{0\}$ é tal que $\theta < n$. Adicionalmente, podemos concluir o resultado que se segue.

Lema 5.2. *Dado um grafo G de ordem n , se $\theta_n(L_G)$ é o maior valor próprio da matriz laplaciana L_G , então*

$$\Delta(G) + 1 \leq \theta_n(L_G) \leq 2\Delta(G). \quad (5.1)$$

Demonstração. Em primeiro lugar vamos provar a desigualdade da esquerda e só depois a desigualdade da direita.

1. Seja $j \in V(G)$ tal que $d_G(j) = \Delta(G)$ e seja $\hat{x} \in \mathbb{R}^{V(G)}$ tal que

$$\hat{x}_i = \begin{cases} \Delta(G), & \text{se } i = j; \\ -1, & \text{se } i \in N_G(j); \\ 0, & \text{nos restantes casos.} \end{cases}$$

Logo, atribuindo-se uma orientação às arestas de G , obtendo-se \vec{G} , de tal forma que $d_{\vec{G}}^- = 0$, vem que $(\Delta(G) + 1)\hat{y}^T = \hat{x}^T B_{\vec{G}}$, onde \hat{y} é o vector do corte $\partial(\{j\})$. Logo,

$$\begin{aligned} \theta_n(L_G) &= \max_{\hat{u} \neq 0} \frac{\hat{u}^T L_G \hat{u}}{\hat{u}^T \hat{u}} \\ &\geq \frac{\hat{x}^T L_G \hat{x}}{\hat{x}^T \hat{x}} \\ &= \frac{\hat{x}^T B_{\vec{G}} B_{\vec{G}}^T \hat{x}}{\Delta(G)^2 + \Delta(G)} \\ &= \frac{\hat{y}^T \hat{y}}{\Delta(G)(\Delta(G) + 1)} \\ &= \frac{(\Delta + 1)^2 \Delta(G)}{\Delta(G)(\Delta(G) + 1)} \\ &= \Delta(G) + 1. \end{aligned}$$

2. Para provar a desigualdade da direita, considere-se a matriz $\Delta(G)I - L_G$ que é uma matriz de entradas não negativas. Logo, sendo λ_{max} e λ_{min} os valores próprios máximo e mínimo da matriz $\Delta(G)I - L_G$, por aplicação do teorema de Frobenius, $\lambda_{max} \geq |\lambda_{min}|$. Porém, $\lambda_{max} = \Delta(G)$ e $\lambda_{min} = \Delta(G) - \theta_1(L_G)$. Logo, tendo em conta o item anterior,

$$\Delta(G) \geq |\Delta(G) - \theta_1(L_G)| = -\Delta(G) + \theta_1(L_G),$$

donde se obtém, $2\Delta(G) \geq \theta_1(L_G)$.

□

O segundo valor próprio θ_2 da matriz laplaciana de um grafo G é especialmente importante no contexto do espectro de L_G , uma vez que nos dá informação sobre a conexidade do grafo e também está ligado às designadas *desigualdades de Cheeger* que representam a versão discreta da análise contínua do operador laplaciano definido em variedades riemanianas.

Lema 5.3. *Dado um grafo G e dois vértices não adjacentes $u, v \in V(G)$, verifica-se a desigualdade*

$$\theta_2(L_G) \leq \frac{d_G(u) + d_G(v)}{2}.$$

Demonstração. Seja \vec{G} o grafo G munido de uma orientação arbitrária e seja $\hat{x} \in \mathbb{R}^{V(\vec{G})}$ tal que

$$\hat{x}_i = \begin{cases} 1, & \text{se } i = u; \\ -1, & \text{se } i = v; \\ 0, & \text{nos restantes casos.} \end{cases}$$

Fazendo $\hat{y}^T = \hat{x}^T B_{\vec{G}}$, para cada uma das colunas \hat{b}_a de $B_{\vec{G}}$, obtém-se

$$\hat{y}_a = \hat{x}^T \hat{b}_a = \begin{cases} 1, & \text{se } a \in \partial^+(\{u\}); \\ -1, & \text{se } a \in \partial^-(\{u\}); \\ -1, & \text{se } a \in \partial^+(\{v\}); \\ 1, & \text{se } a \in \partial^-(\{v\}); \\ 0, & \text{nos restantes casos.} \end{cases}$$

Logo, $\hat{y}^T \hat{y} = d_G(u) + d_G(v)$ e, uma vez que \hat{x} é ortogonal a \hat{e} , podemos concluir

$$\theta_2(L_G) \leq \frac{\hat{x}^T L_G \hat{x}}{\hat{x}^T \hat{x}} = \frac{\hat{x}^T B_{\vec{G}} B_{\vec{G}}^T \hat{x}}{\hat{x}^T \hat{x}} = \frac{\hat{y}^T \hat{y}}{2} = \frac{d_G(u) + d_G(v)}{2}.$$

□

Dado um subconjunto arbitrário de vértices $S \subseteq V(G)$, sendo $\hat{x} = x(S)$ um vector de componentes $|V(G) \setminus S|$ e $-|S|$ tais que $\hat{x}_i = |V(G) \setminus S|$ se $i \in S$ e $\hat{x}_i = -|S|$ no caso contrário, obtém-se $|V(G)| \hat{y}^T = \hat{x}^T B_{\vec{G}}$, onde \hat{y} denota o vector do corte definido pelo subconjunto de vértices S . Com efeito, sendo \hat{b}_a a coluna de $B_{\vec{G}}$ associada ao arco $a = ij$,

$$\hat{x}^T \hat{b}_a = x_i - x_j = \begin{cases} |V(G) \setminus S| - |V(G) \setminus S| = 0, & \text{se } i, j \in S; \\ (-|S|) - (-|S|) = 0, & \text{se } i, j \notin S; \\ |V(G) \setminus S| - (-|S|) = |V(G)|, & \text{se } i \in S, j \in V(\vec{G}) \setminus S; \\ (-|S|) - |V(G) \setminus S| = -|V(G)|, & \text{se } i \in V(\vec{G}) \setminus S, j \in S. \end{cases}$$

Uma vez que

$$\hat{e}^T \hat{x} = \sum_{i \in S} |V(G) \setminus S| - \sum_{i \in V(G) \setminus S} |S| = |S| |V(G) \setminus S| - |V(G) \setminus S| |S| = 0,$$

e $\hat{x}^T \hat{x} = |S|(|V(G) \setminus S| + |S|)|V(G) \setminus S| = |S||V(G)||V(G) \setminus S|$, é claro que $\hat{x} = x(S)$ é ortogonal a \hat{e} e

$$\theta_2 \leq \frac{\hat{x}^T L_G \hat{x}}{\hat{x}^T \hat{x}} = |V(G)|^2 \frac{\hat{y}^T \hat{y}}{|S||V(G)||V(G) \setminus S|} = |V(G)| \frac{|\partial(S)|}{|S||V(G) \setminus S|},$$

donde vem que

$$\frac{|V(G) \setminus S|}{|V(G)|} \theta_2(L_G) \leq \frac{|\partial(S)|}{|S|}. \quad (5.2)$$

Logo, tendo em conta a definição a seguir,

$$\Phi(G) = \min\left\{\frac{|\partial(S)|}{|S|} : S \subseteq V(G), 0 < |S| \leq \frac{|V(G)|}{2}\right\},$$

da análise anterior decorre o seguinte resultado:

Teorema 5.4. *Dado um grafo arbitrário G , verifica-se a desigualdade*

$$\Phi(G) \geq \frac{\theta_2(L_G)}{2}.$$

Demonstração. Tendo em conta que a condição $|S| \leq \frac{|V(G)|}{2}$ implica

$$|V(G) \setminus S| = |V(G)| - |S| \geq |V(G)| - \frac{|V(G)|}{2} = \frac{|V(G)|}{2},$$

a partir da desigualdade (5.2), obtém-se $\frac{|\partial(S)|}{|S|} \geq \frac{|V(G) \setminus S|}{|V(G)|} \theta_2 \geq \frac{\theta_2}{2}$ e, consequentemente,

$$\Phi(G) \geq \frac{\theta_2(L_G)}{2}. \quad \square$$

Também se conhecem majorantes para $\Phi(G)$ em função de θ_2 , nomeadamente para grafos regulares. Com efeito, sendo G um grafo k -regular e λ_2 o segundo valor próprio da matriz de adjacência, prova-se que $\Phi(G) \leq \sqrt{2k(k - \lambda_2)}$, pelo que se obtêm as desigualdades $\frac{k - \lambda_2}{2} \leq \Phi(G) \leq \sqrt{2k(k - \lambda_2)}$ (deve observar-se que sendo G um grafo k -regular, se $\lambda \in \sigma(A_G)$ e \hat{u} pertence ao correspondente subespaço próprio, então $L_G \hat{u} = (kI - A_G) \hat{u} = (k - \lambda) \hat{u}$, ou seja, $k - \lambda \in \sigma(L_G)$).

No caso mais geral de um grafo G eventualmente não regular, prova-se a desigualdade $\Phi(G) \leq \sqrt{2\Delta(G)\theta_2(L_G)}$. Como consequência, combinando esta desigualdade com a desigualdade obtida no Teorema 5.4, vem

$$\frac{\theta_2}{2} \leq \Phi(G) \leq \sqrt{2\Delta(G)\theta_2(L_G)}. \quad (5.3)$$

Mais recentemente, o majorante de $\Phi(G)$ que aparece em (5.3) foi melhorado por Mohar [29].

Teorema 5.5. [29] Se G é um grafo de ordem n (≥ 3), então

$$\Phi(G) \leq \sqrt{(2\Delta(G) - \theta_2(L_G))\theta_2}.$$

Com recurso às desigualdades (5.3), estamos em condições de demonstrar o teorema a seguir.

Teorema 5.6. Um grafo G é conexo se e só se $\theta_2(L_G) \neq 0$.

Demonstração. A prova decorre directamente do facto de, de acordo com a definição de Φ , G ser desconexo se e só se $\Phi(G) = 0$ e das desigualdades (5.3). Com efeito, se G é conexo, então $\Phi(G) > 0$ e, pela desigualdade da direita em (5.3), $\theta_2(L_G) > 0$. Reciprocamente, tendo em conta a desigualdade da esquerda em (5.3), $\theta_2(L_G) > 0$ implica $\Phi(G) > 0$. \square

Verifica-se assim que a conexidade de um grafo G está directamente relacionada com o segundo valor próprio de matriz laplaciana L_G , o qual se designa, precisamente, por *conexidade algébrica* de G e se denota por $\theta_2(L_G)$.

Teorema 5.7. Dado um grafo arbitrário G e um seu subconjunto de vértices $S \subseteq V(G)$, verifica-se a desigualdade

$$\theta_2(L_G) \leq \theta_2(L_{G[S]}) + |V(G) \setminus S|.$$

Demonstração. Seja $\bar{u} \in \mathbb{R}^{V(G[S])}$ um vector próprio de $L_{G[S]}$ associado ao valor próprio $\bar{\theta}_2(L_G) = \theta_2(L_{G[S]})$ com norma unitária e seja $\hat{u} \in \mathbb{R}^{V(G)}$ tal que

$$\hat{u}_i = \begin{cases} 0, & \text{se } i \in V(G) \setminus S; \\ \bar{u}_i, & \text{no caso contrário.} \end{cases}$$

Nestas condições,

$$\begin{aligned} \theta_2(G) &\leq \hat{u}^T L_G \hat{u} \\ &= \hat{u}^T B_{\vec{G}} B_{\vec{G}}^T \hat{u} \\ &= \sum_{ij \in A(\vec{G})} (\hat{u}_i - \hat{u}_j)^2 \\ &= \sum_{ij \in A(\vec{G}[S])} (\hat{u}_i - \hat{u}_j)^2 + \sum_{k \in S} \hat{u}_k^2 |N_G(k) \cap V(G) \setminus S| \\ &= \bar{u}^T B_{\vec{G}[S]} B_{\vec{G}[S]}^T \bar{u} + \sum_{k \in S} \hat{u}_k^2 |N_G(k) \cap V(G) \setminus S| \\ &\leq \theta_2(L_G) + \sum_{k \in S} \hat{u}_k^2 |V(G) \setminus S| \quad (\text{uma vez que } |N_G(k) \cap V(G) \setminus S| \leq |V(G) \setminus S|) \\ &\leq \theta_2(L_G) + |V(G) \setminus S| \quad (\text{uma vez que } \sum_{k \in S} \hat{u}_k^2 = 1). \end{aligned}$$

\square

Definição 5.1. Uma matriz quadrada B , com entradas inteiras designa-se por unimodular se $\det(B) = \pm 1$. Por sua vez, uma matriz arbitrária A com entradas inteiras, designa-se por totalmente unimodular se toda a submatriz de A , quadrada e não singular, é unimodular.

De acordo com esta definição, dado o sistema $Bx = b$, onde B é unimodular e b tem componentes inteiras, supondo $B = [\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_n]$, onde \hat{b}_j denota a j -ésima coluna de B , para $j = 1, \dots, n$, aplicando a regra de Cramer obtém-se

$$x_i = \frac{\det([\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_{i-1}, b, \hat{b}_{i+1}, \dots, \hat{b}_n])}{\det(B)} \in \mathbb{Z}, \text{ para } i = 1, \dots, n,$$

pelo que o sistema tem solução inteira.

Teorema 5.8. Uma matriz B cujas entradas $b_{ij} \in \{0, +1, -1\}$ é totalmente unimodular se não mais do que duas componentes em cada coluna são não nulas e podemos partir o conjunto de índices linha de B em dois subconjuntos I_1 e I_2 de tal modo que

1. se uma coluna tem duas componentes não nulas com o mesmo sinal, então as linhas correspondentes têm os seus índices em subconjuntos diferentes;
2. se uma coluna tem duas componentes não nulas de sinal diferente, então as linhas correspondentes têm os seus índices no mesmo subconjunto.

Demonstração. A prova vai ser feita por indução sobre a ordem das submatrizes quadradas de B , tendo em conta que qualquer submatriz não nula com um único elemento é unimodular. Assim, seja C uma submatriz quadrada de B de ordem k . Se C tem uma coluna de zeros então é singular. Se C tem uma coluna com uma única componente não nula, então podemos expandir o respectivo determinante ao longo dessa coluna, pelo que o resultado decorre da hipótese de indução. No último caso, quando C tem duas componentes não nulas, em cada uma das suas colunas, as condições 1. e 2. implicam que, para qualquer índice coluna de C , j , se verifique a igualdade

$$\sum_{i \in I_1} b_{ij} = \sum_{i \in I_2} b_{ij},$$

pelo que as linhas de C são linearmente dependentes e, conseqüentemente, C é singular. \square

Com base neste teorema podemos concluir que as matrizes de incidência arco vértice de digrafos são totalmente unimodulares. Com efeito, no caso de um digrafo \vec{G} , podemos partir os índices linha de $B_{\vec{G}}$ nos subconjuntos $I_1 = \emptyset$ e $I_2 = V(\vec{G})$, os quais verificam as condições exigidas pelo Teorema 5.8.

Teorema 5.9. Seja \vec{G} um digrafo de ordem n e dimensão $m \geq 1$ e seja $B_{\vec{G}}$ a correspondente matriz de incidência arco-vértice. Se \vec{G} tem k componentes, então $B_{\vec{G}}$ tem característica $n - k$.

Demonstração. Sejam $\vec{G}_1, \dots, \vec{G}_k$ as k componentes de \vec{G} que se supõem tais que $|E(\vec{G}_j)| = m_j$ e $|V(\vec{G}_j)| = n_j$, para $j = 1, \dots, k$, e sejam $B_{\vec{G}_1}, \dots, B_{\vec{G}_k}$ as correspondentes submatrizes de $B_{\vec{G}}$. É claro que cada componente $B_{\vec{G}_j}$ tem uma árvore abrangente \vec{T}_j com $n_j - 1$ arcos, cuja matriz de incidência arco-vértice $B_{\vec{T}_j}$ tem n_j linhas e $n_j - 1$ colunas. Tendo em conta que em T_j existe pelo menos um vértice de grau 1, o qual vamos denotar por v_{1_j} e (sem perda de generalidade) escolher para índice da primeira linha de $B_{\vec{T}_j}$, podemos escrever esta matriz de incidência arco-vértice de \vec{T}_j na seguinte forma:

$$B_{\vec{T}_j} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0^T \\ \hat{u} & B_{\vec{T}_j - v_{1_j}} \end{pmatrix}.$$

Repetindo este procedimento para a subárvore que se obtém eliminando o vértice v_{1_j} de \vec{T}_j bem como para as restantes subárvores, obtém-se:

$$B_{\vec{T}_j} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & \pm 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & \dots & * & \pm 1 \\ * & * & \dots & * & * \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

donde se conclui que $B_{\vec{T}_j}$ tem característica não inferior $n_j - 1$ e, uma vez que a soma das linhas de $B_{\vec{T}_j}$ dá o vector nulo, a característica é precisamente $n_j - 1$. Uma vez que qualquer submatriz de $B_{\vec{G}_j}$ que contenha as colunas de $B_{\vec{T}_j}$ define um subgrafo com pelo menos um circuito, podemos concluir que $B_{\vec{G}_j}$ não tem mais do que $n_j - 1$ colunas linearmente independentes. Adicionalmente, tendo em conta que $B_{\vec{G}}$ se pode escrever como uma sequência dos blocos $B_{\vec{G}_1}, \dots, B_{\vec{G}_k}$, os quais determinam a característica $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_k - 1) = n - k$. \square

Corolário 5.10. *Dada uma árvore T de ordem n com pelo menos uma aresta, sendo \vec{T} o digrafo obtido de T depois de atribuída uma orientação às arestas, $B_{\vec{T}}$ tem característica $n - 1$ e qualquer submatriz de $B_{\vec{T}}$ quadrada de ordem $n - 1$ é não singular.*

Demonstração. A primeira parte decorre directamente do Teorema 5.9, pelo que apenas vamos provar a segunda. Suponha que as linhas de $B_{\vec{T}}$ estão ordenadas tal como em (5.4). Uma vez que se eliminarmos a n -ésima linha é imediato concluir que as colunas continuam linearmente independentes, vamos supor que se elimina a i -ésima linha, com $i < n$, e que a característica da matriz passou a ser $n - 2$. Então, a i -ésima coluna da submatriz obtida passou a ter uma única entrada não nula e a ser combinação linear das restantes. Porém, uma vez que cada coluna desta submatriz tem no máximo duas entradas não nulas com valor ± 1 , esta combinação linear obriga a utilizar exclusivamente coeficientes nulos ou com valor ± 1 , o que é equivalente à obtenção de um circuito em T e constitui uma contradição. \square

Teorema 5.11 (Matrix-tree theorem). *Dado um grafo arbitrário G de ordem n , denotando por $t(G)$ o número de árvores abrangentes de G ,*

$$t(G) = \det(L_G[j]),$$

onde j denota um vértice de G arbitrariamente escolhido e $L_G[j]$ denota a submatriz da matriz laplaciana L_G obtida depois de se eliminar a j -ésima linha e a j -ésima coluna.

Demonstração. Vamos começar por atribuir uma orientação às arestas de G , obtendo-se um digrafo \vec{G} , donde $L_G = B_{\vec{G}} B_{\vec{G}}^T$.

Suponha que o número de arestas de G é inferior a $n - 1$ e, sem perda de generalidade, que $j = n$. Sendo \hat{b}_i^T a i -ésima linha de $B_{\vec{G}}$, podemos concluir que $\hat{b}_1^T, \dots, \hat{b}_{n-1}^T$ são vectores linearmente dependentes, pelo que existem escalares $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ não todos nulos tais que $\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \hat{b}_i^T = 0$. Adicionalmente, a k -ésima coluna de $L_G[n]$ vem dada por $\hat{l}_k = \begin{bmatrix} \hat{b}_1^T \\ \vdots \\ \hat{b}_{n-1}^T \end{bmatrix} \hat{b}_k$, para $k = 1, \dots, n - 1$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k \hat{l}_k &= \begin{bmatrix} \hat{b}_1^T \\ \vdots \\ \hat{b}_{n-1}^T \end{bmatrix} \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k \hat{b}_k \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, as colunas de $L_G[n]$ são linearmente dependentes, pelo que o seu determinante é zero e coincide com o número de árvores abrangentes de G (uma vez que, tendo menos do que $n - 1$ arestas, é necessariamente desconexo).

Resta considerar o caso em que o número de arestas de G é não inferior a $n - 1$. Nestas condições, dado um subconjunto $X \subseteq E(G)$ de $n - 1$ arestas, temos duas possibilidades:

1. O subconjunto X contém pelo menos um circuito e, conseqüentemente, determina $n - 1$ colunas de $B_{\vec{G}}$ linearmente dependentes (note-se que $\text{Circuitos}(\vec{G}) = \text{Ker}(B_{\vec{G}})$), pelo que a correspondente submatriz quadrada de ordem $n - 1$ tem determinante nulo.
2. O subconjunto X não contém circuitos, pelo que (uma vez que $|X| = n - 1$) define uma árvore abrangente. Logo, as correspondentes colunas de $B_{\vec{G}}$ são linearmente independentes e definem uma matrix $n \times (n - 1)$ onde, tendo em conta o Corolário 5.10, qualquer submatriz quadrada de ordem $n - 1$ é não singular.

Como conseqüência, denotando por $B_{\vec{G}}[j]$ a submatriz que se obtém de $B_{\vec{G}}$ eliminando a linha associada ao vértice j , por B_X a submatriz de $B_{\vec{G}}[j]$ determinada pelas colunas associadas a $X \subseteq E(\vec{G})$ e sabendo que $L_G[j] = B_{\vec{G}}[j] B_{\vec{G}}^T[j]$,

por aplicação da fórmula de Binet-Cauchy (ver, por exemplo, [31], pag. 10) ao cálculo do determinante de $B_{\vec{G}}[j]B_{\vec{G}}^T[j]$, obtém-se

$$\begin{aligned} \det(L_G[j]) &= \det(B_{\vec{G}}[j]B_{\vec{G}}^T[j]) \\ &= \sum_{X \subseteq E(\vec{G}) \wedge |X|=n-1} \det(B_X B_X^T) \\ &= \sum_{X \subseteq E(\vec{G}) \wedge |X|=n-1} (\det(B_X))^2. \end{aligned}$$

Finalmente, uma vez que a matriz $B_{\vec{G}}$ é totalmente unimodular e, pelo Teorema 5.8, todas as suas submatrizes quadradas não singulares têm determinante ± 1 , obtém-se o resultado pretendido. \square

Teorema 5.12 (desigualdades de Courant-Weyl). *Denotando por $\gamma_1(Z), \gamma_2(Z), \dots, \gamma_n(Z)$ os valores próprios da matriz quadrada real e simétrica Z que se supõem ordenados de tal forma que $\gamma_1(A) \leq \gamma_2(A) \leq \dots \leq \gamma_n(A)$, se A e B são duas matrizes quadradas reais e simétricas de ordem n e $C = A + B$, então*

$$\begin{aligned} \gamma_{i+j+1}(C) &\leq \gamma_{i+1}(A) + \gamma_{j+1}(B), \\ \gamma_{n-i-j}(C) &\geq \gamma_{n-i}(A) + \gamma_{n-j}(B), \end{aligned}$$

onde, $0 \leq i, j$ e $i + j + 1 \leq n$.

Como consequência imediata do Teorema 5.12, dado um grafo arbitrário de ordem n , G , e considerando $G + e$ o grafo obtido de G depois de se adicionar uma aresta e , obtém-se as desigualdades:

$$0 = \theta_1(L_G) = \theta_1(L_{G+e}) \leq \theta_2(L_G) \leq \theta_2(L_{G+e}) \leq \dots \leq \theta_n(L_G) \leq \theta_n(L_{G+e}).$$

Logo, uma vez que $\text{tr}(L_G) = 2|E(G)|$ e $\text{tr}(L_{G+e}) = 2(|E(G)| + 1)$, podemos concluir que $\sum_{j=1}^n (\theta_j(L_{G+e}) - \theta_j(L_G)) = 2$, pelo menos uma das desigualdades $\theta_j(L_G) \leq \theta_j(L_{G+e})$ é estrita e

$$\theta_j(L_{G+e}) - \theta_j(L_G) \leq 2, \text{ para } j = 1, \dots, n.$$

5.2 Relações entre valores próprios das matrizes laplaciana e de adjacência

Teorema 5.13. *Dado um grafo arbitrário G , verificam-se as desigualdades*

$$\delta(G) \leq \theta_n(L_G) + \lambda_{\min}(A_G) \leq \Delta(G).$$

Demonstração. Vamos provar primeiro a desigualdade da esquerda e depois a desigualdade da direita. Assim, seja G um grafo de ordem n .

1. Se λ é um valor próprio de A_G e \hat{v} é um vector de norma unitária do correspondente subespaço próprio, então $\hat{v}^T L_G \hat{v} = \hat{v}^T (D_G - A_G) \hat{v} = \hat{v}^T D_G \hat{v} - \hat{v}^T A_G \hat{v} = \sum_{j=1}^n d_G(j) \hat{v}_j^2 - \lambda = \sum_{j=1}^n \hat{v}_j^2 (d_G(j) - \lambda)$. Logo, no caso de $\lambda = \lambda_{\min}(A_G)$, obtém-se $\hat{v}^T L_G \hat{v} = \sum_{j=1}^n \hat{v}_j^2 (d_G(j) - \lambda_{\min}(A_G))$, pelo que $\theta_n(L_G) \geq \sum_{j=1}^n \hat{v}_j^2 (d_G(j) - \lambda_{\min}(A_G)) \geq \delta(G) - \lambda_{\min}(A_G)$ e, consequentemente,

$$\delta(G) - \theta_n(L_G) \leq \lambda_{\min}(A_G). \quad (5.5)$$

2. Se θ é um vector próprio de L_G e \hat{u} é um vector de norma unitária pertencente ao correspondente subespaço próprio, então $\theta = \hat{u}^T L_G \hat{u} = \hat{u}^T (D_G - A_G) \hat{u} = \hat{u}^T D_G \hat{u} - \hat{u}^T A_G \hat{u} = \sum_{j=1}^n d_G(j) \hat{u}_j^2 - \hat{u}^T A_G \hat{u}$, donde $\hat{u}^T A_G \hat{u} = \sum_{j=1}^n \hat{u}_j^2 (d_G(j) - \theta)$. Logo, no caso de $\theta = \theta_n(L_G)$, obtém-se $\hat{u}^T A_G \hat{u} = \sum_{j=1}^n \hat{u}_j^2 (d_G(j) - \theta_n(L_G))$ e, consequentemente, $\lambda_{\min}(A_G) \leq \sum_{j=1}^n \hat{u}_j^2 (d_G(j) - \theta_n(L_G)) \leq \Delta(G) - \theta_n(L_G)$, pelo que

$$\lambda_{\min}(A_G) \leq \Delta(G) - \theta_n(L_G). \quad (5.6)$$

□

Verifica-se assim que

$$\delta(G) - \lambda_{\min}(A_G) \leq \theta_n(L_G) \leq \Delta(G) - \lambda_{\min}(A_G)$$

e que $\Delta(G) - \lambda_{\min}(A_G)$ é um majorante para $\theta_n(L_G)$ mais forte do que o obtido no Lema 5.2 (uma vez que $\Delta(G) - \lambda_{\min}(A_G) \leq 2\Delta(G)$ e esta desigualdade só se verifica na forma de igualdade no caso de grafos bipartidos regulares).

Teorema 5.14. *Dado um grafo G tal que $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $d_G(v_1) \leq d_G(v_2) \leq \dots \leq d_G(v_n)$, é válida a seguinte desigualdade*

$$\lambda_{\min}(A_G) + \theta_2(L_G) \leq \frac{d_G(v_1) + d_G(v_2)}{2}. \quad (5.7)$$

Demonstração. Tendo em conta que $D_G = L_G + A_G$, considerando o vector de norma unitária $\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_1 - \hat{e}_2)$ que é ortogonal a \hat{e} , $\bar{u}^T D_G \bar{u} = \frac{d_G(v_1) + d_G(v_2)}{2}$ e, consequentemente,

$$\begin{aligned} \frac{d_G(v_1) + d_G(v_2)}{2} &\geq \min_{0 \neq \hat{u} \perp \hat{e}} \frac{\hat{u}^T D_G \hat{u}}{\hat{u}^T \hat{u}} \\ &\geq \min_{0 \neq \hat{w} \perp \hat{e}} \frac{\hat{w}^T L_G \hat{w}}{\hat{w}^T \hat{w}} + \min_{0 \neq \hat{v} \perp \hat{e}} \frac{\hat{v}^T A_G \hat{v}}{\hat{v}^T \hat{v}} \\ &\geq \theta_2(L_G) + \min_{\hat{v} \neq 0} \frac{\hat{v}^T A_G \hat{v}}{\hat{v}^T \hat{v}} \\ &= \theta_2(L_G) + \lambda_{\min}(A_G). \end{aligned}$$

□

Considerando um grafo bipartido G com a bipartição $V(G) = X \cup Y$ e o digrafo \vec{G} obtido de G orientando as arestas de X para Y , uma vez que as entradas não nulas de cada linha da matriz $B_{\vec{G}}$ têm todas o mesmo sinal,

$$B_{\vec{G}}^T B_{\vec{G}} = B_G^T B_G = 2I_n + A_{L(G)}.$$

Em [34], com base na constatação que $B_{\vec{G}}^T B_{\vec{G}}$ e $B_{\vec{G}} B_{\vec{G}}^T$ têm os mesmos valores próprios não nulos, conclui-se o seguinte resultado:

Teorema 5.15. *Se G é um grafo bipartido, então $\theta(> 0)$ é um valor próprio da matriz laplaciana L_G se e somente se $\theta - 2(> -2)$ é valor próprio da matriz de adjacência $A_{L(G)}$ do correspondente grafo linha.*

5.3 Representação espectral da matriz laplaciana

Seja L_G a matriz laplaciana do grafo G de ordem n , pelo que os seus valores próprios são não negativos. Seja U uma matriz cujas colunas são os vectores próprios de L_G que, sem perda de generalidade, vamos considerar ortonormais. Consequentemente, U é unitária e, sendo Θ a matriz diagonal dos correspondentes valores próprios de L_G , ou seja, $\Theta = \text{diag}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$,

$$L_G U = U \Theta \quad \Leftrightarrow \quad L_G = U \Theta U^T = (U \Theta^{\frac{1}{2}})(\Theta^{\frac{1}{2}} U^T).$$

Logo, sendo $\Phi = [\sqrt{\theta_1(L_G)}\hat{u}_1, \sqrt{\theta_2(L_G)}\hat{u}_2, \dots, \sqrt{\theta_n(L_G)}\hat{u}_n]$, $L_G = \Phi \Phi^T$, ou seja,

$$\begin{aligned} L_G &= ([\sqrt{\theta_1(L_G)}\hat{u}_1, 0, \dots, 0] + [0, \sqrt{\theta_2(L_G)}\hat{u}_2, \dots, 0] + [0, 0, \dots, \sqrt{\theta_n(L_G)}\hat{u}_n]) \begin{pmatrix} \sqrt{\theta_1(L_G)}\hat{u}_1^T \\ \sqrt{\theta_2(L_G)}\hat{u}_2^T \\ \vdots \\ \sqrt{\theta_n(L_G)}\hat{u}_n^T \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^n \theta_j(L_G) \hat{u}_j \hat{u}_j^T. \end{aligned}$$

Nestas condições,

$$\sum_{i=1}^n \Phi_{ij}^2 = \theta_j(L_G) \sum_{i=1}^n u_{ij}^2 = \theta_j(L_G)$$

e, consequentemente, sendo P uma matriz de permutação, podemos concluir que os valores próprios da matriz $\Phi' = P\Phi P^T$ se mantêm invariantes (a menos de eventual troca da respectiva ordem, determinada pelos índices). Podemos concluir então que grafos isomorfos são co-espectrais, quer relativamente às matrizes de adjacência generalizadas (onde se inclui a matriz de adjacência), quer relativamente às respectivas laplacianas (com e sem sinal). Na verdade, $\theta_j(L_G) = \sum_{i=1}^n \Phi_{ij}^2$ é um polinómio simétrico.

Utilizando outro ponto de vista, assumindo que os valores próprios repetidos ocorrem consecutivamente ao longo da diagonal principal de Θ e $k_i = \dim \varepsilon(L_G, \theta_i(L_G))$, para $i = 1, \dots, m$, onde m denota o número de valores próprios distintos e $\varepsilon(L_G, \theta_i)$ denota o subespaço invariante de L_G associado ao valor próprio θ_i , obtêm-se

$$U^T L_G U = \theta_1(L_G)E_1 + \dots + \theta_m(L_G)E_m,$$

onde

$$E_1 = \begin{pmatrix} I_{k_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_{k_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, E_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_{k_m} \end{pmatrix}.$$

Nestas condições,

$$\begin{aligned} L_G &= \theta_1(L_G)UE_1U^T + \theta_2(L_G)UE_2U^T + \dots + \theta_m(L_G)UE_mU^T \\ &= \theta_1(L_G)P_1 + \theta_2(L_G)P_2 + \dots + \theta_m(L_G)P_m, \end{aligned}$$

com $P_i = UE_iU^T$, para $i = 1, \dots, m$, o que constitui a decomposição espectral de L_G . Note-se que se $i \neq j$ $P_iP_j = 0$, $P_i^2 = P_i = P_i^T$ e $P_iL_G = L_GP_i$, para cada i , então

$$L_G^k = \theta_1^k(L_G)P_1 + \dots + \theta_m^k(L_G)P_m.$$

Por outro lado, P_i é a projecção ortogonal de \mathbb{R}^n no subespaço invariante $\varepsilon(\theta_i)$, para $i = 1, \dots, m$.

Estas conclusões também se aplicam às matrizes de adjacência dos grafos e, nesse contexto, as projecções dos vectores da base canónica \hat{e}_j em $\varepsilon(\theta_i)$, $P_i\hat{e}_1, \dots, P_i\hat{e}_n$, constituem o que alguns autores designam por *eutatic star* em $\varepsilon(\theta_i(L_G))$. É possível determinar uma partição do conjunto de vértices $V(G) = \{1, \dots, n\}$ nos subconjuntos X_1, \dots, X_m tais que o conjunto de vectores $\{P_i\hat{e}_j : j \in X_i\}$ constitui uma base para $\varepsilon(L_G, \theta_i(L_G))$. Esta partição designa-se por *partição estrela* de G nas células X_1, \dots, X_m . Prova-se que $\bigcup_{i=1}^m \{P_i\hat{e}_j : j \in X_i\}$ é uma base para \mathbb{R}^n que se designa por *base estrela*.

Teorema 5.16. *As seguintes afirmações são equivalentes para cada i .*

1. $\{P_i\hat{e}_j : j \in X_i\}$ é uma base para $\varepsilon(\theta_i)$;
2. $\mathbb{R}^n = \varepsilon(\theta_i) \oplus \langle \hat{e}_j : j \notin X_i \rangle$;
3. $|X_i| = k_i$ e θ_i não é valor próprio de $G \setminus X_i$.

6

Apêndice

6.1 Grafos Planares e Generalizações

Os exemplos mais naturais de grafos são os que se referem à representação de mapas de estradas. Em muitos casos, na ausência de viadutos, trata-se de grafos que apresentam a particularidade de se poderem representar numa folha de papel sem que as arestas se cruzem, uma vez que aos cruzamentos e entroncamentos correspondem vértices. Quando um grafo, G , admite uma representação numa superfície, S , sem que existam arestas que se intersectem, diz-se que G é realizável em S . Um grafo diz-se planar se é realizável no plano. Note-se que, apesar de um dado grafo admitir uma representação com arestas cruzadas, isso não significa que esse grafo não seja planar. Com efeito, pode existir outro modo de o representar onde não ocorram arestas cruzadas.

6.1.1 Fórmula de Euler e aplicações

Dada uma representação plana de um grafo planar, a qual pode ser obtida pela projecção estereográfica de uma realização do grafo na esfera, para além das regiões ou faces limitadas, existe uma região ou face exterior ao grafo (i. e, a porção de espaço que o envolve) que se designa por *região ou face ilimitada*. Neste texto, $F_0(G)$ denota o conjunto de faces de uma realização plana de um grafo G .

O teorema que se segue consta (sem prova) numa carta enviada por Euler, em 1750, a Goldbach. De acordo com (Beineke, 1997), as primeiras demonstrações da fórmula de Euler para grafos planares, foram obtidas por Legendre (em 1794), l'Huilier em (1811 e 1812) e Cauchy em (1813).

Teorema 6.1 (da Fórmula de Euler, 1750). *Se G é um grafo conexo e planar então, para uma sua realização plana, verifica-se a igualdade*

$$|F_0(G)| = |E(G)| - |V(G)| + 2.$$

Demonstração. Vamos fazer a prova por indução sobre o número de arestas, tendo em conta que o resultado é verdadeiro para grafos conexos planares não

nulos com zero ($0 - 1 + 2 = 1$) ou uma aresta. No segundo caso se $|E(G)| = 1$ então $|V(G)| = 2$ e $|F_0(G)| = 1$ e obtém-se a igualdade $1 - 2 + 2 = 1$.

Seja G_n um grafo obtido após a representação de n arestas. Em geral, para $n > 1$, o grafo G_n obtém-se a partir de G_{n-1} acrescentando a $E(G_{n-1})$ uma aresta, de uma das seguintes formas:

1. A nova aresta incide em vértices de G_{n-1} (ou seja, liga dois vértices $x, y \in V(G_{n-1}) = V(G_n)$).
2. A nova aresta liga um vértice de G_{n-1} a um novo vértice (pelo que $x \in V(G_{n-1}) = V(G_n) \setminus \{y\}$).

Seja $n > 1$ e, por hipótese de indução, vamos supor que a fórmula de Euler é verdadeira para grafos conexos planares com menos do que n arestas.

Em 1, a nova aresta vai provocar o aparecimento de um novo ciclo, consequentemente, uma nova face, pelo que $|F_0(G_n)| = |F_0(G_{n-1})| + 1$. Assim, dado que $|E(G_n)| = |E(G_{n-1})| + 1$ e $V(G_n) = V(G_{n-1})$, conclui-se que a fórmula de Euler continua válida para G_n .

Em 2, a nova aresta não provoca o aparecimento de nenhuma face, pelo que $|F_0(G_n)| = |F_0(G_{n-1})|$. Uma vez que $|E(G_n)| = |E(G_{n-1})| + 1$ e $|V(G_n)| = |V(G_{n-1})| + 1$, conclui-se que a fórmula de Euler também se verifica para G_n . \square

6.1.2 Duais de grafos e digrafos planos

Dado um grafo planar, G , designa-se por grafo dual¹ de G e denota-se por G^* o grafo (multigrafo) obtido de G por aplicação do seguinte procedimento:

1. A cada face de G faz-se corresponder um vértice de G^* .
2. A cada aresta $e \in E(G)$ faz-se corresponder uma aresta $e^* \in E(G^*)$ que liga duas faces (vértices de $V(G^*)$) vizinhas, cruzando a aresta e .

No caso de grafos orientados, \vec{G} , com excepção dos lacetes, cujo sentido é arbitrário, o sentido de cada um dos arcos, $a^* \in A(\vec{G}^*)$, é determinado dividindo o ciclo orientado C que limita a face correspondente ao vértice incidente v^* em C^+ e C^- (consoante os arcos estejam no sentido positivo ou negativo). Se $a \in C^+$, então o arco de $A(\vec{G}^*)$ que o intersecta tem cauda em v^* , caso contrário esse arco tem cabeça em v^* .

Teorema 6.2 (*). *Seja G um grafo planar e G^* o correspondente dual, podemos concluir o seguinte:*

1. G^* é conexo;
2. se G é conexo, então $(G^*)^* = G$.

¹Alguns autores designam este dual por dual geométrico para o distinguir do dual abstracto, do dual algébrico e do dual combinatório, tendo sido o primeiro proposto por Whitney (Whitney, 1932) e por Lovasz (Lovasz, 1979), o segundo por Wilson (Wilson, 1972) e o terceiro por Harary (Harary, 1969).

Demonstração.

1. Uma vez que podemos passar de uma face f_i para qualquer outra face f_j de G ao longo das arestas de G^* , conclui-se que existe um caminho entre quaisquer dois vértices, v_i^* e v_j^* , de $V(G^*)$.
2. Por construção de G^* , sabe-se que $|V(G^*)| = |F_0(G)|$ e $|E(G^*)| = |E(G)|$. Uma vez que cada aresta da fronteira de cada elemento de $F_0(G^*)$ é atravessada por uma aresta de G , é claro que cada face de G^* contém, pelo menos, um vértice de G . Adicionalmente, tendo em conta que G é conexo, por aplicação da fórmula de Euler, pode concluir-se que $|F_0(G^*)| = |V(G)|$, pelo que cada elemento de $F_0(G^*)$ contém, exactamente, um vértice de G . Consequentemente, partindo-se de G^* e aplicando o procedimento de construção do dual de G^* , obtém-se a construção inicial, i.e., $(G^*)^* = G$.

□

6.1.3 Condições necessárias para grafos planares

Embora o Teorema 6.1 seja válido para multigrafos, tal não acontece para o corolário que se segue.

Corolário 6.3 (do teorema que estabelece a fórmula de Euler). *Se G é um grafo conexo e planar, com $|E(G)| > 1$, então $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$.*

Demonstração. Defina-se o grau de uma região como sendo o número de arestas da sua fronteira considerando-se que se uma aresta ocorre duas vezes ao longo da fronteira de uma dada região (como acontece, por exemplo, com as arestas incidentes em vértices de grau 1), então conta também duas vezes para a determinação do respectivo grau. Uma vez que cada região de um grafo planar G (com $|E(G)| > 1$) tem grau não inferior a 3, podemos concluir que a soma dos graus de todas as regiões r é não inferior a $3r$. Por outro lado, esta soma dos graus de todas as regiões é igual a $2|E(G)|$ (dado que cada aresta conta duas vezes para esta soma). Como consequência, obtém-se a desigualdade $3r \leq 2|E(G)|$. Combinando esta desigualdade com a fórmula de Euler vem que

$$3(|E(G)| - |V(G)| + 2) \leq 2|E(G)| \Leftrightarrow |E(G)| \leq 3|V(G)| - 6.$$

□

Como consequência imediata deste corolário, podemos concluir que o grafo completo de ordem 5 (que usualmente se denota por K_5) não é um grafo planar. Com efeito, $|E(K_5)| = 10 > 9 = 3|V(K_5)| - 6$.

Note-se, porém, que existem grafos não planares, G , que satisfazem a desigualdade $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$, conforme a figura a seguir ilustra.

Um outro modo de utilizar o Corolário 6.3 para se concluir se um grafo é ou não planar, consiste em produzir alterações no grafo (as quais não devem destruir a eventual propriedade de ser planar) e mostrar que o grafo obtido não

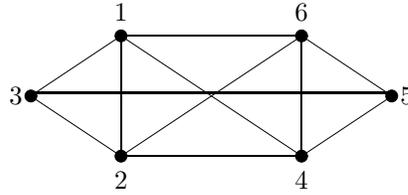


Figura 6.1: Exemplo de um grafo G não planar que satisfaz a desigualdade $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$.

satisfaz o corolário. Uma das alterações mais usuais, utiliza a contracção de uma das arestas do grafo G em estudo, a qual faz decrescer o número de aresta de uma unidade e o número $3|V(G)| - 6$ de 3 unidades, pelo que a desigualdade do Corolário 6.3 poderá passar a ser não satisfeita. Com o recurso a estas contracções, porém, deve ter-se o cuidado de não se produzirem lacetes nem arestas paralelas, uma vez que o corolário não é válido para multigrafos.

O corolário a seguir vai permitir a conclusão de que o grafo bipartido completo $K_{3,3}$ não é planar. Tal como o Corolário 6.3, este corolário também só é válido para grafos.

Corolário 6.4 (do teorema que estabelece a fórmula de Euler). *Se G é um grafo conexo bipartido planar com $|E(G)| > 1$, então $|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4$.*

Demonstração. Esta prova é idêntica à do Corolário 6.3, tendo em conta que, desta vez, (de acordo com o Teorema 1.1) qualquer circuito de um grafo bipartido tem comprimento par. Logo, cada região (ou face) de um grafo conexo bipartido planar tem grau não inferior a 4. Como consequência, sendo r o número de regiões do grafo conexo bipartido planar G , vem que

$$4r \leq 2|E(G)| \Leftrightarrow 4(|E(G)| - |V(G)| + 2) \leq 2|E(G)| \Leftrightarrow |E(G)| \leq 2|V(G)| - 4.$$

□

Deste corolário decorre imediatamente que $K_{3,3}$ é não planar. Com efeito, $|E(K_{3,3})| = 9 > 8 = 2|V(K_{3,3})| - 4$. Como consequência, podemos afirmar que dos Corolários 6.3 e 6.4 decorre a suficiência das condições de Kuratowski para que um grafo não seja planar. A prova de que a condição de Kuratowski (ver Teorema 6.6) é também necessária para que um grafo seja planar pode ser encontrada em (Diestel, 1997).

Teorema 6.5. *Todo o grafo conexo planar tem, pelo menos, um vértice de grau não superior a 5.*

Demonstração. Sendo G um grafo conexo planar e n_i o número de vértices

de grau i (com $\delta(G) \leq i \leq \Delta(G)$), obtêm-se as equações:

$$2|E(G)| = \sum_{i=\delta(G)}^{\Delta(G)} i \times n_i,$$

$$|V(G)| = \sum_{i=\delta(G)}^{\Delta(G)} n_i.$$

Fazendo as respectivas substituições na desigualdade obtida no Corolário 6.3, vem que

$$\frac{1}{2} \sum_{i=\delta(G)}^{\Delta(G)} i \times n_i \leq 3 \sum_{i=\delta(G)}^{\Delta(G)} n_i - 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sum_{i=\delta(G)}^{\Delta(G)} n_i(6 - i) \geq 6.$$

Logo, existe pelo menos um vértice com grau inferior a 6. □

Particularizando o resultado anterior para os grafos bipartidos planares, com facilidade se conclui a existência, nestes grafos, de pelo menos um vértice de grau não superior a 3.

6.1.4 Condições necessárias e suficientes para grafos planares

Teorema 6.6 (Kuratowski, 1930). *Se G é um grafo, então são equivalentes as seguintes afirmações:*

1. G é planar;
2. G não contém K_5 nem $K_{3,3}$ como menores combinatórios;
3. G não contém K_5 nem $K_{3,3}$ como menores topológicos.

Demonstração (1 \Rightarrow 2) Se G é um grafo planar, então qualquer dos seus menores, G' , é um grafo planar e, pelo Corolário 6.3, $|E(G')| \leq 3|V(G')| - 6$. Logo, uma vez que K_5 não é planar ($10 = |E(K_5)| > 3|V(K_5)| - 6 = 9$), conclui-se que K_5 não é um menor de G . Identicamente, no caso de G admitir como menor um grafo bipartido, G' , do Corolário 6.4 decorre a desigualdade $|E(G')| \leq 2|V(G')| - 4$ e, uma vez que $K_{3,3}$ não a satisfaz ($9 = |E(K_{3,3})| > 2|V(K_{3,3})| - 4 = 8$), conclui-se que não é um menor de G .

(2 \Rightarrow 3) Dado que qualquer menor topológico de um grafo G é também um menor combinatório, se G não admite K_5 nem $K_{3,3}$ como menores combinatórios, então também não admite K_5 nem $K_{3,3}$ como menores topológicos, uma vez que estes também são combinatórios.

(3 \Rightarrow 1) Esta prova pode ser consultada, por exemplo, em (Distel, 1995) ou (Parthasarathy, 1994).

□

Dado um grafo conexo G , designa-se por *corte* (ou *cocircuito*) de G todo o conjunto de arestas que desconexa G . Assim, dada uma partição de $V(G)$ nos subconjuntos não vazios V_1 e V_2 , o subconjunto de aresta com um extremo em V_1 e outro em V_2 é um corte (ou cocircuito) de G que se denota por $E(V_1, V_2)$. Neste caso, usualmente, o corte $E(V_1, V_2)$ também se denota por $\partial(V_1)$ ou $\partial(V_2)$ que corresponde ao conjunto de arestas de G com um único extremo em V_1 ou com um único extremo em V_2 , consoante o caso.

Tendo em conta que G^* é um dual algébrico de G se existe uma função $\phi : E(G) \rightarrow E(G^*)$ tal que C é um ciclo de G se e somente se $\phi(C)$ é um corte (cocircuito) de G^* , Whitney introduziu a seguinte condição necessária e suficiente para um grafo ser planar:

Teorema 6.7 (Whitney, 1932). *Um grafo é planar se e somente se admite um dual algébrico.*

Demonstração. Ver [38] e [39].

□

6.1.5 Grafos platónicos

Um grafo diz-se *platónico* se é constituído por um único vértice, ou se é um grafo com mais do que uma aresta, conexo, planar, regular, no qual todas as faces têm o mesmo grau. São grafos platónicos, o grafo constituído por um vértice isolado (K_1), os grafos cíclicos (que correspondem aos polígonos regulares), e os grafos formados pelas arestas dos 5 poliedros convexos regulares: o tetraedro, o hexaedro (ou cubo), o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro. Um *polígono regular* é uma figura poligonal fechada limitada por um número finito de segmentos (arestas) com igual comprimento e com os mesmos ângulos. Existe um número infinito de polígonos regulares, aos quais correspondem grafos cíclicos.

O teorema a seguir estabelece a existência de apenas 5 poliedros regulares distintos com mais do que duas faces (aos quais correspondem cinco grafos platónicos).

Teorema 6.8. *Existem somente 5 grafos platónicos distintos de K_1 e dos grafos cíclicos.*

Demonstração. Seja G um grafo d -regular (i.e., qualquer que seja $v \in V(G)$ $d_G(v) = d$), onde cada face tem grau f . Uma vez que $G \neq K_1$, podemos concluir que $d > 0$ e, dado que $|E(G)| > 1$, podemos concluir ainda que $d > 1$. Adicionalmente, dado que G não é um grafo cíclico, conclui-se que $d > 2$, ou seja, $d \geq 3$ e é claro que $f \geq 3$,

$$f|F_0(G)| = 2|E(G)| = d|V(G)| \Rightarrow |E(G)| = \frac{d|V(G)|}{2},$$

e $|F_0(G)| = \frac{2|E(G)|}{f}$. Como consequência, uma vez que G é planar, por aplicação da fórmula de Euler, vem que

$$\begin{aligned} \frac{2|E(G)|}{f} = \frac{d|V(G)|}{2} - |V(G)| + 2 &\Leftrightarrow \frac{d|V(G)|}{f} = \frac{d|V(G)|}{2} - |V(G)| + 2 \\ &\Leftrightarrow |V(G)|\left(\frac{d}{f} + 1 - \frac{d}{2}\right) = 2 \\ &\Leftrightarrow |V(G)|(2d + 2f - fd) = 4f \quad (6.1) \end{aligned}$$

Da igualdade (6.1) decorre a inequação

$$2d + 2f - fd > 0 \Leftrightarrow -2d - 2f + fd + 4 < 4 \Leftrightarrow (f - 2)(d - 2) < 4,$$

a qual, para $f \geq 3$ e $d \geq 3$, apresenta como possíveis soluções apenas os pares de valores (d, f) : $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 3)$ e $(5, 3)$ que correspondem, respectivamente, ao tetraedro, ao hexaedro, ao dodecaedro, ao octaedro e ao icosaedro. \square

Utilizando a igualdade (6.1), da qual se conclui que $|V(G)| = \frac{4f}{2f+2d-fd}$, podemos obter a tabela a seguir, onde se apresentam os graus dos vértices (d), os graus das faces (f), o número de vértices, o número de arestas e o número de faces, para cada um dos poliedros convexos regulares associados aos diferentes grafos platónicos.

d	f	$ V(G) $	$ E(G) $	$ F_0(G) $	Designação
3	3	4	6	4	Tetraedro
3	4	8	12	6	Hexaedro
3	5	20	30	12	Dodecaedro
4	3	6	12	8	Octaedro
5	3	12	30	20	Icosaedro

Na Figura 6.2 representam-se os 5 grafos platónicos. Na primeira linha o tetraedro, o hexaedro e o octaedro e na segunda linha o dodecaedro e o icosaedro.

6.1.6 Grafos em variedades compactas orientáveis

Uma vez que a projecção estereográfica converte figuras do planar em figuras da esfera e reciprocamente, podemos afirmar que um grafo é planar se e só se é realizável na esfera. Nesta secção, excepção feita ao plano (que não é compacto), vamos considerar unicamente realizações de grafos em variedades compactas de dimensão 2 orientáveis. Uma *variedade compacta* de dimensão 2 é uma superfície S com as seguintes propriedades:

1. cada ponto de S tem uma vizinhança homeomorfa a uma bola aberta;
2. toda a cobertura de S , com bolas abertas, tem uma subcobertura finita.

Adicionalmente, dizemos que esta superfície S é *orientável* se é possível definir um referencial tridimensional (com dois eixos no plano tangente à superfície)

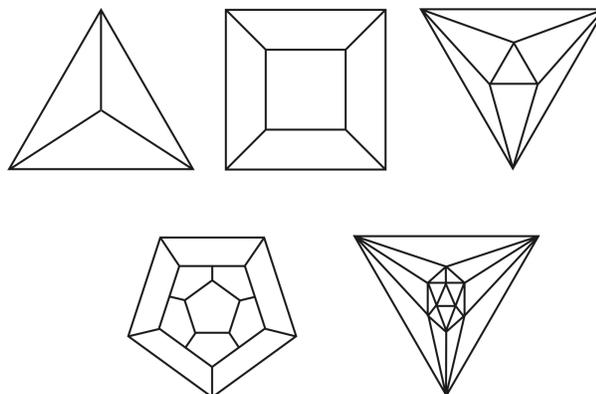


Figura 6.2: Grafos platônicos.

que se desloque ao longo de qualquer curva fechada representada em S , sem alterar o sentido dos eixos quando regressa ao ponto inicial.

Mais particularmente, nesta secção, apenas vamos considerar a esfera (S_0), torus (S_1), duplo torus (S_2), triplo torus (S_3), etc., ou superfícies topologicamente equivalentes a estas. Tais superfícies serão denotadas, genericamente, de agora em diante, por S_g , onde g denota o genus da superfície. A realização de um grafo G numa superfície S_g , implica que cada vértice de G corresponda a um ponto de S_g e cada aresta corresponda a uma curva simples (ver definição mais adiante), ligando dois vértices e que nenhum par de curvas se intersecte em nenhum ponto com excepção dos respectivos pontos extremos (vértices). Assim, do ponto de vista topológico, um grafo G é um par $(V(G), E(G))$, onde $E(G)$ denota um conjunto finito de curvas simples de S_g (que também se designam por arestas), tais que duas quaisquer delas ou têm intersecção vazia ou se intersectam numa das suas extremidades, e $V(G)$ denota o conjunto de vértices, os quais correspondem às extremidades das curvas. Neste contexto, diz-se que um grafo, G , é conexo, se quaisquer dois vértices se podem ligar por uma curva ou por concatenação de várias curvas (arestas) de $E(G)$. Uma curva em \mathbb{E}^2 (espaço euclidiano de dimensão 2) é um subconjunto de \mathbb{E}^2 , C , para o qual existe uma aplicação contínua injectiva $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^2$ tal que $c([0, 1]) = C$. Se c é apenas injectiva em $[0, 1[$ e $c(0) = c(1)$, diz-se que C é uma *curva fechada de Jordan*. Nestas condições, uma curva é um subconjunto de \mathbb{E}^2 homeomorfo ao intervalo $[0, 1]$ e uma curva fechada de Jordan é um subconjunto de \mathbb{E}^2 homeomorfo à circunferência. Qualquer destas curvas, C , se designa por *curva simples* e a respectiva aplicação, c , por *parametrização* de C .

Tendo em conta que um subconjunto C de um espaço \mathbb{E} separa esse espaço, se $\mathbb{E} \setminus C$ tem mais do que uma componente conexa, Camille Jordan (1838-1922) provou, nos anos de 1887-1893, o teorema de separação para \mathbb{E}^2 que a seguir se apresenta.

Teorema 6.9 (da curva fechada de Jordan). *Se C é uma curva fechada de*

Jordan em \mathbb{E}^2 , então C separa \mathbb{E}^2 .

Demonstração. Ver, por exemplo, (Armstrong, 1997), pag. 112-113. □

Deste teorema decorre que sendo C uma curva fechada de Jordan em \mathbb{E}^2 , então $\mathbb{E}^2 \setminus C$ é a união disjunta de dois conjuntos abertos, $dint(C)$ (domínio interior a C) e $dext(C)$ (domínio exterior a C), tais que $dint(C)$ é limitado, $dext(C)$ é ilimitado e tanto $dint(C)$ como $dext(C)$ são conexos por caminhos². Por outro lado, toda a curva que liga um ponto de $dint(C)$ a um ponto de $dext(C)$ tem pelo menos um ponto comum com C . A realização de um grafo (ou multigrafo) numa superfície S_g proporciona a partição dessa superfície nas componentes conexas de $S_g \setminus C$ que se designam por *regiões*, algumas das quais *celulares*, no sentido em que são homeomorfas a uma bola aberta de E^2 . Sendo $(V(G), E(G))$ uma realização de um grafo em S_g , designa-se por *célula* ou *face* toda a componente conexa do complementar de $E(G)$ em E^2 homeomorfa a uma bola aberta. Uma realização diz-se celular se todas as regiões criadas por essa realização são células ou faces. O conjunto das faces criadas por uma realização celular de G em S_g denota-se por $F_g(G)$. Como regra prática para a detecção de faces (ou células) de um grafo, G , realizado numa superfície S_g , pode adoptar-se a seguinte:

Uma região de G é uma face (ou célula) se e só se a sua fronteira é contractível a um ponto, ou seja, se e só se é possível "reduzi-la", continuamente, até a transformar num ponto.

Note-se que de entre as representações de K_4 , apresentadas na Figura 6.3, apenas a primeira é uma representação celular.

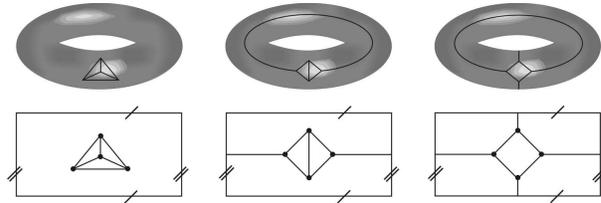


Figura 6.3: Três representações de K_4 no torus, onde só a primeira é celular.

6.1.7 Menores combinatórios e menores topológicos

Existem algumas operações sobre grafos que é conveniente destacar nesta altura, a saber:

1. a *eliminação* de arestas,
2. a *eliminação* de vértices,

²Note-se que todo o espaço topológico conexo por caminhos é conexo (o recíproco, porém, em geral, não é verdadeiro).

3. a *contração* de arestas,
4. e a *subdivisão* de arestas.

Seja G um grafo, $e \in E(G)$ e $E' = \{e_1, \dots, e_k\} \subset E(G)$.

1. Denota-se por $G \setminus e$ a operação de eliminação da aresta e , obtendo-se o grafo tal que $V(G \setminus e) = V(G)$ e $E(G \setminus e) = E(G) \setminus \{e\}$. Mais geralmente, considerando o subconjunto de arestas E' , $G \setminus E'$ corresponde ao grafo obtido de G por eliminação sucessiva (independentemente da ordem) das arestas e_1, \dots, e_k .
2. De um modo semelhante se define a operação de eliminação de vértices, tendo em conta que, neste caso, ao eliminar-se um vértice (ou conjunto de vértices) também se eliminam (automaticamente) as arestas que lhe(s) é (são) incidente(s).
3. A operação de contração de e em G denota-se por G/e e corresponde ao grafo obtido pela sobreposição dos vértices extremos de e e pela eliminação dos lacetes e arestas repetidas, eventualmente produzidas. Mais geralmente, dado um subconjunto de arestas, E' , G/E' corresponde ao grafo obtido após a contração sucessiva (independentemente da ordem) das arestas e_1, \dots, e_k .
4. Designa-se por subdivisão de G a adição de um vértice de grau dois a uma aresta e . Esta operação também se designa por *expansão* de G .

Verifica-se que as operações de eliminação e contração de arestas comutam, i. e, se E' e E'' são dois subconjuntos disjuntos de arestas de um grafo G , então verifica-se a igualdade

$$(G \setminus E')/E'' = (G/E'') \setminus E'.$$

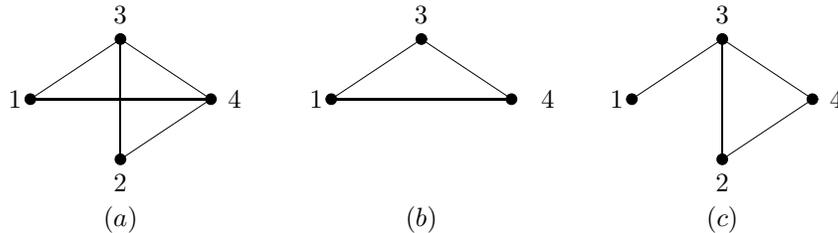


Figura 6.4: Grafos (a) G , (b) $G/23$ e (c) $G \setminus 14$.

Quando um grafo H é obtido de G por sucessivas contrações de arestas diz-se que G é *contractível* a H ou que H é uma *contração* de G .

Um grafo obtido, a partir de um subgrafo de G , por sucessivas operações de eliminação e/ou contração de arestas diz-se um *menor* de G ou *menor combinatorio* de G . Note-se que, de acordo com esta definição, todo o subgrafo de um

grafo é também um seu menor.

Se H é uma expansão de G e se H é um subgrafo de um grafo Y , então diz-se que G é um *menor topológico* de Y . Nestas condições, G é um menor topológico de um grafo Y se existe um subgrafo de Y que é uma expansão de G .

A figura a seguir exemplifica a subdivisão de várias arestas do grafo G da Figura 6.4, obtendo-se um grafo H que corresponde a uma expansão de G .

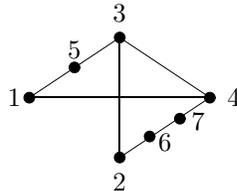


Figura 6.5: Expansão do grafo G da Figura 6.1 (a).

Se H é uma expansão de G e um subgrafo de um grafo Y , então diz-se que G é um *menor topológico* de Y (e dado que todo o grafo é subgrafo de si próprio, G é também um menor topológico do grafo H). De um modo equivalente diz-se que G é um menor topológico de um grafo Y se existe um subgrafo de Y que é uma expansão de G . Das definições de menor topológico e menor combinatório decorre que todo o menor topológico de um grafo Y é também um menor combinatório de Y . O recíproco, porém, em geral, não é verdadeiro.

Dados dois grafos X e Y , se X é um menor de Y , denota-se esse facto por $X \preceq Y$ e com facilidade se prova que esta relação, \preceq , é uma relação de ordem parcial no conjunto dos grafos.

Um critério muito utilizado na verificação se um grafo é planar ou não, consiste na utilização dos seguinte resultado de Kuratowski:

Um grafo é não planar se e só se contém pelo menos uma das configurações não planas básicas, a saber, K_5 e/ou $K_{3,3}$, como menores ou como menores topológicos.

Mais adiante, far-se-à a prova da suficiência das condições de Kuratowski. Antes, porém, vamos introduzir a fórmula de Euler para grafos planares.

6.1.8 Genus de um grafo e fórmula de Euler generalizada

Designa-se por *genus de um grafo* G e denota-se por g_G (não confundir com a cintura de G que se denota por $g(G)$) o menor índice da sucessão de superfícies S_0, S_1, S_2, \dots , em que G é realizável e onde o índice de S_j denota o genus da superfície S_j . Como consequência, pode concluir-se que para os grafos planares G , $g_G = 0$.

Teorema 6.10. *Todo o grafo tem genus.*

Demonstração. Seja G um grafo. Se G é planar, então $g_G = 0$. Suponha-se que G não é planar e, mesmo assim, desenhe-se esse grafo no plano e transfira-se, por projecção estereográfica, esse desenho para a esfera (superfície S_0). Seguidamente, adicionem-se tantas *anças* tubulares quantas as necessárias para que, fazendo passar as arestas que intersectam outras arestas através dessas *anças* tubulares (uma em cada), não existam arestas cruzadas (i.e. não existam arestas que se intersectem em pontos distintos dos vértices). Sendo p o número de *anças* tubulares adicionadas, é claro que $p \leq |E(G)|$. Deformando, continuamente, a superfície obtida é possível produzir um *torus* com p buracos, S_p , onde G se realiza. Consequentemente, tendo em conta que S_p pertence à sequência $S_0, S_1, \dots, S_p, S_{p+1}, \dots$, conclui-se que G tem genus $g_G \leq p$. \square

Deve observar-se que uma esfera com p *anças* tubulares é topologicamente equivalente (i.e., homeomorfa) a um *torus* com p buracos. É claro que se um grafo, G , tem genus g_G , então G pode realizar-se em qualquer superfície S_j , com $j \geq g_G$. No que se segue, sem perda de generalidade, assumiremos que se G é um grafo conexo de genus g , então G é realizável em S_g de tal forma que através de cada buraco de S_g passa pelo menos um anel, formado por vértices e arestas de G , que não é contractível em S_g . Com efeito, se G tem genus g , então G não admite qualquer realização em nenhuma das superfícies S_0, S_1, \dots, S_{g-1} . Consequentemente, cada buraco de S_g é essencial para a realização de G . Logo, cada buraco deve ser atravessado por, pelo menos, uma aresta de G , de tal forma que ligada a outras arestas forme um anel nas condições referidas. Em alternativa, poder-se-ão obter aneis não contractíveis que contornem buracos. Esta situação, porém, é topologicamente equivalente à anterior no sentido em que conduz aos mesmos resultados, com a metodologia a adoptar na prova do teorema a seguir, onde se estabelece a generalização da fórmula de Euler, para a um grafo, G , com realização numa superfície S_{g_G} . Note-se que cortar uma superfície, S_g , ao longo de um anel não contractível que atravessa um buraco ou que contorna um buraco produz, em ambos os casos, uma superfície topologicamente equivalente a uma superfície esférica à qual faltam dois círculos.

Teorema 6.11 (l'Huilier, 1812/1813).³ *Se G é um grafo conexo com genus g , então $|V(G)| + |F_g(G)| - |E(G)| = 2(1 - g)$.*

Demonstração. Seja G um grafo conexo de genus g . Então G é realizável em S_g de tal forma que para cada buraco de S_g existe um anel, não contractível, formado pela concatenação de arestas. Corte-se o torus ao longo de cada um desses g aneis, dupliquem-se os aneis e, consequentemente, as arestas e vértices que definem as fronteiras das regiões circulares que se formaram e coleem-se círculos, de modo a tapar todos essas regiões. Por deformação contínua da superfície deste modo obtida, pode construir-se uma superfície esférica, S_0 , que lhe é topologicamente equivalente, onde o grafo conexo produzido, H , se realiza. Consequentemente, aplicando a fórmula de Euler a H , vem que

³Embora muitas publicações designem este resultado por fórmula de Heawood ou por segunda fórmula de Euler, de acordo com (Biggs et al, 1986), ele foi publicado pela primeira vez por l'Huilier em 1812/1813.

$|V(H)| + |F_0(H)| - |E(H)| = 2$. Tendo em conta que os novos vértices, que agora aparecem em H , $V(H) \setminus V(G)$, são os que se produziram com a duplicação de ciclos provocada pelos cortes efectuados em cada um dos g aneis e tendo em conta que nos ciclos o número de arestas é igual ao número de vértices, conclui-se que $|V(H)| - |V(G)| = |E(H)| - |E(G)|$. Por outro lado, dado que as novas faces em H são as limitadas pelos $2g$ aneis, conclui-se que $|F_0(H)| = |F_g(G)| + 2g$. Logo, fazendo $x = |V(H)| - |V(G)| = |E(H)| - |E(G)|$, vem que

$$\begin{aligned} |V(G)| + |F_g(G)| - |E(G)| &= (|V(H)| - x) + (|F_0(H)| - 2g) - (|E(H)| - x) \\ &= |V(H)| + |F_0(H)| - |E(H)| - 2g \\ &= 2 - 2g. \end{aligned}$$

□

A Figura 6.6 ilustra a demonstração do Teorema 6.11.

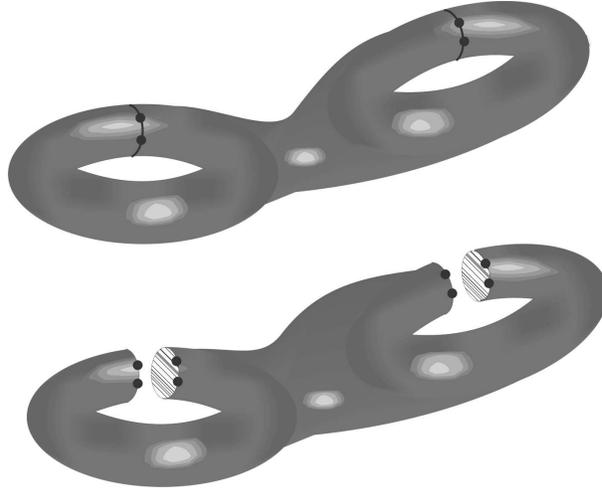


Figura 6.6: Transformação do duplo torus numa superfície homeomorfa à superfície esférica.

Supondo que G é um grafo conexo tal que $|V(G)| \geq 3$, então

$$3|F_{g_G}(G)| \leq 2|E(G)|$$

e, por aplicação do Teorema 6.11 $g_G \geq \frac{1}{6}|E(G)| - \frac{1}{2}(|V(G)| - 2)$. Consequentemente, tendo em conta que g_G é inteiro, conclui-se que

$$g_G \geq \lceil \frac{1}{6}|E(G)| - \frac{1}{2}(|V(G)| - 2) \rceil. \tag{6.2}$$

Teorema 6.12 (Heawood, 1890). *Se $n \geq 3$, então $g_{K_n} \geq \lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \rceil$.*

Demonstração. Uma vez que $n \geq 3$ e K_n é conexo, tendo em conta a desigualdade (6.2), vem que

$$\begin{aligned} g_{K_n} &\geq \lceil \frac{1}{6}|E(K_n)| - \frac{1}{2}(|V(K_n)| - 2) \rceil \\ &= \lceil \frac{n(n-1)}{12} - \frac{n-2}{2} \rceil \\ &= \lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \rceil. \end{aligned}$$

□

A desigualdade recíproca $g_{K_n} \leq \lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \rceil$ e, conseqüentemente, a igualdade, embora tenha sido conjecturada por Heawood em 1890, apenas foi provada em 1968 em (Ringel e Youngs, 1968).

Como corolário do Teorema 6.12, tendo em conta a desigualdade (6.2) e que se H é um supergrafo de um grafo conexo G , então $g_H \geq g_G$ e ainda que, sendo $n = |V(G)|$, K_n é um supergrafo de G , para $n \geq 4$, concluem-se as desigualdades

$$\lceil \frac{1}{6}|E(G)| - \frac{1}{2}(n-2) \rceil \leq g_G \leq \lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \rceil.$$

Embora nem sempre estes minorante e majorante sejam boas aproximações para g_G , existem grafos para os quais eles coincidem. Por exemplo, sendo G um grafo conexo de ordem 52 e dimensão 1.321, 1.322, 1.323, 1.324, 1.325 ou 1.326 vem que

$$196 = \lceil \frac{1}{6}|E(G)| - \frac{1}{2}(n-2) \rceil \leq g_G \leq \frac{(n-3)(n-4)}{12} = 196.$$

6.1.9 Grafos g -platônicos

Um grafo G diz-se g -platónico se tem genus g , é conexo, regular e na sua realização em S_g , toda a aresta está na fronteira de duas faces e todas as faces têm o mesmo grau. Nestas condições, os grafos platónicos são grafos 0-platónicos. Denotando por d o grau dos vértices e por f o grau das faces de um grafo G , da definição de grafo g -platónico vem que, se G é g -platónico, então $|E(G)| = \frac{d|V(G)|}{2}$ e $|F_g(G)| = \frac{d|V(G)|}{f}$. Por outro lado, se $g > 0$, então $d \geq 3$ e $f \geq 3$.

Teorema 6.13. ⁴ Sendo d o grau dos vértices e f o grau das faces de um grafo 1-platónico, verifica-se que o par (d, f) é igual a $(3, 6)$ ou $(4, 4)$ ou $(6, 3)$

Demonstração. Seja G um grafo 1-platónico, $d \geq 3$, $f \geq 3$, $|E(G)| = \frac{d|V(G)|}{2}$, $|F_1(G)| = \frac{d|V(G)|}{f}$ e $|V(G)| + |F_1(G)| - |E(G)| = 2(1-g)$. Então,

$$|V(G)| + \frac{d|V(G)|}{f} - \frac{d|V(G)|}{2} = 2(1-g) = 0 \Leftrightarrow |V(G)|(2f + 2d - df) = 0.$$

⁴Embora só existam grafos 1-platónicos com os pares (d, f) indicados, o seu número não é finito.

Uma vez que a ordem de G é positiva, conclui-se que

$$2f + 2d - df = 0 \Leftrightarrow df - 2d - 2f + 4 = 4 \Leftrightarrow (f - 2)(d - 2) = 4$$

e, conseqüentemente, que apenas os pares (d, f) : $(3, 6)$, $(4, 4)$ e $(6, 3)$ satisfazem esta igualdade, com $d \geq 3$ e $f \geq 3$. \square

Teorema 6.14. *Se existe um grafo g -platónico, G , tal que $g > 1$, então $|V(G)| = \frac{4f(g-1)}{d(f-2)-2f}$, onde d denota o grau dos vértices e f o grau das faces.*

Demonstração. Seja G um grafo g -platónico, com $g > 1$, então

$$|E(G)| = \frac{d|V(G)|}{2}, |F_g(G)| = \frac{d|V(G)|}{f} \text{ e } |V(G)| + |F_g(G)| - |E(G)| = 2((1-g)),$$

pelo que

$$\begin{aligned} |V(G)| + \frac{d|V(G)|}{f} - \frac{d|V(G)|}{2} &= 2(1-g) \Leftrightarrow |V(G)|(2f + 2d - df) = 4f(1-g) \\ &\Leftrightarrow |V(G)| = \frac{4f(g-1)}{d(f-2)-2f}. \end{aligned}$$

\square

Como corolário imediato deste teorema, conclui-se que, para cada $g > 1$, existe um número finito de grafos g -platónicos. Com efeito, sendo $g > 1$, se não existem grafos g -platónicos, então o resultado é verdadeiro para g . Supondo que existe um grafo g -platónico G , cujo grau dos vértices é d e cujo grau das faces é f , uma vez que $g > 1$, $d \geq 3$ e $f \geq 3$,

$$|V(G)| > 0 \Rightarrow \frac{4f(g-1)}{d(f-2)-2f} > 0 \Leftrightarrow df - 2d - 2f > 0 \Leftrightarrow df - 2d - 2f + 4 > 4,$$

ou seja, conclui-se que $(d-2)(f-2) > 4$. Como consequência, o estudo reduz-se aos seguintes casos:

1. Se $f = 3$, então $(d-2)(3-2) > 4 \Rightarrow d \geq 7 \Rightarrow |V(G)| = \frac{12(g-1)}{d-6} \leq 12(g-1)$.
2. Se $f = 4$, então $(d-2)(4-2) > 4 \Rightarrow d \geq 5 \Rightarrow |V(G)| = \frac{16(g-1)}{2d-8} \leq 8(g-1)$.
3. Se $f = 5$, então $(d-2)(5-2) > 4 \Rightarrow d \geq 4 \Rightarrow |V(G)| = \frac{20(g-1)}{3d-10} \leq 10(g-1)$.
4. Se $f = 6$, então $(d-2)(6-2) > 4 \Rightarrow d \geq 4 \Rightarrow |V(G)| = \frac{24(g-1)}{4d-12} \leq 6(g-1)$.
5. Se $f \geq 7$, então $(d-2)(f-2) > 4 \Rightarrow d \geq 3 \Rightarrow$

$$|V(G)| = \frac{4f(g-1)}{d(f-2)-2f} \leq \frac{4f(g-1)}{3(f-2)-2f} \leq \frac{4f(g-1)}{f-6} \leq 28(g-1).$$

Logo, todos os grafos g -platónicos (com $g > 1$) têm ordem não superior a $28(g-1)$, pelo que o seu número é finito.

6.2 Colorações de vértices e arestas

Um dos mais velhos problemas relacionados com a Teoria dos Grafos diz respeito à coloração de mapas. Com este problema, pretende-se saber qual o menor número de cores necessárias para pintar um mapa de modo que não existam países, com fronteira comum, pintados da mesma cor. Uma forma de modelar este problema (ignorando situações particulares em que os países se distribuem por diferentes componentes conexas e ainda a possibilidade de consideração de fronteiras pontuais) consiste na construção de um grafo com tantos vértices quantos os países do mapa a colorir e ligar (com uma aresta) todos os pares de vértices aos quais correspondam países com fronteira comum. Nestas condições, teremos que atribuir cores aos vértices de modo que não existam vértices adjacentes com a mesma cor.

Mais geralmente, dado um grafo arbitrário, G , designa-se por coloração dos vértices de G , a determinação de uma função

$$\phi : V(G) \rightarrow C,$$

onde C denota um conjunto finito de cores, sobrejectiva tal que $\phi(u) \neq \phi(v)$ se $uv \in E(G)$. Se $|C| = k$, então diz-se que G é k -colorável, ou que o seu número cromático que se denota por $\chi(G)$ e se define como sendo

$$\chi(G) = \min\{|C|, \phi : V(G) \rightarrow C \text{ é uma coloração de vértices em } G\}$$

é uma coloração dos vértices de G , é não superior a k , i.e., $\chi(G) \leq k$. Em tais condições $V(G)$ admite uma partição nos subconjuntos V_1, \dots, V_k tal que para todo o $i \in \{1, \dots, k\}$, se $x, y \in V_i$, então $xy \notin E(G)$.

Analogamente à coloração de vértices, definem-se colorações de arestas e de faces, embora, no caso destas últimas, apenas para grafos planares. Sendo X o conjunto das arestas (faces) de um grafo (grafo planar), G , dizemos que dois elementos de X , x e y , são adjacentes se incidem no mesmo vértice (se as fronteiras de ambos têm uma aresta em comum). A partir deste conceito de adjacência, a função $\theta : X \rightarrow C$, onde C denota um conjunto finito de cores, diz-se uma coloração de arestas (faces) de G , com $|C|$ cores, se θ é sobrejectiva e $x, y \in X$ são duas arestas adjacentes (i.e., com um vértice comum), então $\theta(x) \neq \theta(y)$. De um modo equivalente, podemos dizer que G admite uma coloração das arestas (faces), com $k = |C|$ cores se, sendo X o conjunto das suas arestas (faces), X admite uma partição nos subconjuntos X_1, \dots, X_k tal que para todo o $i \in \{1, \dots, k\}$, X_i não tem vértices adjacentes. Em tais condições, diz-se que G é $|C|$ -colorável nas arestas (faces). O menor $|C|$ para o qual G é $|C|$ -colorável nas arestas (faces) designa-se por *índice cromático (número cromático das faces)* e denota-se por $c'(G)$ ($c''(G)$). É claro que se G é não nulo, então $c'(G) = c(L(G))$, onde $L(G)$ denota o grafo linha de G . Por outro lado, se G é planar, então $c(G) = c''(G^*)$ e $c(G^*) = c''(G)$, onde G^* denota o respectivo dual. Um resultado publicado em (Vizing, 1964) estabelece limites muito apertados para a coloração das arestas de grafos arbitrários. Com efeito, de acordo com o teorema de Vizing, dado um grafo, G ,

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Desde muito cedo se conjecturou que 4 cores bastariam para resolver o problema da coloração dos vértices de grafos planares. O cartógrafo inglês Francis Guthrie, já em 1852, reclamava a suficiência de 4 cores para distinguir os países num mapa plano e foi precisamente nesse ano (1852) que A. de Morgan, numa carta que enviou a W. R. Hamilton, afirmou ter tomado conhecimento deste problema, que designou por problema das 4 cores, através de um seu aluno, Frederick Guthrie (irmão de Francis Guthrie). Em 1878, numa comunicação apresentada na "London mathematical Society", Cayley referiu-se ao problema das 4 cores como sendo um problema em aberto. Em 1879, Kempe propôs uma pretensa solução que só em 1890 foi refutada por Heawood, no seu primeiro trabalho escrito onde provou a suficiência de cinco cores para a coloração dos vértices de grafos planares. O teorema que se segue estabelece, precisamente, o resultado obtido por Heawood, com base no método utilizado por Kempe 11 anos antes.

Teorema 6.15 (Heawood, 1890). *Todo o grafo planar admite uma coloração dos vértices com 5 cores.*

Demonstração. A prova será feita por indução sobre o número de vértices do grafo. Suponha-se que G é um grafo planar não nulo e que o resultado é válido para grafos planares com menor número de vértices do que $|V(G)|$. Pelo Teorema 6.5, existe $v \in V(G)$ tal que $d_G(v) \leq 5$ e, por hipótese de indução, $G[V(G) \setminus \{v\}]$ admite uma coloração com 5 cores. Se nem todas as 5 cores são utilizadas nos vértices adjacentes a v , então uma das que ficam livres pode ser utilizada em v e, conseqüentemente, G admite uma coloração de vértices com 5 cores. Suponha-se que todos os vértices adjacentes a v , v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 têm cores distintas (as quais vamos identificar por 1, 2, 3, 4 e 5 e supôr distribuídas segundo uma ordem contrária aos ponteiros do relógio).

Seja $V_{1;3}$ o conjunto de vértices que podem ser alcançados a partir de v_1 por um caminho que utiliza unicamente vértices com as cores 1 e 3. Então, podemos trocar estas duas cores, entre si, em $V_{1;3} \cup \{v_1\}$, sem que vértices adjacentes deixem de ter cores distintas. Se $v_3 \notin V_{1;3}$ então, após a troca de cores, nenhum dos vértices adjacentes a v tem a cor 1, pelo que a podemos utilizar para v .

Suponha-se que $v_3 \in V_{1;3}$ e seja $(v_1, u_1, \dots, u_k, v_3)$ um caminho (entre v_1 e v_3) com cores, alternadamente, 1 e 3. Acrescentando v a este caminho obtém-se um ciclo, $C_{1;3}$ homeomorfo a uma curva de Jordan fechada que, conseqüentemente, divide o plano em duas componentes conexas por caminhos e, de acordo com esta construção, fica claro que v_2 e v_4 pertencem a componentes distintas.

Seja $V_{2;4}$ o conjunto dos vértices alcançados, a partir de v_2 , por trajectos que utilizam, unicamente, as cores 2 e 4. Então, nenhum destes trajectos cruza o ciclo $C_{1;3}$, pelo que $V_{2;4}$ está na componente que contém v_2 , cuja fronteira é $C_{1;3}$ e $v_4 \notin V_{2;4}$. Logo, trocando as cores 2 e 4, entre si, em $V_{2;4} \cup \{2\}$, a cor 2 fica livre para o vértice v . \square

Um grafo G diz-se k -conexo ($k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) se a ordem de G é superior a k e $G - X$ é conexo para todo o $X \subset V(G)$, com $|X| < k$. Por outras palavras, G é k -conexo se não existem dois vértices de G separáveis por menos do que k outros

vértices. Todo o grafo não vazio é 0-conexo e todos os grafos conexos não triviais são 1-conexos. O maior inteiro k tal que G é k -conexo designa-se por conexidade de G e denota-se por $k(G)$. Consequentemente, $k(G) = 0$ se e só se G é desconexo ou $G = K_1$. É claro que, para todo o $n \in \mathbb{N}$ $k(K_n) = n - 1$. Designa-se por *triangulação do plano (ou planar)* todo o grafo conexo planar cujas faces têm como fronteira K_3 (ou seja, triângulos). Uma triangulação do plano também se designa por grafo conexo planar maximal. Esta designação deve-se ao facto de um tal grafo, G , apresentar a particularidade de ter um número de arestas igual a $3|V(G)| - 6$. Com efeito, de acordo com o Corolário 6.3, para qualquer grafo conexo planar H , $|E(H)| \leq 3|V(H)| - 6$ e, por outro lado, se todas as faces de H têm K_3 como fronteira, então $3|F_0(H)| = 2|E(H)|$, pelo que, tendo em conta a própria fórmula de Euler, $|E(H)| = 3|V(H)| - 6$. Verifica-se ainda que qualquer triangulação planar, G , tal que $|V(G)| \geq 4$, é um grafo, pelo menos, 3-conexo. Tendo em conta que um grafo cúbico é um grafo regular com vértices de grau 3, pode concluir-se que se G é um grafo 2-conexo planar, então G é uma triangulação planar se e só se o seu dual, G^* , é um grafo cúbico e G é um grafo cúbico planar se e só se G^* é uma triangulação.

Para se provar o teorema das quatro cores é suficiente provar que qualquer grafo planar maximal (triangulação do plano) tem número cromático não superior a 4.

Teorema 6.16. *Se G é um grafo cúbico que admite um ciclo de Hamilton, então G admite uma coloração das arestas com 3 cores (i.e. $\chi'(G) \leq 3$).*

Demonstração. Dado que, de acordo com a hipótese, todos os vértices têm grau 3, podemos concluir que a ordem de G é par (i.e., $|V(G)| = 2k$). Logo, sendo $C = (x_1, x_2, \dots, x_{2k}, x_1)$ um ciclo de Hamilton para G , então $|V(G)| = |V(C)| = |E(C)|$, pelo que $|E(C)|$ é também par. Como consequência, atribuindo-se a cor 1 às arestas $x_{2j-1}x_{2j}$, para $j = 1, \dots, k$, a cor 2 à aresta x_{2k}, x_1 e às arestas $x_{2j}x_{2j+1}$, para $j = 1, \dots, k - 1$ e a cor 3 às restantes, obtém-se uma coloração das arestas de G sem que existam arestas incidentes no mesmo vértice com a mesma cor. \square

Uma outra tentativa falhada para a resolução do problema das quatro cores (a adicionar à de Kempe) foi apresentada em 1880 por Tait que, por essa altura, estava convencido que qualquer grafo cúbico 2-conexo planar admitiria um ciclo de Hamilton e, consequentemente, pelo Teorema-6.16, admitiria uma coloração de arestas com três cores. Esta pretensa majoração para o índice cromático dos grafos cúbicos planares, veio a ser refutada, em 1946, por Tutte que, então, exibiu um grafo cúbico 2-conexo planar não hamiltoniano com 69 arestas, 46 vértices e 25 faces), (Tutte, 1946).

Relativamente aos grafos cúbicos 2-conexos não hamiltonianos, deve observar-se ainda que já em 1891 Peterson tinha encontrado um grafo cúbico 2-conexo (o famoso grafo de Peterson⁵, representado na capa) com um índice cromático

⁵O grafo de Peterson, $K(5,2)$, é um caso particular dos grafos de Kneser, $K(n,k)$, que se definem, para $n \geq 2k$, pelos vértices correspondentes a subconjuntos de k elementos de um

superior a 3 (logo, não hamiltoniano). No entanto, trata-se de um grafo não planar.

Ambas as tentativas de resolução do problema das quatro cores, porém, tiveram contributos positivos. Kempe introduziu o conceito, que actualmente se designa por cadeia de Kempe (que corresponde a uma componente conexa induzida pelos vértices coloridos, unicamente, com duas cores, e que é utilizada na redutibilidade de configurações a que se recorre na prova, até ao momento obtida, para o teorema das quatro cores) e Tait mostrou (com o teorema que se segue) que o problema da coloração dos vértices de triangulações do plano com quatro cores é equivalente à coloração das arestas do correspondente grafo dual com apenas com 3 cores. Note-se que colorir as arestas do grafo dual de uma triangulação do plano com três cores, é equivalente a etiquetar as arestas que constituem as fronteiras triangulares de cada face com as cores das arestas duais que as cruzam, de tal forma que cada triângulo contenha as três cores.

Teorema 6.17 (Tait, 1878-80). *Seja G uma triangulação do plano, $\chi(G) \leq 4$ se e só se as arestas de G podem ser etiquetadas com três etiquetas distintas de tal modo que na fronteira de cada face existam as três etiquetas.*

Demonstração. Suponha-se que G admite a coloração de vértices $f : V(G) \rightarrow \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ e que, a partir dela, se define a etiquetagem de arestas determinada pela aplicação $\psi : E(G) \rightarrow \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ tal que se $uv \in E(G)$ então $f(u) = (u_x, u_y)$, $f(v) = (v_x, v_y)$ e

$$\psi(uv) = f(u) + f(v) = (u_x + v_x \bmod 2, u_y + v_y \bmod 2).$$

Nestas condições, $\psi(uv)$ associa às arestas de cada triângulo, as etiquetas $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 1)$.

Reciprocamente, seja $\psi : E(G) \rightarrow \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ uma função de etiquetagem das arestas de G , de tal forma que cada face contenha as três etiquetas. Seja v_1 um vértice arbitrário e seja $f : V(G) \rightarrow \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ tal que

$$f(x) = \sum_{e \in P_{v_1 x}} \psi(e) \bmod 2,$$

onde $P_{v_1 x}$ é um caminho (ou passeio) arbitrário entre v_1 e x . Assim, resta provar que a função f está bem definida, ou seja, o seu valor é independente do caminho (ou passeio) escolhido entre v_1 e x (o que é equivalente a afirmar que o seu valor é nulo para $x = v_1$, considerando qualquer circuito) e ainda que $f(x) \neq f(y)$ se $xy \in E(G)$. Um vez que a segunda parte é imediata, vamos provar apenas a primeira parte.

Seja C um ciclo arbitrário de G , pelo que ou é um triângulo ou o domínio interno da curva de Jordán que lhe está associada está dividido em triângulos T_i . Então, procedendo à adição módulo 2 das etiquetas das arestas que constituem

conjunto de n elementos, em que dois vértices são adjacentes sse correspondem a subconjuntos disjuntos. Deve observar-se ainda que o grafo de Petersen corresponde ao complementar de $L(K_5)$.

os triângulos, obtêm-se $(1, 0) + (0, 1) + (1, 1) = (0, 0)$ e, sendo T o conjunto dos triângulos do domínio interno de C (incluindo os que têm uma aresta em C), vem que

$$0 = \sum_{e \in E(T)} \psi(e) = \sum_{e \in E(C)} \psi(e) + \sum_{e \in E(T) \setminus E(C)} \psi(e).$$

Dado que as arestas de $E(T) \setminus E(C)$ estão associadas a dois triângulos (logo contam duas vezes), podemos concluir que $\sum_{e \in E(T) \setminus E(C)} \psi(e) = 0$ e, consequentemente, $\sum_{e \in E(C)} \psi(e) = 0$. \square

Com facilidade se conclui que se um grafo planar, G , admite um ciclo de Hamilton, então as faces do domínio interior da curva de Jordan associada a esse ciclo podem ser coloridas, alternadamente, com as cores 1 e 2 e as faces do domínio exterior coloridas, alternadamente, com as cores 3 e 4, pelo que $\chi(G) \leq 4$. Um resultado relativamente recente, publicado em (Grimberg, 1968), tornou mais fácil a construção de contra-exemplos para a conjectura de Tait (de que todos os grafos cúbicos 2-conexos planares seriam hamiltonianos).

Teorema 6.18 (Grimberg, 1968). *Seja G é um grafo planar hamiltoniano, CH um ciclo hamiltoniano para G , $F_0^{int}(CH)$ e $F_0^{ext}(CH)$ os subconjuntos de faces de G pertencentes, respectivamente, ao domínio interior e exterior da curva de Jordan definida por CH . Denotando por f_i^{int} e f_i^{ext} o número de faces de grau i existentes, respectivamente, em $F_0^{int}(CH)$ e $F_0^{ext}(CH)$, então*

$$\sum_i (i - 2)(f_i^{int} - f_i^{ext}) = 0,$$

onde o somatório é estendido a todos os graus das faces de G .

Demonstração. Suponha-se que o grafo G é realizado na esfera, pelo que CH separa a superfície esférica em duas componentes conexas, uma que contém as faces do subconjunto $F_0^{int}(CH)$ e outra que contém as faces do subconjunto $F_0^{ext}(CH)$, as quais continuaremos a designar, respectivamente, por domínio interior e exterior de CH . Sendo $E(G) = E(CH) \cup E_{int}(CH) \cup E_{ext}(CH)$, onde $E_{int}(CH)$ e $E_{ext}(CH)$ denotam os subconjuntos de arestas que não estão em $E(CH)$ e pertencem, respectivamente, ao domínio interior e exterior de CH (pelo que $|E(G)| = |E(CH)| + |E^{int}(CH)| + |E^{ext}(CH)|$), com facilidade se conclui que $|F_0^{int}| = |E^{int}(CH)| + 1$ e $|F_0^{ext}| = |E^{ext}(CH)| + 1$. Logo, vem que

$$|F_0^{int}(CH)| = \sum_i f_i^{int} = |E^{int}(CH)| + 1 \quad (6.3)$$

$$|F_0^{ext}(CH)| = \sum_i f_i^{ext} = |E^{ext}(CH)| + 1 \quad (6.4)$$

e, por outro lado,

$$\sum_i i f_i^{int} = |E(CH)| + 2|E^{int}(CH)| \quad (6.5)$$

$$\sum_i i f_i^{ext} = |E(CH)| + 2|E^{ext}(CH)| \quad (6.6)$$

Combinando as igualdades (6.3) e (6.5) e as igualdades (6.4) e (6.6) decorre que

$$\sum_i (i-2)f_i^{int} = |E(CH)| - 2 \text{ e } \sum_i (i-2)f_i^{ext} = |E(CH)| - 2$$

e, conseqüentemente, $\sum_i (i-2)(f_i^{int} - f_i^{ext}) = 0$. \square

Como consequência deste teorema, Grinberg construiu vários contra-exemplos, para a conjectura de Tait.

Se $\chi(G) = k$, mas $\chi(G') < k$, para qualquer subgrafo próprio de G (ou seja, $G' \subseteq G$ e $|V(G')| + |E(G')| < |V(G)| + |E(G)| \Rightarrow \chi(G') < c\chi(G)$), então G diz-se k -crítico-colorável. Por outro lado, $x \in V(G) \cup E(G)$ diz-se um elemento crítico de G se $\chi(G - \{x\}) < \chi(G)$. Conseqüentemente, G é crítico se todos os seus vértices e todas as suas arestas são elementos críticos. Os únicos grafos k -crítico-coloráveis, para $k \in \{1, 2\}$, são os grafos completos K_1 e K_2 . Parece não existir qualquer caracterização razoável para os grafos 4-crítico-coloráveis, ou equivalentemente, para os grafos 3-coloráveis, o mesmo não acontecendo, porém, relativamente aos grafos bi-coloráveis que são grafos bipartidos.

Teorema 6.19 (Appel e Haken, 1977). $\chi(S_0) = 4$.

Designa-se por bloco todo o grafo sem vértices de corte, pelo que, com excepção do bloco trivial K_2 , também não tem arestas de corte. Por sua vez, designa-se por bloco de um grafo G , todo o subgrafo maximal que define um bloco (i.e., sem vértices de corte). Logo, todo o bloco de um grafo G , ou é um subgrafo maximal 2-conexo, ou uma ponte ou um vértice isolado. Tendo em conta a propriedade de maximalidade, dois blocos diferentes de um mesmo grafo conexo, G , apenas se sobrepõem num único vértice que, em tais condições, é um vértice de corte de G . Conseqüentemente, pode concluir-se que cada aresta pertence a um único bloco e que um grafo é união dos seus blocos, podendo interpretar-se os blocos como sendo as componentes 2-conexas que constituem o grafo. Designa-se por bloco extremo todo o bloco que contém, unicamente, um vértice de corte de G .

Teorema 6.20. *Qualquer que seja o grafo G ,*

$$\chi(G) \leq \max\{\delta(G[U]) : U \subseteq V(G)\} + 1.$$

Demonstração. Suponha-se que G tem ordem n e seja $k = \max\{\delta(G[U]) : U \subseteq V(G)\}$. Seja v_n um vértice de G tal que $d_G(v_n) \leq k$ e $H_{n-1} = G - \{v_n\}$. Por hipótese, H_{n-1} tem um vértice de grau não superior a k . Seja v_{n-1} um desses vértices e seja $H_{n-2} = H_{n-1} - \{v_{n-1}\}$, i.e, $H_{n-2} = G - \{v_1, v_2\}$. Continuando este processo obtém-se uma sequência de vértices de G , v_1, \dots, v_n , tal que v_j é adjacente a um máximo de k vértices que o precedem. Conseqüentemente, para os colorir, no máximo, são necessárias $k + 1$ cores. \square

Se G é um grafo conexo não regular, então $\max\{\delta(G[U]) : U \subseteq V(G)\} \leq \Delta(G) - 1$ e, conseqüentemente, por aplicação do Teorema 6.20, $\chi(G) \leq \Delta(G)$. O teorema a seguir generaliza esta desigualdade para os grafos conexos regulares que não são completos nem ciclos de comprimento ímpar.

Teorema 6.21 (Brooks, 1941). *Seja G um grafo conexo, se G não é completo nem um ciclo de comprimento ímpar, então $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Demonstração. No caso de G ser não regular já se concluiu que $\chi(G) \leq \Delta(G)$, pelo que vamos fazer a prova para o caso de G ser regular. Adicionalmente, sem perda de generalidade, vamos assumir que G é pelo menos 2η conexo⁶ e que $\delta(G) = \Delta(G) \geq 3$, uma vez que um grafo regular tal que $\delta(G) = \Delta(G) = 2$, nas condições da hipótese, é um ciclo de comprimento par, logo com número cromático igual a 2.

No caso de G ser 3η conexo, considere-se v_n como sendo um vértice de G com dois vizinhos, v_1 e v_2 , não adjacentes (um tal vértice existe uma vez que G não é completo). Caso G seja 3η conexo, considere-se v_n como sendo um vértice tal que $G - \{v_n\}$ é um grafo separável, pelo que tem pelo menos dois blocos e dado que G é 2η conexo, cada bloco extremo do subgrafo $G - \{v_n\}$ tem um vértice adjacente a v_n , respectivamente, v_1 e v_2 .

Em qualquer dos casos os vértices v_1, v_2 e v_n são tais que $G - \{v_1, v_2\}$ é conexo, $v_1v_2 \notin E(G)$, mas $v_1v_n, v_2v_n \in E(G)$. Considerem-se os vértices de $N(v_n) = N_{G-\{v_1, v_2\}}(v_n)$, como sendo $v_{n_1}, \dots, v_{n-k_1}$, onde $k_1 = |N_{G-\{v_1, v_2\}}(v_n)|$, seguidamente considerem-se os vértices do conjunto

$$N(v_{n-k_1}) = N_{G-\{v_1, v_2\}}(v_{n-1}) \cup \dots \cup N_{G-\{v_1, v_2\}}(v_{n-k_1}) \setminus \{v_n, \dots, v_{n-k_1}\}$$

como sendo $v_{n-k_1-1}, \dots, v_{n-k_1-k_2}$, onde $k_2 = |N(v_{n-k_1})|$, e assim sucessivamente. Com o procedimento referido, obtém-se a sequência de vértices v_1, v_2, \dots, v_{n-1} , em que, com excepção de v_n , todos os vértices são adjacentes a pelo menos um dos seguintes. Uma vez que v_1 e v_2 têm a mesma cor, v_n é adjacente a ambos e v_j , com $j \in \{3, \dots, n-1\}$ tem no máximo $\Delta(G) - 1$ vizinhos na subsequência v_1, v_2, \dots, v_{j-1} , quando muito, serão necessárias $\Delta(G)$ cores, para colorir os vértices de G . \square

À primeira vista tudo indica que a existência de grafos com elevado número cromático está directamente relacionada com a existência, nesses grafos, de subgrafos completos de elevada cardinalidade. O teorema a seguir, porém, contraria uma tal relação, ao garantir a existência de grafos com cintura superior a 3 (i.e., sem triângulos) e com número cromático arbitrário.

Teorema 6.22 (Zykov, 1949). $\forall k \in \mathbb{N}$, *existe um grafo G_k tal que $g(G_k) > 3$ e $\chi(G_k) = k$.*

Demonstração. Vamos fazer a prova por indução sobre k , assumindo que o resultado é verdadeiro G_1, \dots, G_{k-1} . Considerem-se cópias disjuntas destes grafos e seja $V = |V(G_1)| \times \dots \times |V(G_{k-1})|$ um conjunto de novos vértices definidos pelos $(k-1)$ -uplos de vértices obtidos pela selecção de um vértice de cada um dos grafos G_1, \dots, G_{k-1} . Assim, G_k é obtido de G_1, \dots, G_{k-1} e V , ligando cada vértice de V aos $k-1$ vértices que lhe correspondem em G_1, \dots, G_{k-1} , um em

⁶No caso dos grafos 1η conexos, G , sendo $G = G_1 \cup \dots \cup G_p$, onde G_1, \dots, G_p são os seus blocos, $\chi(G) = \max\{\chi(G_j), j = 1, \dots, p\}$.

cada G_i , pelo que $\chi(G) \leq k$ (a). Por outro lado, em G_1 existe um vértice v_1 com uma certa cor c_1 , em G_2 existe um vértice v_2 com uma cor $c_2 \neq c_1$ (dado que $\chi(G_2) = 2$), em G_3 existe um vértice v_3 com uma cor $c_3 \notin \{c_1, c_2\}$ (dado que $\chi(G_2) = 3$), etc. Consequentemente, o vértice $v \in V$ adjacente a v_1, \dots, v_{k-1} , tem de ter uma cor distinta de c_1, \dots, c_{k-1} , pelo que $\chi(G) \geq k$ (b). Tendo em conta as desigualdades (a) e (b) conclui-se que $c\chi(G_k) = k$. \square

Segue-se a conjectura, ainda em aberto, formulada por Hadwiger em 1943.

Conjectura 6.1 (Hadwiger, 1943). *Dado um grafo arbitrário, G , para todo o inteiro positivo p , $\chi(G) \geq p \Rightarrow K_p \leq G$, onde $S \leq T$ denota que S é um menor de T .*

Esta conjectura está provada para $p \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Para $p = 7$, no entanto, a conjectura continua em aberto e a sua prova ou refutação constitui um dos grandes desafios da Teoria dos Grafos. A conjectura de Hadwiger (Hadwiger, 1943) é trivialmente verdadeira para $p \in \{1, 2\}$. Para $p = 3$, decorre da implicação de que se G não contém K_3 como menor, então G não contém ciclos (pelo que é uma floresta), logo G é bipartido e, consequentemente, é bi-colorável, i.e., $\chi(G) < 3$. Para $p = 4$, a prova pode ser consultada em (Diestel, 1997) pag. 181-182. Por sua vez, o teorema das 4 cores implica a conjectura de Hadwiger para $p = 5$, i.e., $\chi(G) \geq 5 \Rightarrow K_5 \leq G$, podendo a respectiva demonstração ser consultada em (Parathasarathy, 1994) pag. 306-307 ou (Diestel, 1997) pag. 182-183. A prova da conjectura de Hadwiger para $p = 6$ decorre de um estudo sobre grafos não contractíveis a K_6 , desenvolvido em (Robertson, Seymour e Thomas, 1993), onde, assumindo a validade do teorema das quatro cores, se conclui que tais grafos são 5-coloráveis e, consequentemente, que a conjectura de Hadwiger é verdadeira para $p=6$. Com facilidade se prova ainda que se a conjectura de Hadwiger é verdadeira para $p = q$, então também é verdadeira para $p < q$. Com efeito, supondo que a conjectura é verdadeira para $p = q$ e que $\chi(G) \geq q - 1$, então, fazendo

$$G \oplus v = (V(G) \cup \{v\}, E(G) \cup \{xv : x \in V(G)\})$$

com $v \notin V(G)$, vem que $\chi(G \oplus v) = \chi(G) + 1 \geq q$ e, uma vez que por hipótese $K_p \leq G \oplus v$, conclui-se que $K_{q-1} \leq G$. Desta última conclusão, ou seja, da implicação

$$(\chi(G) \geq p \Rightarrow K_p \leq G) \Rightarrow (\chi(G) \geq p - 1 \Rightarrow K_{p-1} \leq G)$$

decorre, ainda, que a prova da validade da conjectura de Hadwiger para $p \geq 5$, implica a validade do teorema das 4 cores. Com efeito, para $p = 5 + k$, vem que

$$\begin{aligned} (\chi(G) \geq 5 + k \Rightarrow K_{5+k} \leq G) &\Rightarrow (\chi(G) \geq 5 + k - 1 \Rightarrow K_{5+k-1} \leq G) \\ &\Rightarrow (\chi(G) \geq 5 + k - 2 \Rightarrow K_{5+k-2} \leq G) \\ &\vdots \\ &\Rightarrow (\chi(G) \geq 5 \Rightarrow K_5 \leq G). \end{aligned}$$

Logo, se G é planar, então G não é contractível a K_5 (i.e., K_5 não é um menor de G) e, da última das implicações obtidas conclui-se que $\chi(G) < 5$.

Tendo em conta que do Teorema 6.12 combinado com a desigualdade $g_{K_n} \leq \lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \rceil$, obtida em (Ringel and Youngs, 1968), se obtém a igualdade $g_{K_n} = \lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \rceil$ e ainda que $\chi(K_p) = p$, pode agora concluir-se que $\forall n > 0$

$$\chi(S_n) \geq \lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48n}}{2} \rfloor.$$

Com efeito, sendo $p = \lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48n}}{2} \rfloor$, dado que $g_{K_p} = \lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \rceil$, vem que

$$\begin{aligned} g_{K_p} &= \lceil \frac{(\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48n}}{2} \rfloor - 3)(\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48n}}{2} \rfloor - 4)}{12} \rceil \\ &= \lceil \frac{\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48n}}{2} \rfloor - 3}{12} \lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48n}}{2} \rfloor - 4 \rceil \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\leq \lceil \frac{\lfloor \frac{-1 + 1 + 48n}{4} \rfloor}{12} \rceil \quad (6.8)$$

$$= n. \quad (6.9)$$

Note-se que a igualdade (6.7) se obtém, tendo em conta que $\lfloor x \rfloor - m = \lfloor x - m \rfloor \forall m \in \mathbb{Z}$ e a desigualdade (6.8) decorre da desigualdade $\lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor \leq \lfloor xy \rfloor$. Logo, podemos concluir que K_p é realizável em S_n , donde decorre que

$$\chi(S_n) \geq \chi(K_p) = p = \lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48n}}{2} \rfloor \quad (6.10)$$

Em 1890, Heawood conjecturou a identidade $\chi(S_n) = \lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48n}}{2} \rfloor \forall n > 0$, tendo apenas provado a desigualdade recíproca da desigualdade (6.10). Combinando estas duas desigualdades fica feita a prova da conjectura de Heawood.

Teorema 6.23. $\forall g \geq 0 \chi(S_g) = \lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \rfloor$.

Demonstração. Uma vez que, de acordo com o teorema das quatro cores, $\chi(S_0) = 4$ e, para $g = 0$, se obtém

$$\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \rfloor = \lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 0}}{2} \rfloor = 4 = \chi(S_0),$$

resta fazer a prova para $g > 0$.

Tendo em conta a desigualdade (6.10), sabe-se que $\chi(S_g) \geq \lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \rfloor$, para $g \geq 1$. Logo, para $g \geq 1$, pode concluir-se que $\chi(S_g) \geq 7$. Seja G um grafo com genus $g \geq 1$ tal que $\chi(G) = k \geq 7$. Tendo em conta que $|V(G)| \geq 3$, cada face de G é limitada por, pelo menos, 3 arestas e, consequentemente, $3|F_g(G)| \leq 2|E(G)|$. Logo, por aplicação da fórmula de Euler generalizada ($|V(G)| + |F_g(G)| - |E(G)| = 2(1 - g)$),

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6(1 - g). \quad (6.11)$$

Sendo G' um subgrafo de G k -crítico-colorável, então $\delta(G') \geq k - 1$ e, tendo em conta (6.11), $\delta(G')|V(G')| \leq 6|V(G')| - 12(1 - g)$. Consequentemente, $(k - 1)|V(G')| \leq 6|V(G')| - 12(1 - g)$. Dado que esta última inequação é equivalente a $(k - 7)|V(G')| + 12(1 - g) \leq 0$ e que $7 \leq k \leq |V(G')|$, conclui-se que $(k - 7)k + 12(1 - g) \leq 0 \Leftrightarrow k^2 - 7k + 12(1 - g) \leq 0$. Logo, vem que

$$k \leq \frac{7 + \sqrt{49 - 48(1 - g)}}{2} = \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \Leftrightarrow \lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \rfloor.$$

□

Deve observar-se que a demonstração deste teorema vai contra a nossa intuição de que seria mais simples determinar $\chi(S_0)$ do que $\chi(S_n)$, para $n > 0$. Com efeito, embora se tenham obtido ambos os resultados, as técnicas até ao momento utilizadas para se chegar à determinação do primeiro são bem mais elaboradas do que as utilizadas na determinação do segundo.

Teorema 6.24 (Gaddum, Nordthaus, 1960). *Sendo \bar{G} o grafo complementar de G verifica-se que $\chi(\bar{G}) + \chi(G) \leq |V(G)| + 1$.*

Demonstração. Vamos fazer a prova por indução sobre o número de vértices, tendo em conta que o resultado é trivialmente verdadeiro para grafos de ordem 1 e 2. Suponha-se que o resultado é verdadeiro para grafos com menos vértices do que os de G e que $|V(G)| \geq 2$. Sendo G' o subgrafo obtido de G por eliminação de um vértice x , vem que

$$\chi(G) \leq \chi(G') + 1, \quad (6.12)$$

$$\chi(\bar{G}) \leq \chi(\bar{G}') + 1 \quad (6.13)$$

Se a igualdade se verifica em (6.12) e em (6.13), então $d_G(x) \geq \chi(G')$ e $d_{\bar{G}}(x) \geq \chi(\bar{G}')$. Consequentemente,

$$\chi(\bar{G}) + \chi(G) = \chi(G') + \chi(\bar{G}') + 2 \leq d_{\bar{G}}(x) + d_G(x) + 2 = |V(G)| + 1.$$

Suponha-se que a igualdade não se verifica em ambas as inequações (6.12) e (6.13). Então $\chi(\bar{G}) + \chi(G) \leq \chi(\bar{G}') + \chi(G') + 1 \leq |V(G')| + 1 + 1 = |V(G)| + 1$. □

Para se concluir que o majorante determinado no Teorema 6.24 é atingido, basta exibir um par de grafos complementares, para o qual se obtém a igualdade (o que não é difícil).

Corolário 6.25. *Sendo \bar{G} o grafo complementar de G , verifica-se a desigualdade $\chi(G)\chi(\bar{G}) \leq \lfloor \frac{(|V(G)|+1)^2}{2} \rfloor$*

Demonstração.

$$4\chi(G)\chi(\bar{G}) \leq 4\chi(G)\chi(\bar{G}) + (\chi(G) - \chi(\bar{G}))^2 = (\chi(G) + \chi(\bar{G}))^2 \leq (|V(G)| + 1)^2.$$

□

⁷Note-se que se $v \in V(G')$ é um vértice k -crítico-colorável, então $\chi(G' - \{v\}) = \chi(G') - 1 \leq d_G(v)$ e, consequentemente, se G' é k -crítico-colorável, então $\chi(G') - 1 \leq \delta(G')$.

Tal como anteriormente, neste caso, também se verifica que o majorante é atingido.

Teorema 6.26. *Dado um grafo arbitrário G , verificam-se as seguintes desigualdades:*

$$\chi(G) + \alpha(G) - 1 \leq |V(G)| \leq \chi(G)\alpha(G).$$

Demonstração. Seja $\chi(G) = k$ e atribuam-se aos vértices de G as cores c_1, \dots, c_k . Sendo $S_i \subset V(G)$ o subconjunto de vértices com a cor c_i , para $i = 1, \dots, k$, cada subconjunto S_i é um estável para G . Logo, $\alpha(G) \geq |S_i| \forall i \in \{1, \dots, k\}$ e

$$|V(G)| = |S_1 \cup \dots \cup S_k| = \sum_{i=1}^k |S_i| \leq k\alpha(G) = \chi(G)\alpha(G).$$

Adicionalmente, supondo que aos vértices de um estável máximo, S , é atribuída uma cor, então aos restantes $|V(G)| - \alpha(G)$ vértices poder-se-ão atribuir $|V(G)| - \alpha(G)$ cores, pelo que $\chi(G) \leq |V(G)| - \alpha(G) + 1 \Leftrightarrow \chi(G) + \alpha(G) - 1 \leq |V(G)|$. \square

Teorema 6.27. *Se G é um grafo de ordem n e dimensão m , então*

$$\chi(G) \geq \frac{n^2}{n^2 - 2m}.$$

Demonstração. Seja $\chi(G) = k$ e sejam S_1, \dots, S_k os conjuntos de vértices com as cores c_1, \dots, c_k . Ordenando os vértices convenientemente e denotando os conjuntos de índices associados aos vértices de S_i , para $i = 1, \dots, k$, por $J(S_i)$, verifica-se que a matriz de adjacência de G , A_G , toma o seguinte aspecto:

$$A_G = \begin{matrix} & J(S_1) & J(S_2) & \cdots & J(S_k) \\ \begin{matrix} J(S_1) \\ J(S_2) \\ \vdots \\ J(S_k) \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Seja n_i o número de vértices do conjunto S_i ($n_i = |S_i|$), para $i = 1, \dots, k$ e seja N_0 e N_1 , respectivamente, o número de entradas nulas e entradas unitárias da matriz A_G . Então, por um lado, tendo em conta a desigualdade de Chebishev,

$$N_0 \geq \sum_{i=1}^k n_i^2 \geq \frac{(\sum_{i=1}^k n_i)^2}{k} = \frac{n^2}{k}$$

e, por outro lado, $N_1 = 2m$, uma vez que a soma das componentes unitárias de cada linha (ou coluna) da matriz corresponde ao grau do vértice que lhe está associado. Consequentemente, o número total de entradas da matriz A_G vem dado por

$$n^2 = N_0 + N_1 \geq \frac{n^2}{k} + 2m \Leftrightarrow \chi(G) = k \geq \frac{n^2}{n^2 - 2m}.$$

\square

Bibliografia

- [1] Beineke, L. and Wilson R. (ed.) *Topics in Algebraic Graph Theory*. Cambridge University Press, 2004.
- [2] Bannai, E. and Ito T. *On finite Moore graphs*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math, 20 (1973): 191-208.
- [3] Bannai, E. and Ito T. *Regular graphs with excess one*, Discrete Math. 37 (1981): 147-158.
- [4] Bannay, E. and T. Ito. *Algebraic Combinatorics I - Association Schemes*. The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc. London (1984).
- [5] Berge, C. *Graphs*. North Holland (2nd ed.), 1985.
- [6] Bermond, J.-C., Delorme, C. and Farhi G. *Large graphs with given degree and diameter*, J. Combin. Theory Ser. B 36 (1984): 32-48.
- [7] Biggs, N. *Algebraic Graph Theory*. Cambridge University Press, 1977
- [8] Biggs, N. L. *Discrete Mathematics*. Oxford University Press (2a ed.), 2002.
- [9] Bomze, I.M. *On Standard Quadratic Optimization Problems*, Journal of Global Optimization 13 (1998): 369-387.
- [10] Bose, R.C. *Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs*, Pacific J. Math. 13 (1963): 389-419.
- [11] Cameron, P. J. *Combinatorics - Topics, Techniques and Algorithms*. Cambridge University Press, 1994.
- [12] Cardoso, D. M. *On graphs with stability number equal to the optimal value of a convex quadratic program*, Matemática Contemporânea (Sociedade Brasileira de Matemática) 21 (2003): 9-24.
- [13] Cvetkovic, D. M. *Chromatic number and the spectrum of a graph*, Publi. Inst. Math. (Beograd) 14 (1972): 25-38.
- [14] Damerell, R.M. *On Moore graphs*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 74 (1973): 227-236.

- [15] Delsarte, Ph., Goethals, J.-M. and Seidel, J.J. *Bounds for systems of lines and Jacobi polynomials*, Philips Res. Rep. 30 (1975): 91-105.
- [16] Diestel, R. *Graph Theory*. Springer, 1997
- [17] Doob, M. *A Surprising Property of the Least Eigenvalue of a Graph*. Linear Algebra and Its Applications, 46 (1982):1-7.
- [18] Erdős, P., Fajtlowicz S. and Hoffman A.J. *Maximum degree in graphs of diameter 2*, Networks 10 (1980): 87-90.
- [19] Erdős, P., Chao Ko and R. Rado. *Extremal problem among subsets of a set*. Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 12 (1961): 313-318.
- [20] Eves, H. *Introdução à História da Matemática*, Editora da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Campinas (1997).
- [21] Erikson, M. J. *Introduction to Combinatorics*. John Wiley & Sons, 1998.
- [22] Gerstein, L. J. *Introduction to Mathematical Structures and Proofs*, Springer, New York (2001).
- [23] C. Godsil, G. Royle *Algebraic Graph Theory*, Springer, New York (2001).
- [24] Godsil, C. *Algebraic Combinatorics*, Chapman & Hall, New York (1993).
- [25] Hoffman, A.J. and Singleton, R.R. *On Moore graphs with diameter 2 and 3*, IBM J. Res. Develop.,
- [26] Hoffman, A.J. *On eigenvalues and colorings of graphs*, in: Graph Theory and its Applications, ed. B. Harris, Academic Press, New York (1979): 79-91.
- [27] Kisačanin, B. *Mathematical Problems and Proofs: Combinatorics, Number Theory and Geometry*, Plenum Press, New York (1998).
- [28] Jorgensen, L.K. *Diameters of cubic graphs*, Discrete Applied Mathematics, 37/38 (1992): 347-351.
- [29] Mohar, B. *Isoperimetric numbers of graphs*, J. Combin. Theory (B) 47 (1989): 274-291.
- [30] Motzkin, T. S., and Straus E. G., *Maxima for graphs and a new proof of a theorem of Túrán*, Canadian Journal of Mathematics, 17 (1965): 533-540.
- [31] Prasalov, V. V., *Problems and Theorems in Linear Algebra*, Translations of Mathematica Monographs, vol 134, AMS, Provideance, 1994.
- [32] Scott Jr., L.L. *A condition on Higman's parameters*, Notices of Amer. Math. Soc., 20 A-97 (1973): 721-20-45.
- [33] Thompson, D.M. *Eigengraphs: constructing strongly regular graphs with block designs*, Utilitas Mathematica, 1 (1981): 83-115.

-
- [34] van Dam, E.R. and Haemers, W.H. *Which graphs are determined by their spectrum?*, Linear Algebra Appl. 373 (2003): 241-272.
- [35] van Lint, J. H. and R. M. Wilson. *A Course in Combinatorics*, Cambridge University Press, 1994.
- [36] Velleman, D. J. *How to Prove It: a structured approach*, Cambridge University Press, Cambridge (1998).
- [37] West, D. *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall, 2001
- [38] Whitney, H., *Non-separable and planar graphs*, Trans. Amer. Math. Soc., 34 (1932): 339-362.
- [39] Whitney, H., *Planar graphs*, Fund. Math. 21 (1933): 73-84.
- [40] Wiitala, A. S. *Discrete Mathematics - a unified approach*, McGraw-Hill, New York (1987).
- [41] Wilf, H. S. *The eigenvalues of a graph and its chromatic number*, J. London Math. Soc. 42 (1967): 330-332.
- [42] Wilf, H. S. *Spectral bounds for the clique and independence numbers of graphs*, JCT (B) 40 (1986): 113-117.

Índice

- algoritmo
 - recursivo para a determinação de circuitos de Euler, 7
- arco
 - negativo, 43
 - positivo, 43
- arvore, 5
 - abrangente, 6
 - de suporte, 6
- base, 46
- Berge, 9
- cabeça, 41, 44
- caminho, 4
 - de Hamilton, 9
 - hamiltoniano, 9
- cauda, 41, 44
- ciclo, 4
 - de Hamilton, 9
 - hamiltoniano, 9
- cintura, 4
- circuito, 4
 - de Euler, 7
- cocircuito, 43, 44
- Collatz, 16
- coloração
 - de vértices, 26
- componente
 - conexa, 3
- comprimento
 - de um caminho, 4
 - de um ciclo, 4
- condições
 - Karush-Khun-Tucker, 33
- conexidade algébrica, 55
- conjunto
 - (k, τ) -regular, 38
- corte, 43, 44
- decomposição espectral, 62
- desigualdades
 - de Cheeger, 53
 - de Courant-Weyl, 59
- digrafo, 41
 - simples, 41
- dimensão
 - de um grafo, 1
- distância
 - entre vértices, 4
- diâmetro, 4
- espaço
 - dos arcos, 43
 - dos vértices, 42
- espectro
 - da matriz de adjacência, 12
- espectro de um grafo, 14
- eutatic star, 62
- floresta, 5
- fórmula
 - de Binet-Cauchy, 59
 - de Newton-Girard, 20, 21
- grafo, 1
 - acíclico, 4
 - bipartido, 5
 - completo, 5
 - complementar, 2, 14
 - completo, 2
 - conexo, 3
 - cúbico, 3, 4
 - de Euler, 8

- desconexo, 3
- euleriano, 8
- hamiltoniano, 9
- linha, 14
- nulo, 2
- não conexo, 3
- orientado, 41
- regular, 3
- representativo das arestas, 14
- simples, 1
- grau, 2
 - máximo, 2
 - mínimo, 2
- Hoffman, 28
- intersecção
 - de grafos, 3
- lema
 - de Farkas para grafos, 45
- matriz
 - de adjacência, 12, 42
 - de adjacência generalizada, 13
 - de incidência arco vértice, 42
 - de incidência aresta vértice, 14
 - de Seidel, 13, 14
 - irreduzível, 19
 - laplaciana, 13
 - laplaciana sem sinal, 13
 - totalmente unimodular, 56
 - unimodular, 56
- matrizes
 - co-espectrais, 22
- Mohar, 55
- Motzkin, 29
- multidigraphos, 41
- multigrafo, 1
- número cromático, 26
- ordem
 - de um grafo, 1
- orientação
 - negativa, 43
 - positiva, 43
- partição estrela, 62
- passeio, 4
- polinómio
 - característico, 12
 - simétrico, 20
 - simétrico elementar, 20
- programa quadrático
 - de Motzkin-Straus, 29
- raio espectral, 19
- semi-grau
 - emergente, 41
 - incidente, 41
- Sinogowitz, 16
- Straus, 29
- subespaço
 - de circuitos, 44
- subgrafo, 1
 - induzido, 2
- teorema
 - de Dirac, 12
 - de Ore, 11
 - de Perron-Frobenius, 19
 - do entrelaçamento, 24
- trajecto, 4
 - de Euler, 7
- união
 - de grafos, 3
- valor próprio
 - dominante, 13
 - subdominante, 13
- valência, 2
- Veblen, 8
- vector
 - de circuito, 44
 - de cocircuito, 44
 - de corte, 44
- vizinhança
 - de um vértice, 3
- Wilf, 31
- William Rowan Hamilton, 9