Aulas Práticas de Grafos e Combinatória

✠	$\diamondsuit$	$\spadesuit$	$\clubsuit$	$\heartsuit$
$\clubsuit$	$\heartsuit$	✠	$\diamondsuit$	$\spadesuit$
$\diamondsuit$	$\spadesuit$	$\clubsuit$	$\heartsuit$	✠
$\heartsuit$	✠	$\diamondsuit$	$\spadesuit$	$\clubsuit$
$\spadesuit$	$\clubsuit$	$\heartsuit$	✠	$\diamondsuit$

Domingos Moreira Cardoso
Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro
2004

Conteúdo

1 Aula Prática de 10-2-2004.

- **Sumário**.
  - Introdução ao MAPLE.
    - Edição de comandos básicos.
    - Tópicos sobre programação em MAPLE (iteração, ramificação e estruturação com recurso a procedimentos e funções).
  - Projecto.
    - Implementação em MAPLE da função de Euler, utilizando o princípio de inclusão-exclusão.

1.1 Introdução ao MAPLE.

Numa primeira fase, vamos utilizar o MAPLE na resolução de problemas combinatórios básicos, pelo que vamos começar por recordar os principais instrumentos de trabalho disponíveis neste programa de aplicação.

1.1.1 Edição de comandos básicos.

Tipicamente a introdução de comandos em MAPLE é feita num ambiente onde a "prompt"> assinala uma linha de edição de comandos. Após a edição de um comando, a sua execução é processada quando se termina a linha com ; e se faz *ENTER*. No caso de se terminar com :, fazendo *ENTER*, o comando não é executado (tal significa que se trata de um comando composto que só se completa escrevendo ;).
Seguem-se alguns exemplos de comandos em MAPPLE e respectivos resultados. Note-se que o símbolo % denota o resultado obtido com o comando imediatamente anterior.

> **Sum((i+5)^3, i=1..n)**;

$$\sum_{i=1}^{n} (i+5)^3$$

> **expand(%)**;

$$\sum_{i=1}^{n} (i^3 + 15i^2 + 75i + 125)$$

> **value(%)**;

$$\frac{1}{4}(n+1)^4 + \frac{9}{2}(n+1)^3 + \frac{121}{4}(n+1)^2 + 90n - 35$$

> **(x + (x+z)*y)^3**;

$$(x + (x+z)y)^3$$

> **expand(%)**;

$$x^3+3yx^3+3x^2yz+3y^2x^3+6y^2x^2z+3xy^2z^2+y^3x^3+3y^3x^2z+3y^3xz^2+y^3z^3$$

> **collect(% , x)**;

$$(y^3 3y^2+1+3y)x^3+(3yz+3y^3z+6y^2z)x^2+(3y^3z^2+3y^2z^2)x+y^3z^3$$

> **factor(%)**;

$$(x+yx+yz)^3$$

Para se obter ajuda (ou seja, alguma informação acerca de um dado comando ou instrução, por exemplo sobre a instrução **for**, basta digitar

> **?for**

e fazer *ENTER*.

1.1.2 Tópicos sobre programação em MAPLE.

Vamos abordar (ainda que brevemente) alguns dos meios disponíveis no MAPLE para a *iteração*, a *estrutura* e *ramificação*.

- *Iteração.*
  A iteração é o mecanismo que permite a execução repetida de uma dada operação.
  - O ciclo **for** é o tipo mais básico de iteração.

    > **for i from 3 to 9 by 2 do i*i od**;

    9
    25
    49
    81

    > **mylist := [3,5,7,9]**:
    > **for i in mylist do i*i od**;

    9
    25
    49
    81

    > **myset :=** $\{3,5,7,9\}$:
    > **for i in myset do i*i od**;

    9
    25
    49
    81

– O ciclo **while**.

> $>$ **i := 3**:
> $>$ **while i <= 9 do print(i*i);**
> $>$ **i := i + 2**;
> $>$ **od**;

$$9$$
$$25$$
$$49$$
$$81$$

> $>$ **for i from 3 to 44 while i^2 < 50 do i, i^2 od**;

$$4, 16$$
$$5, 25$$
$$6, 36$$
$$7, 49$$

- *Ramifucação.*
  A ramificação faz-se em MAPLE, utilizando as instruções **if**, **then**, **else** e **fi**.

  > $>$ **if isprime(13) then**
  > $>$ **print(13, "e' primo")**;
  > $>$ **fi**;

  $$13, e'primo$$

- *Etrutura.*
  No MAPLE consegue-se uma programação estruturada (tal como em muitas outras linguagens) recorrendo-se a procedimemtos e funções. Segue-se um exemplo de uma função que recebe como argumentos de entrada dois números e devolve o primeiro elevado ao segundo

  > $>$ **Potencia := proc(a,b)**
  > $>$ **a^b**;
  > $>$ **end**:
  > $>$ Potencia(2,3)

  $$8$$

  No caso de haver necessidade de utilização de variáveis locais, basta indica-las como tal, conforme a seguir se exemplifica, no procedimento *Divisores* que tem como argumento de entrada um conjunto de números naturais e devolve os pares $[x, y]$ de elementos desse conjunto tais que $x|y$.

  > $>$ **Divisores := proc(A :: set(integer))**
  > $>$ **local i,j, temp, R**;
  > $>$ **for i in A do**

```
>   for j in A do
>    if (gcd(i,j) = i) then
>       R := R union {[i,j]};
>    fi;
>   od;
> od;
> RETURN(R);
> end:
> Divisores({1,2,3,4});
```

$$\{[1,1],[1,2],[1,3],[1,4],[2,2],[2,4],[3,3],[4,4]\}$$

O MAPLE tem uma *library* que está organizada em subconjuntos de *packages*. Uma *package* é uma colecção de funções e rotinas que estão relacionadas com uma determinada área. Por exemplo a *package* **combinat** contém muitas funções e rotinas relacioanadas com a Combinatória. Para a tornarmos activa é necessário executar o comando:

```
> with(combinat);
```

$$[Chi, bell, binomial, \ldots]$$

São exemplos de *packages* as seguintes:

- **combinat**: funçoes combinatórias;
- **networks**: rotinas para grafos e digrafos;
- **linalg**: funções de álgebra linear;
- **logic**: procedimentos para manipulação simbólica e expressões booleanas;
- **numtheory**: funções de teoria dos números;
- **plots**: rotinas para gráficos;

Uma nova *package* disponível no MAPLE, a partir da versão V, designa-se por **combstruct** e tem mais algumas rotinas combinatórias. Por exemplo, com esta *package* podem obter-se esquemas de escolha de subconjuntos

```
> with(combstruct);
> choose([morango, laranja, pera],2);
```

$$[[morango, laranja], [morango, pera], [laranja, pera]]$$

```
> nops(%);
```

3

> **numcomb([morango, morango, pera],2)**;

$$2$$

> **choose([morango, morango, pera],2)**;

$$[[morango, morango], [morango, pera]]$$

Para se obter uma lista de todas as *packages* basta fazer

> **?packages**

1.2 Projecto.

Seja n um número natural arbitrário, cuja factorização em primos vem dada por $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$, e denote-se por $M_n(p_j)) = \{x \in \mathbb{N}_n : p_j | x\}$ (ou seja, $M_n(p_j))$ denota o conjunto dos múltiplos de p_j em $\mathbb{N}_n$). Então, podemos concluir que

$$\Phi(n) = n - |\bigcup_j^r M_n(p_j)|.$$

Por outro lado, aplicando o princípio de inclusão exclusão vem que

$$\begin{aligned} |\bigcup_j^r M_n(p_j)| &= \sum_{j=1}^r |M_n(p_j)| \\ &\quad - \sum_{i<j} |M_n(p_i) \cap M_n(p_j)| \\ &\quad - \sum_{i<j<k} |M_n(p_i) \cap M_n(p_j) \cap M_n(p_k)| \\ &= + \dots \end{aligned}$$

Assim, com base na expressão obtida, propõe-se a implementação em MAPLE da função da Möbius utilizando o princípio de inclusão-exclusão.

- Solução apresentada por Diane Diogo Guedes (n. 17 290) e Nuno Duarte Marcelino Pinto (n. 16 749).

```
> FEULER := proc(n :: integer)
> local i, j, k, temp, factor, resultado;
> factor := {};
> temp := {};
> for i from 2 to n do
    > if isprime(i) and (n mod i = 0) then
        > factor := factor union {i}
    > fi;
> od;
> for j in factor do
    > for k from j to n by j do
        > temp := temp union {k};
    > od;
> od;
> resultado := n - nops(temp);
> return(resultado);
> end:
```

Referências

[1] Rosen, K. H. *Exploring Discrete Mathematics with MAPLE*. McGraw-Hill International Editions, Mathematics & Statistics Series, 1997.

2 Aula Prática de 17-2-2004.

- **Sumário**.
  - Princípio de inclusão-exclusão (fórmula de Daniel da Silva).
  - Números binomiais e multinomiais.
  - Exercícios.
  - Projecto.
    * Implementação em MAPLE da função de Mobius utilizando uma fórmula recursiva.

2.1 Princípio de inclusão-exclusão (fórmula de Daniel da Silva).

Fórmula de Daniel da Silva, para a determinação da cardinalidade da união finita de conjuntos finitos.

$$\begin{aligned} |A_1 \cup \ldots \cup A_p| &= \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<i<j} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots. \\ &= \sum_i |A_i| + (-1)^1 \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + (-1)^2 \sum_{i<i<j} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots. \end{aligned}$$

2.2 Números binomiais e multinomiais.

- Se n e p são dois números inteiros positivos tais que $1 \leq p \leq n$, então

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}. \tag{1}$$

- Se n e p são inteiros positivos tais que $1 \leq p \leq n$, então

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

- Seja n um inteiro positivo e $a, b \in \mathbb{R}$. Então

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j.$$

- O número de arranjos dos n objectos de um conjunto $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ m a m é igual ao número de funções injectivas de $\mathbb{N}_m$ em Y e é dado por

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

- O número de permutações de n objectos é igual a $n!$.

2.3 Exercícios.

1. Prove que se numa sala estiverem 156 pessoas, então pelo menos três dessas pessoas têm o seu aniversário na mesma semana.

2. Prove que a diferença simétrica entre conjuntos (que vamos denotar por Δ) é uma operação associativa, ou seja, dados três conjuntos arbitrários $A, B, C \in \mathcal{U}$, $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$.

3. Prove que, dados os conjuntos arbitrários $A_1, A_2, \ldots, A_p$, a cardinalidade de $A_1\Delta A_2\Delta \ldots \Delta A_p$ é igual a

$$\sum_j |A_j| - 2\sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + 4 \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \ldots,$$

   onde os coeficientes são potências de 2.

4. Mostrar que $2^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}$.

5. Mostrar que $\binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2$.

   - **Sugestão**. Tenha em conta que $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$, vem que

     $$(1+x)^{2n} = (1+\binom{n}{1}x+\ldots+\binom{n}{j}x^j+\ldots+x^n)(1+\binom{n}{1}x+\ldots+\binom{n}{n-j}x^{n-j}+\ldots+x^n).$$

     Logo, efectuando o produto, o termo em x^n obtêm-se a partir dos termos $\binom{n}{j}x^j$ do primeiro factor e dos termos $\binom{n}{n-j}x^{n-j}$ do segundo factor, pelo que o coeficiente em x^n no produto é

     $$\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{2}\binom{n}{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}\binom{n}{0}.$$

     Finalmente, observe que $\binom{n}{n-j} = \binom{n}{j}$.

6. Prove que qualquer que seja a cardinalidade de um conjunto não vazio, o número de subconjuntos de cardinalidade par é igual ao número de subconjuntos de cardinalidade ímpar.

   - **Sugestão**. Supondo que o conjunto tem cardinalidade n, considere o desenvolvimento do binómio de Newton $(1-1)^n$.

7. Suponha que quaisquer k (com $k \geq 2$) reagentes químicos, de um certo conjunto de cardinalidade n, quando misturados em quantidades iguais, dão origem a um produto com interesse comercial, que varia consoante o número de reagentes misturados. Suponha ainda que uma dada empresa tem comercializado 63 destes produtos, o que constitui toda a gama que consegue obter com as misturas dos reagentes em número par. Quantos reagentes tem esta empresa para misturar?

8. Dado um conjunto de n objectos diferentes, prove que o número de escolhas ordenadas distintas de qualquer número desses objectos (uma das possibilidades é não escolher qualquer objecto, outra é escolher primeiro o objecto A e depois o objecto B e ainda outra é escolher primeiro o objecto B e depois o objecto A, e assim sucessivamente), é igual $\lfloor n!e \rfloor$, onde e denota a base de logaritmos neperianos e $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro não superior a x.

   - **Sugestão**. Note-se que por cada subconjunto de k objectos escolhidos, de entre os n possíveis, o facto da ordem com que se escolhe cada um definir uma possibilidade, existem $k!$ diferentes ordenações para esses objectos. Logo, denotando o número total de possibilidades por $f(n)$, obtém-se

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} j! \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{n!j!}{(n-j)!j!} \\ &= n! \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(n-j)!} \\ &= n! \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}. \end{aligned}$$

9. Quantos números se podem escrever utilizando apenas os dígitos que pertencem ao conjunto $\{1, 3, 5, 7, 9\}$?

2.4 Projecto.

Dado um número natural $n \geq 2$, verifica-se a igualdade

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 0.$$

Como consequência, vem que $\mu(n) = -\sum_{d|n,\ d<n} \mu(d)$. Tendo em conta que $\mu(1) = 1$, propõe-se a utilização da igualdade anterior para a implementação em MAPLE de um procedimento recursivo que determine o valor da função de Möbius para um número natural arbitrário.

- Solução apresentada por Márcia de Jesus Ferreira (n. 20 715) e Vera Cláudia Gomes de Oliveira (n. 19 422).

  - *Função de Möbius* (1^a versão).

    > **with**(numtheory);
    > FuncaoMobius := proc(n :: integer)

```
> local D, d, i, mobius;
> D := divisors(n);
> d := D[1..nops(D)-1];
> if n=1 then return n; else
    > mobius:=0;
    > for i in d do
    > mobius:=mobius + FuncaoMobius(i);
    > od;
> fi;
> return (-1)*mobius
> end:
```

– *Função de Möbius* (2ª versão).

```
> with(numtheory);
> FuncaoMobius1 := proc(N :: integer)
> local A, n, resultado;
> n := N;
> if n=1 then return n; else
    > if nops(fatorset(n)) = bigomega(n) then
      resultado:=(-1)^nops(fatorset(n)); else resultado:=0;
    > fi;
> fi;
> end:
```

Referências

[1] Biggs, N. L. *Discrete Mathematics.* Oxford University Press (2a ed.), 2002.

[2] Shen, A. and N. K. Vereshchagin. *Basic Set Theory.* AMS - Student Mathematical Library, 17, 2002.

3 Aula Prática de 2-3-2004.

- **Sumário**.
  - Algoritmo de Euclides para a determinação do máximo divisor comum entre dois inteiros não negativos.
  - Exercícios.
  - Projecto.
    - Implementação em MAPLE do algoritmo de Euclides.

3.1 Algoritmo de Euclides.

Podemos afirmar que $d = mdc(m, n)$ se

- $d|n$,
- $d|m$,
- e se $\exists c \in \mathbb{Z}$ tal que $c|n$ e $c|m$, então $c \leq d$.

O mais popular dos métodos para determinação do máximo divisor comum entre dois números m e n é o algoritmo de Euclides que se baseia no seguinte resultado:

$$m = nq + r \text{ com } 0 \leq r < n \Rightarrow D_m \cap D_n = D_n \cap D_r,$$

onde D_q o conjunto dos divisores de q. Com efeito, se $d \in D_m \cap D_n$ então $d|(m - nq) \Leftrightarrow d|r$ e, consequentemente, $d \in D_n \cap D_r$. Reciprocamente, se $d \in D_n \cap D_r$ então $d|(nq + r) \Leftrightarrow d|m$, pelo que $d \in D_m \cap D_n$. Logo, podemos concluir que $mdc(m, n) = mdc(n, r)$. Nestas condições, o algoritmo de Euclides pode formalizar-se de acordo com o procedimento a seguir, no qual, ao escrever-se $r_i = r_{i+1}q_{i+1} + r_{i+2}$, se supõe que $0 \leq r_{i+2} < r_{i+1}$.

- **Algoritmo de Euclides**, para a determinação de $mdc(m, n)$.
  - **Fazer** $r_0 := r_1q_1 + r_2$, com $r_0 := m$ e $r_1 := n$;
  - **Fazer** $i := 1$;
  - **Enquanto** $r_{i+1} > 0$ **fazer** $r_i = r_{i+1}q_{i+1} + r_{i+2}$ e $i := i + 1$;
  - $mdc(m, n) := r_i$.
- **Fim do algoritmo**.

Como exemplo de aplicação, vamos utilizar o algoritmo de Euclides na determinação do máximo divisor comum entre 546 e 222.

Como consequência imediata do algoritmo de Euclides, pode concluir-se o resultado que se segue.

i	r_i	r_{i+1}	$r_i = r_{i+1} \times q_{i+1} + r_{i+2}$		$mdc(r_i, r_{i+1}) = mdc(r_{i+1}, r_{i+2})$
0	546	222	$546 = 222 \times 2 + 102$	$\Rightarrow$	$mdc(546, 222) = mdc(222, 102)$
1	222	102	$222 = 102 \times 2 + 18$	$\Rightarrow$	$mdc(222, 102) = mdc(102, 18)$
2	102	18	$102 = 18 \times 5 + 12$	$\Rightarrow$	$mdc(102, 18) = mdc(18, 12)$
3	18	12	$18 = 12 \times 1 + 6$	$\Rightarrow$	$mdc(18, 12) = mdc(12, 6)$
4	12	6	$12 = 6 \times 2 + 0$	$\Rightarrow$	$mdc(12, 6) = mdc(6, 0)$
					$mdc(6, 0) = 6$

Tabela 1: Determinação de $mdc(546, 222)$ por aplicação do algoritmo de Euclides.

Teorema 3.1. *Sejam m e n dois inteiros positivos e seja $d = mdc(m, n)$. Então existem inteiros x e y tais que*

$$d = mx + ny.$$

Demonstração. Supondo que, por aplicação do algoritmo de Euclides, se obtém a sequência

$$\begin{aligned}
r_0 = r_1q_1 + r_2 &\Leftrightarrow r_2 = r_0 - r_1q_1,\\
r_1 = r_2q_2 + r_3 &\Leftrightarrow r_3 = r_1 - r_2q_2\\
&\Leftrightarrow r_3 = r_1 - (r_0 - r_1q_1)q_2\\
&\Leftrightarrow r_3 = r_1(1 + q_1q_2) - r_0q_2,\\
r_2 = r_3q_3 + r_4 &\Leftrightarrow r_4 = r_2 - r_3q_3\\
&\Leftrightarrow r_4 = (r_0 - r_1q_1) - (r_1(1 + q_1q_2) - r_0q_2)q_3\\
&\Leftrightarrow r_4 = r_0(1 + q_2q_3) - r_1(q_1 + q_3 + q_1q_2q_3),\\
\text{etc},&
\end{aligned}$$

até se determinar r_k, conclui-se a igualdade pretendida. ■

Procedendo como o sugerido na prova deste teorema, para o caso de $m = 546$ e $n = 222$, obtém-se $r_0 = 546$ e $r_1 = 222$ e a sequência

$$\begin{aligned}
r_0 = r_1q_1 + r_2 &\Leftrightarrow r_2 = r_0 - r_1q_1, \text{ com } q_1 = 2,\\
&\Leftrightarrow r_2 = 546 - 222 \times 2,\\
r_1 = r_2q_2 + r_3 &\Leftrightarrow r_3 = r_1 - r_2q_2, \text{ com } q_2 = 2,\\
&\Leftrightarrow r_3 = 222 - (546 - 222 \times 2) \times 2\\
&\Leftrightarrow r_3 = 546 \times (-2) + 222 \times 5,\\
r_2 = r_3q_3 + r_4 &\Leftrightarrow r_4 = r_2 - r_3q_3, \text{ com } q_3 = 5,\\
&\Leftrightarrow r_4 = 546 - 222 \times 2 - (546 \times (-2) + 222 \times 5) \times 5,\\
&\Leftrightarrow r_4 = 546 \times 11 + 222 \times (-27),\\
r_3 = r_4q_4 + r_5 &\Leftrightarrow r_5 = r_3 - r_4q_4, \text{ com } q_4 = 1,\\
&\Leftrightarrow r_5 = 546 \times (-2) + 222 \times 5 - (546 \times 11 + 222 \times (-27)),\\
&\Leftrightarrow r_5 = 546 \times (-13) + 222 \times 32.
\end{aligned}$$

Assim, uma vez que $6 = mdc(546, 222) = r_5$, vem que

$$6 = 546 \times (-13) + 222 \times 32.$$

Tendo em conta o teorema 3.1, concluímos que dados dois números naturais m e n primos entre si, existem dois inteiros x e y tais que

$$mx + my = 1.$$

3.2 Exercícios.

1. Supondo que um tanque com a capacidade de 20 litros tem duas torneiras para encher e e outras duas para esvaziar, em ambos os casos com débitos de 9 e 15 litros por minuto, e que as torneiras podem ser comandadas à distância com intervalos de tempo (entre a abertura e o fecho) que são múltiplos do minuto, indique um procedimento para se armazenarem apenas 6 litros.
   Sugestão. Dado que $mdc(9, 15) = 6$, note que existem inteiros x e y tais que $9x + 15y = 6$.

2. Determine $d = mdc(672, 448)$ e determine dois inteiros x e y tais que $672x + 448y = d$.

3. Mostre que, dados dois números naturais m e n, se existem dois inteiros x e y tais que $mx + ny = 1$, então $mdc(m, n) = 1$.
   Sugestão. Suponha que existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $d|m$ e $d|n$.

4. Sendo $d = mdc(m, n)$, prove que existem inteiros p e q que satisfazem a equação $pm + qn = c$ se e somente se $d|c$.

5. Supondo que p é um número primo e $x_1, \dots x_n$ são números inteiros, prove que se $p|(x_1 \cdots x_n)$, então $p|x_i$ para algum $i \in \{1, \dots, n\}$.
   Sugestão: Faça a prova por indução, tendo em conta que para $n = 2$ se $p|x_1x_2$ e p não divide x_1, então (tendo em conta que 1 e p são os únicos divisores de p) $mdc(p, x_1) = 1$ e, consequentemente, existem inteiros r e s tais que $rp + sx_1 = 1$. Logo $x_2 = (rp + sx_1)x_2 = (rx_2)p + s(x_1x_2)$ e, uma vez que p divide x_1x_2, concluí-se que também divide x_2.

6. Prove o *teorema fundamental da aritmética*, onde se estabelece que para qualquer inteiro positivo $n \geq 2$ a menos da ordem a sua factorização é única.
   Sugestão. Admita a existência de duas factorizações $n = p_1 \cdots p_r$ e $n = p'_1 \cdots p'_s$ com primos repetidos, se necessário, e utilize a conclusão do exercício anterior.

3.3 Projecto.

Implementação em MAPLE do algoritmo de Euclides para a determinação do máximo divisor comum entre dois números inteiros positivos.

- Solução apresentada por Carla Carvalho (*n.* 21 327), Pedro Gonçalves (*n.* 19 753) e Mário Peixoto (*n.* 19 809).
  - *Algoritmo Iterativo.*

    > Euclides := **proc**(m,n :: **integer**)
    > **local** a, b, aux:: **integer**;
    > **if** m>n **then** a:=n; b:=m **mod** n **else** a:=m; b:=n **mod** n **fi**;
    > **while** b>0 **do**
    >> aux:=a; a:=b; b:=aux **mod** b;
    > **od**;
    > **return** a;
    > **end proc**:

  - *Algoritmo Recursivo.*

    > rEuclides := **proc**(m,n :: **integer**)
    > **if** n>m **then** rEuclides(n,m) **else if** n=0 **then return** m **else** rEuclides(n,m mod n) **fi**
    > **end proc**:

Referências

[1] Biggs, N. L. *Discrete Mathematics.* Oxford University Press (2a ed.), 2002.

4 Aula Prática de 09-3-2004.

- **Sumário**.
  - Funções de Euler e de Möbius.
  - Aritmética módulo m.
  - Exercícios.
  - Projecto.
    - Implementação em MAPLE de um algoritmo que, dado $m \in \mathbb{N}$, determina o conjunto dos elementos invertíveis de $\mathbb{Z}_m$ e os respectivos inversos.

4.1 Funções de Euler e Möbius.

A *função de Euler* define-se como sendo a função

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{N} & \mapsto & \mathbb{N} \\ n & \rightsquigarrow & \Phi(n) = |\{x \in \mathbb{N}_n : mdc(x, n) = 1\}|, \end{array}$$

ou seja, tal que $\Phi(n)$ é igual ao número de primos relativos com n pertencentes a $\mathbb{N}_n$. Sabe-se que, sendo n um inteiro positivo, $\sum_{d|n} \Phi(d) = n$ e, supondo $n \geq 2$, com factorização em primos dada por $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$, obtém-se

$$\Phi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \cdots (1 - \frac{1}{p_r}).$$

Por sua vez, a função de Möbius $\mu : \mathbb{N} \mapsto \{-1, 0, 1\}$ define-se como sendo tal que

$$\mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad d = 1, \\ (-1)^k & \text{se} \quad d \text{ é o produto de } k \text{ primos distintos}, \\ 0 & \text{se} \quad d \text{ tem um factor primo repetido.} \end{cases}$$

Sabe-se que dado um inteiro $n \geq 2$, $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$ e que, dada uma função arbitrária $g : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, se f é tal que $f(n) = \sum_{d|n} g(d)$, então a função g pode ser obtida de f pela equação $g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(\frac{n}{d})$, conhecida por fórmula de inversão de Möbius.

4.2 Aritmética módulo m.

O conjunto dos inteiros módulo m, que vamos denotar por $\mathbb{Z}_m$, é o conjunto de todas as classes de equivalência módulo m pertencentes a $\mathbb{Z}$. Vamos denotar as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{Z}_m$, respectivamente por $\oplus$ e $\otimes$. Assim, dadas as classes de equivalência $[x]_m$ e $[y]_m$ de $\mathbb{Z}_m$ vem que

$$[x]_m \oplus [y]_m = [x + y]_m \text{ e } [x]_m \otimes [y]_m = [xy]_m.[$$

Para simplificar a linguagem vamos denotar $[x]_m$ simplesmente por x, embora se trate de uma classe de equivalência de $\mathbb{Z}_m$.
Um elemento $z \in \mathbb{Z}_m$ diz-se *invertível* se existe $x \in \mathbb{Z}_m$ tal que $z \otimes x = 1$ em $\mathbb{Z}_m$. Nestas condições x designa-se por *inverso* de z e denota-se por z^{-1} (uma vez que $z \otimes x = x \otimes z = 1$, conclui-se também que $z = x^{-1}$).

4.3 Exercícios.

1. Calcule $\Phi(n)$ para cada n tal que $150 \leq n \leq 160$.

2. Calcule o número de números inteiros positivos que não são relativamente primos com 860.

3. Prove que dados dois inteiros positivos m e n,
$$mdc(m, n) = 1 \Leftrightarrow \Phi(mn) = \Phi(m)\Phi(n).$$

4. Prove o recíproco do teorema da inversão de Möbius, ou seja, se f é obtida de g pela equação $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)g(\frac{n}{d})$, então a g pode obter-se de f pela equação
$$g(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

5. Dado um número natural n, denote-se por D_n o conjunto dos divisores positivos de n, ou seja, $D_n = \{d \in \mathbb{N}_n : d|n\}$. Considerando a equação linear nas variáveis x_d, com $d \in D_n$,
$$\sum_{d|n} x_d = n, \tag{2}$$
prove que $x_d = \Phi(d)+z\mu(d)$, com d percorrendo D_n, constitui uma solução inteira da equação (2), qualquer que seja $z \in \mathbb{Z}$.

6. Prove que $\mathbb{Z}_m$ com as operações $\oplus$ e $\otimes$ tem estrutura de *anel*, ou seja, as operações $\oplus$ e $\otimes$ verificam as propriedades:
   (a) $x \oplus y = y \oplus x$ e $x \otimes y = y \otimes x$.
   (b) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ e $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$.
   (c) $x \oplus 0 = x$ e $x \otimes 1 = x$.
   (d) $x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$.
   (e) $\forall z \in \mathbb{Z}_m$ existe um único elemento $-z \in \mathbb{Z}_m$ tal que $z \oplus (-z) = 0$.

7. Determine os elementos invertíveis de $\mathbb{Z}_8$ e $\mathbb{Z}_{13}$.

8. Calcule os inversos de 3 em $\mathbb{Z}_7$, de 5 em $\mathbb{Z}_{11}$ e de 7 em $\mathbb{Z}_{15}$.

9. Prove que se p é um número primo então $\mathbb{Z}_p$, munido com as operações $\oplus$ e $\otimes$, é um corpo, i.e, $(\mathbb{Z}_p, \oplus)$ e $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \otimes)$ têm ambos estrutura de grupo comutativo e verifica-se a distributividade da multiplicação relativamente à adição (ou seja, $x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$).

10. Considerando o produto de todos os elementos não nulos de $\mathbb{Z}_p$, onde p é um número primo, mostre que $(p-1)! \equiv -1 (mod\, p)$.

4.4 Projecto.

Implementação em MAPLE de um algoritmo que, dado $m \in \mathbb{N}$, determina o conjunto dos elementos invertíveis de $\mathbb{Z}_m$ e os respectivos inversos.

- Solução apresentada por Sara Filipa da Silva Oliveira (n. 20 477) e Inês Maria Prior Bernardes (n. 20 625).

```
> with(combinat):
> with(numtheory):
> Inverter:=proc(n::integer)
> local i,j,k,l,fim, Invertiveis, inversos;
> Invertiveis:=1;
> inversos:=1;
> for i from 1 to n do
    > if nops(divisors(i) intersect divisors(n)) = 1 then
    > Invertiveis:= Invertiveis union i;
    > fi;
> od;
> for j in Invertiveis do
    > for k from 2 to n do
        > if (j*k mod n=1) then
        > inversos:=inversos,k:
        > fi;
    > od;
> od;
> print("Os valores invertiveis são:", Invertiveis );
> print("Os respectivos inversos são:", inversos);
> end:
```

Referências

[1] Biggs, N. L. *Discrete Mathematics*. Oxford University Press (2a ed.), 2002.

5 Aula Prática de 16-3-2004.

- **Sumário**.
  - Determinação de quadrados latinos e quadrados latinos normalizados.
  - Determinação de pares de quadrados latinos ortogonais.
  - Exercícios.
  - Projecto.
    - Implementação em MAPLE de um algoritmo que, dado um número primo p, determine um conjunto de $p-1$ quadrados latinos de ordem p mutuamente ortogonais.

5.1 Determinação de quadrados latinos e quadrados latinos ortogonais

Um grupoide (i. e, um conjunto não vazio com um lei de composição interna) $(S,\odot)$ diz-se um *quasigrupo* de ordem n se $|S|=n$ e $\forall a,b\in S$ existe um único elemento $x\in S$ tal que $x\odot a=b$ e um único elemento $y\in S$ tal que $a\odot y=b$. De acordo com esta definição, sendo $(S,\odot)$ um quasigrupo, com $S=\mathbb{N}_n$, na matriz A, com entradas a_{ij} tais que $\forall i,j\in\mathbb{N}_n$ $a_{ij}=i\odot j$, verifica-se que cada elemento de S ocorre exactamente uma vez em cada uma das linhas e colunas. Neste texto, denota-se por $L(n)$ o número total de quadrados latinos distintos de ordem n (o qual, naturalmente, coincide com o número de quasigrupos de ordem n) e por $L^*(n)$ o número de quadrados latinos de ordem n normalizados, no sentido a seguir indicado.
Por permutação das linhas e colunas, qualquer quadrado latino arbitrário de ordem n, com símbolos em $\mathbb{N}_n$, se pode escrever de tal forma que na sua primeira linha e coluna os símbolos apareçam pela ordem $1,2,\ldots,n$. Um tal quadrado latino designa-se por *quadrado latino normalizado*.
Dois quadrados latinos L' e L'' dizem-se ortogonais quando, para quaisquer pares de símbolos (α,β) existe uma única entrada (i,j) tal que

$$L'_{ij}=\alpha \text{ e } L''_{ij}=\beta.$$

- A tabela da operação $\oplus$ do quasigrupo $(\mathbb{Z}_m,\oplus)$ define um quadrado latino.
- $L(n)=n!(n-1)!L^*(n)$.
- Seja p primo e $q\in\mathbb{Z}_p\setminus\{0\}$.
  - Então a matriz L^q tal que

    $$\forall i,j\in\mathbb{Z}_p \qquad L^q_{ij}=(q\otimes i)\oplus j$$

    define um quadrado latino.
  - Adicionalmente, $\forall r,s\in\mathbb{Z}_p\setminus\{0\}$ tal que $r\neq s$ os quadrados latinos L^r e L^s são ortogonais.

5.2 Exercícios.

1. Construa um quadrado latino de ordem 10.

2. Prove que a menos de permutações de linhas, colunas e símbolos, existe

   (a) um único quadrado latino de ordem 1,

   (b) um único quadrado latino de ordem 2,

   (c) um único quadrado latino de ordem 3,

   (d) e dois quadrados latinos distintos de ordem 4.

3. Determine um quadrado latino normalizado de ordem 7.

4. Construa um conjunto de 4 quadrados latinos de ordem 5 mutuamente ortogonais.

5. Prove que dado um par de quadrados latinos L' e L'' de ordem n e símbolos em $\mathbb{N}_n$, se não existe um par de símbolos $(p, q) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n$ tais que

$$\begin{array}{ccc} L'_{i_r j_r} = p & \text{e} & L''_{i_r j_r} = q, \\ L'_{i_s j_s} = p & \text{e} & L''_{i_s j_s} = q, \end{array}$$

   com entradas $(i_r, j_r) \neq (i_s, j_s)$, então $\forall (x, y) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n$ existe uma entrada (i, j) tal que $L'_{ij} = x$ e $L''_{ij} = y$.

   - **Sugestão**. Suponha que $\exists (x, y) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n$ para o qual $\nexists (i, j)$ tal que $L'_{ij} = x$ e $L''_{ij} = y$. Uma vez que cada símbolo aparece exactamente uma vez em cada linha e coluna, então cada símbolo aparece exactamente n vezes em cada um dos quadrados latinos. Assim, supondo que x aparece em L' nas entradas $(1, j_1), (2, j_2), \ldots, (n, j_n)$, vamos considerar a função

$$\begin{array}{rcl} f_x : \mathbb{N}_n & \mapsto & \mathbb{N}_n \\ i & \rightsquigarrow & f_x(i) = L''_{i j_i}. \end{array}$$

     Dado que $y \notin f_x(\mathbb{N}_n)$, pelo princípio da gaiola dos pombos, podemos concluir que f_x não é injectiva e, consequentemente, que $\exists r, s \in \mathbb{N}_n$ tais que $f_x(r) = L''_{r j_r} = L''_{s j_s} = f_x(s)$.

5.3 Projecto.

Implementação em MAPLE de um algoritmo que, dado um número primo p, determine um conjunto de $p-1$ quadrados latinos de ordem p mutuamente ortogonais.

- Solução apresentada por Joana Sofia Sobral Santos ($n.$ 18 322) e Margarida Alexandra Fidalgo Nunes Lavrador ($n.$ 17 948).

```
> qlatino:= proc(p::integer)
> local k,i,j,q;
> for k from 1 to p-1 do
    > q:=linalg[matrix](p,p);
    > for i from 1 to p do
        > for j from 1 to p do
              > q[i,j]:=((k*i)+j) mod p;
        > od;
    > od;
> print(q);
> od;
> end:
```

Referências

[1] Biggs, N. L. *Discrete Mathematics*. Oxford University Press (2a ed.), 2002.

[2] Cameron, P. J. *Combinatorics - Topics, Techniques and Algorithms*. Cambridge University Press, 1994.

6 Aula Prática de 23-3-2004.

- **Sumário**.
  - Determinação de *designs* $1-(n,p,q)$ e $t-(v,k,\lambda)$.
  - Determinação de sistemas de Steiner.
  - Projecto.
    * Determinação de um sistema de triplos de Steiner $S(2,15,3)$.

6.1 Determinação de *designs* $1-(n,p,q)$ e $t-(v,k,\lambda)$

Existe um *design* com parâmetros (n,p,q) sse

$$p|nq \quad \text{e} \quad \frac{nq}{p} \leq \binom{n}{p}.$$

Dados os inteiros positivos t, k, v e λ tais que $t<k<v$, o par $(X,\mathcal{B})$ diz-se um *design* t-(v,k,λ), ou t-*design* com parâmetros (v,k,λ), se X é um conjunto de cardinalidade v e $\mathcal{B}$ é uma colecção de k-subconjuntos de X, designados por blocos, onde quaisquer t elementos de X estão contidos em exactamente λ blocos.

- Se $(X,\mathcal{B})$ é um *design* t-(v,k,λ), então

$$|\mathcal{B}| \;=\; \lambda\frac{\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}}.$$

- Para $s \leq t$, qualquer *design* t-(v,k,λ) é também um *design* s-(v,k,λ_s), onde

$$\lambda_s = \lambda\frac{\binom{v-s}{t-s}}{\binom{k-s}{t-s}}.$$

Segue-se a desigualdade de Fisher que constitui uma condição necessária para a existência de *designs* $2-(v,k,\lambda)$.

- Se $(X,\mathcal{B})$ é um *design* $2-(v,k,\lambda)$ então $|\mathcal{B}| \geq v$.

6.2 Determinação de sistemas de Steiner

Um *design* $t-(v,k,\lambda)$, com $\lambda=1$, designa-se por *sistema de Steiner* e denota-se por $S(t,v,k)$. Em [1] refere-se o desconhecimento de sistemas de Steiner com $t>5$ e acrescenta-se que os únicos sistemas de Steiner conhecidos com $t=5$ são: $S(5,12,6)$, $S(5,24,8)$, $S(5,24,6)$, $S(5,48,6)$, $S(5,84,6)$, $S(5,28,7)$ e $S(5,72,6)$. Por outro, os únicos sistemas de Steiner conhecidos com $t=4$ são os que decorrem dos sistemas de Steiner que se conhecem para $t=5$.
Os sistemas de Steiner $S(t,v,k)$ com $k=3$ designam-se, usualmente, por sistema de *triplos de Steiner*. Por exemplo, o sistema de triplos de Steiner $S(2,9,3)$

é constituído pelos blocos $\{1,2,3\}$, $\{4,5,6\}$, $\{7,8,9\}$, $\{1,4,7\}$, $\{1,6,8\}$, $\{1,5,9\}$, $\{2,5,8\}$, $\{3,6,9\}$, $\{2,4,9\}$, $\{3,5,7\}$, $\{2,6,7\}$, $\{3,4,8\}$.

6.3 Exercícios.

1. Para cada um dos ternos de parâmetros a seguir indicados, construa o respectivo 1-*design* ou justifique porque é que um tal *design* não existe

   (a) $(n,p,q) = (6,3,1)$.

   (b) $(n,p,q) = (5,2,1)$.

   (c) $(n,p,q) = (7,3,3)$.

   (d) $(n,p,q) = (9,6,4)$.

2. Qual o valor de λ para o *design* 1-(v,k,λ) cujos blocos são todos os k-subconjuntos de $\mathbb{N}_v$.

3. Seja $(X,\mathcal{B})$ um *design* 1-(v,k,λ) e seja $\mathcal{B}'$ a família dos complementares dos elementos de $\mathcal{B}$ em X. Mostre que $(X,\mathcal{B}')$ é também um 1-*design* e determine os seus parâmetros (x,y,z), em função de (v,k,λ).

4. Determine os parâmetros do *design* complementar do *design* $2-(7,3,1)$ (ou seja, do *design* que se obtém substituindo os blocos do *design* $2-(7,3,1)$ pelos seus complementares em $\mathbb{N}_7$).

5. Determine todos os parâmetros t, k e λ possíveis para um *design* não trivial $t-(9,k,\lambda)$ (entendendo-se por design trivial todo o *design* $t-(v,k,\lambda)$ onde qualquer k-subconjunto é um bloco).

6.4 Projecto.

Determine o sistema de triplos de Steiner $S(2, 15, 3)$, o qual corresponde à solução do clássico problema da organização, para 15 pessoas, de 7 passeios (um em cada dia da semana) com 5 grupos diários de 3 elementos, de tal forma que, ao longo da semana, nenhum par de pessoas integre um mesmo grupo mais do que uma vez.

- Solução apresentada por Diane Diogo Guedes (*n.* 17 290) e Nuno Duarte Marcelino Pinto (*n.* 16 749).

$\{2, 10, 13\}$	$\{3, 4, 9\}$	$\{2, 6, 8\}$	$\{3, 5, 13\}$	$\{3, 6, 11\}$
$\{3, 8, 10\}$	$\{3, 12, 14\}$	$\{2, 7, 9\}$	$\{4, 8, 15\}$	$\{4, 7, 14\}$
$\{1, 3, 7\}$	$\{1, 4, 6\}$	$\{4, 5, 10\}$	$\{1, 9, 13\}$	$\{1, 10, 11\}$
$\{1, 8, 12\}$	$\{6, 7, 12\}$	$\{5, 8, 14\}$	$\{5, 7, 11\}$	$\{1, 5, 15\}$
$\{1, 2, 14\}$	$\{5, 6, 9\}$	$\{4, 12, 13\}$	$\{2, 5, 12\}$	$\{2, 3, 15\}$
$\{6, 10, 14\}$	$\{2, 4, 11\}$	$\{6, 13, 15\}$	$\{7, 10, 15\}$	$\{7, 8, 13\}$
$\{8, 9, 11\}$	$\{9, 10, 12\}$	$\{9, 14, 15\}$	$\{11, 12, 15\}$	$\{11, 13, 14\}$

Referências

[1] Biggs, N. L. *Discrete Mathematics*. Oxford University Press (2a ed.), 2002.

[2] Cameron, P. J. *Combinatorics - Topics, Techniques and Algorithms*. Cambridge University Press, 1994.

7 Aula Prática de 30-3-2004.

- **Sumário**.
  - Sistemas de triplos de Steiner.
  - Abordagens heurísticas da determinação de um $STS(n)$.
  - Projecto.
    - Implementação de um método heurístico para a determinação de sistemas de triplos de Steiner e sua aplicação na determinação de um $STS(15)$.

7.1 Determinação de sistemas de triplos de Steiner

Um *sistema de Steiner* é um *design* $t-(v,k,\lambda)$, com $\lambda = 1$, o qual vamos denotar por $S(t,v,k)$. Por sua vez, designam-se por sistemas de triplos de Steiner os sistemas de Steiner $S(t,v,k)$, com $t = 2$ e $k = 3$, denotando-se tais sistemas por $STS(v)$. Na última aula teórica sobre *designs* apresentou-se como exemplo de sistema de triplos de Steiner, $STS(9)$ que é constituído pelos blocos: $\{1,2,3\}, \{4,5,6\}, \{7,8,9\}, \{1,4,7\}, \{1,6,8\}, \{1,5,9\}, \{2,5,8\}, \{3,6,9\}, \{2,4,9\}$, $\{3,5,7\}$, $\{2,6,7\}$, $\{3,4,8\}$.
Outro exemplo de sistema de triplos de Steiner é $STS(7)$, cujos blocos correspondem aos conjuntos:
$\{1,2,4\}$, $\{2,3,5\}$, $\{3,4,6\}$, $\{4,5,7\}$, $\{1,5,6\}$, $\{2,6,7\}$, $\{1,3,7\}$.
Vamos apresentar um algoritmo para a determinação de sistemas de triplos de Steiner, adoptando uma abordagem idêntica à seguida em [1].

Lema 7.1. *Se $(X,\mathcal{B})$ é um $STS(n)$ então qualquer elemento $x \in X$ ocorre exactamente em $r = \frac{n-1}{2}$ blocos e o número de blocos é $|\mathcal{B}| = \frac{n(n-1)}{6}$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{B}_x$ o conjunto dos blocos que contêm um elemento arbitrário $x \in X$. Então $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_x} B$ e, dado que $\forall B', B'' \in \mathcal{B}_x \; B' \cap B'' = \emptyset$, podemos concluir que $|\mathcal{B}_x| = \frac{n-1}{2}$, o que prova a primeira parte. Por sua vez, a prova de que o número de blocos é $\frac{n(n-1)}{6}$ decorre da igualdade $3|\mathcal{B}| = rn$. ∎

Como consequência imediata deste lema, dado $n \in \mathbb{N}$, se $STS(n)$ existe então

$$n \equiv \begin{cases} 1 & (\text{mod } 6) \\ \text{ou} & \\ 3 & (\text{mod } 6). \end{cases} \tag{3}$$

Na verdade provou-se, há mais de 100 anos, que existe um $STS(n)$ se e somente se a relação de congruência (3) se verifica. A prova da suficiência da condição (3) é construtiva, conduzindo-nos a um método para a determinação de pelo menos um $STS(n)$, qualquer que seja n admissível (i. e, que verifique (3)).

Designa-se por *sistema de triplos de Steiner parcial* um par $(X,\mathcal{B})$, onde $\mathcal{B}$ é uma família de blocos de X de cardinalidade 3, relativamente à qual, cada par de pontos de X está contido, no máximo, num único bloco. Sendo $|X| = n$, um tal sistema de triplos de Steiner parcial denota-se por $STSP(n)$, designando-se o seu número de blocos por *tamanho* do $STSP(n)$ (note-se que sendo $X = \mathbb{N}_n$, com $n \geq 3$, e $\mathcal{B} = \{\{1, 2, 3\}\}$, o par $(X, \mathcal{B})$ corresponde a um $STSP(n)$ de tamanho 1). É fácil concluir que qualquer $STSP(n)$ tem, no máximo, $\frac{n(n-1)}{6}$ blocos e que atingindo este número é um $STS(n)$. Assim, podemos considerar o problema da determinação de um $STS(n)$ como um problema de optimização combinatória.

Seja $\mathcal{FB}(X)$ o conjunto de todas as famílias $\mathcal{B}$ de blocos para as quais o par $(X, \mathcal{B})$ é um $STSP(n)$. Logo, qualquer $STS(n)$ fica determinado por uma família $\mathcal{B}^* \in \mathcal{FB}(X)$ de blocos tal que

$$|\mathcal{B}^*| = \max\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \in \mathcal{FB}(X)\},$$

sabendo-se que $|\mathcal{B}^*| = \frac{n(n-1)}{6}$.

- Seja $(X, \mathcal{B})$ um $STSP(n)$ arbitrário. Um elemento $x \in X$ diz-se um *ponto vivo* se $r(x) < \frac{n-1}{2}$ (onde $r(x)$ denota o número de réplicas de x, i. e, o número de blocos de $\mathcal{B}$ em que x ocorre). Um par de elementos de X distintos, (x, y), diz-se um *par vivo* se não existe nenhum bloco $B \in \mathcal{B}$ tal que $\{x, y\} \subseteq B$.

- Se o $STSP(n)$ tem tamanho inferior a $\frac{n(n-1)}{6}$, então tem de existir um ponto vivo. Adicionalmente, sendo x um ponto vivo, então têm de existir, pelo menos, dois elementos $y, z \in X$ ($y \neq z$) tais que os pares (x, y) e (x, z) são ambos pares vivos (tal acontece porque $r(x) \leq \frac{(n-3)}{2}$ e, consequentemente, x ocorre nos diferentes blocos com, no máximo, $n - 3$ elementos distintos de x).

A pesquisa exaustiva dos pontos e pares de pontos vivos, pode provocar o que se designa por *explosão combinatória*. Em alternativa a uma pesquisa exaustiva dos pontos e pares de pontos vivos, vamos apresentar um algoritmo heurístico, o qual vamos designar por AHSTS e que tem como argumentos de entrada um par $(X, \mathcal{B})$, definindo um STSP(n). Com este algoritmo heurístico, a partir de escolhas aleatórias de pontos vivos x e de elementos $y, z \in X$ tais que (y, x) e (x, z) são pares vivos, sempre que possível, incrementa-se a cardinalidade do $STSP(n)$ corrente e, quando tal não é possível, um dos blocos é substituído por um bloco novo. Com esta estratégia, espera-se que a aleatoriedade das escolhas e, a substituição de alguns blocos por outros, proporcione uma aproximação ao sistema de triplos de Steiner pretendido.

Algoritmo AHSTS$(X, \mathcal{B})$

1. **Enquanto** $|\mathcal{B}| < \frac{|X|(|X|-1)}{6}$ **faz**
   1.1 escolher um ponto vivo $x \in X$ e escolher dois elementos $y, z \in X$ tais que (y, x) e (x, z) são pares vivos;
   1.2 **se** (y, z) é par vivo
      1.2.1 **então** $\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B} \cup \{\{x, y, z\}\}$;
      1.2.2 **senão**, sendo $B \in \mathcal{B}$ tal que $y, z \in B$,
$$\mathcal{B} \leftarrow (\mathcal{B} \setminus \{B\}) \cup \{\{x, y, z\}\};$$
fim faz;

Fim do Algoritmo.

7.2 Exercícios.

1. Verifique se existem ou não os sistemas de triplos de Steiner:
   (a) $STS(13)$.
   (b) $STS(18)$.
   (c) $STS(121)$.

2. Aplique o algoritmo heurístico AHSTS à determinação dos seguintes sistemas de triplos de Steiner:
   (a) $STS(7)$, partindo do $STSP(7)$ $(\mathbb{N}_7, \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{1, 4, 7\})$.
   (b) $STS(9)$, partindo do $STSP(9)$ $(\mathbb{N}_9, \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\})$.

3. Prove que, se $(X, \mathcal{B})$ é um $STSP(n)$ então $|\mathcal{B}| \leq \frac{n(n-1)}{6}$.
   - **Sugestão**. Note que $\forall x \in X \;\; r(x) \leq \frac{n-1}{2}$, pelo que
$$\sum_{x \in X} r(x) \leq n\frac{n-1}{2}.$$

4. Prove que se $(X, \mathcal{B})$ é um $STSP(n)$ de tamanho $\frac{n(n-1)}{6}$ então é um $STS(n)$.
   - **Sugestão**. Tenha em conta que
$$3|\mathcal{B}| = \sum_{x \in X} r(x) = \frac{n(n-1)}{2} \;\Rightarrow\; r(x) = \frac{n-1}{2} \;\forall x \in X.$$

5. Prove que dado um $STSP(n)$ $(X, \mathcal{B})$, se existe um ponto vivo $x \in X$ então existem $y, z \in X$ tais que (x, y) e (x, z) são pares vivos.

7.3 Projecto.

Implementação de um método heurístico para a determinação de sistemas de triplos de Steiner e sua aplicação na determinação de um $STS(15)$.

- Solução apresentada por Carla Carvalho ($n.$ 21 327), Pedro Gonçalves ($n.$ 19 753) e Mário Peixoto ($n.$ 19 809).

```
> with(combinat):
> STSP:=proc(n::integer)            # Gera um sistema de triplos
> local aux:: set(set),
> nFim,i,K:: integer;
> nFim:=(n mod 3);
> if nFim =0 then
    > K:=n
  else
    > if nFim=1 then K:=n-1 else K:=n-2 end if;
  end if;
> aux:={};
> for i from 1 to K by 3 do aux:=aux union {{i, i+1, i+2}} od;
> if nFim=1 then
    > aux:=aux union {{K+1, 1, 4}}
  else
    > if nFim=2 then aux:=aux union {{K+1, K+2, 1}} end if;
  end if
> return aux
> end proc:

> Vivos:=proc(N:: integer,X:: integer,C:: set)
> local i, numC, cont, j:: integer;
> cont:=0;
> numC:=nops(C);
> for i from 1 to numC do
    > for j from 1 to 3 do
      if C[i][j]=X then cont:=cont+1 end if;
      od
  od;
> if cont=(N-1)/2 then return false else return true end if;
> end proc:
```

```
> Pares_Vivos:=proc(Par::set,C::set)
> local numC,i::integer,
> local vivo::boolean;
> vivo:=true; i:=1; numC:=nops(C);
> while i <= numC and vivo do
    > if nops(Par intersect C[i])=2 then vivo:=false end if;
    > i:=i+1;
  od;
> return [vivo,i-1]
> end proc:

> AHSTS:=proc(V::integer)
> local aux1, x, indice, y, i, z, o::integer,
> tseq, conj:: set,
> junta:: boolean;
> tseq:=seq(o,o=1..V);
> print("Conjunto: ", tseq);
> conj:=STSP(V);
> print("Partição Inicial: ",conj);
> while nops(conj)< V*(V-1)/6 do
    > # Determinação do primeiro vivo
    > aux1:=rand(1..V);
    > while not Vivos(V,x,conj) do aux1:=rand(1..V); x:=aux1(); x:=aux1();
      od:
    > # Determinação do segundo vivo de modo que,
    > # juntamente com o primeiro, dê um par vivo
    > aux1:=rand(1..V); y:=aux1();
    > while y=x or not Pares_Vivos(x,y,conj)[1] do
      aux1:=rand(1..V); y:=aux1();
      od:
    > # Determinação do terceiro vivo de modo que,
    > # juntamente com o primeiro, dê um par vivo
    > aux1:=rand(1..V); z:=aux1();
    > while z=x or z=y or not Pares_Vivos(x,z,conj)[1] do
      aux1:=rand(1..V); z:=aux1();
      od:
    > junta:=Pares_Vivos(y,z,conj)[1];
    > indice:=Pares_Vivos(y,z,conj)[2];
```

> **if** junta **then**
conj:=conj **union** $\{\{x, y, z\}\}$; # Juntamos um novo conjunto à partição
else
conj:= conj **minus** conj[indice]; # Retiramos o conjunto contendo o par morto
conj:= conj **union** x,y,z; # Juntamos o conjunto encontrado
fi

od;

> **print**("Conjunto Final:");

> **return** conj

> **end proc**:

> V:=15:

> **if** (V **mod** 6)=1 **or** (V **mod** 6)=3 **then** AHSTS(V);

> **print**(nops(%),"Blocos");

> **else print**('Não é possivel cálcular o sistema de triplos!¡)

> **end if;**

Conjunto:	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
Partição Inicial:	$\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\}, \{10, 11, 12\}, \{13, 14, 15\}\}$
Conjunto Final:	$\{\{3, 5, 8\}, \{7, 8, 13\}, \{3, 7, 14\}, \{9, 13, 14\}, \{3, 9, 11\},$
	$\{2, 9, 10\}, \{4, 6, 9\}, \{3, 6, 12\}, \{2, 4, 12\}, \{10, 12, 14\},$
	$\{11, 12, 13\}, \{7, 10, 11\}, \{2, 6, 13\}, \{5, 6, 11\}, \{2, 5, 7\},$
	$\{4, 13, 15\}, \{4, 5, 14\}, \{1, 2, 11\}, \{11, 14, 15\}, \{4, 8, 11\},$
	$\{6, 8, 10\}, \{1, 3, 13\}, \{2, 8, 14\}, \{1, 6, 14\}, \{1, 10, 15\},$
	$\{1, 5, 12\}, \{1, 8, 9\}, \{1, 4, 7\}, \{6, 7, 15\}, \{5, 9, 15\},$
	$\{7, 9, 12\}, \{3, 4, 10\}, \{5, 10, 13\}, \{2, 3, 15\}, \{8, 12, 15\}\}$
35 Blocos.	

Referências

[1] Kreher, D. L. and D. R. Stinson. *Combinatorial Algorithms: generation, enumeration and search.* CRC Press, Boca Raton, 1999.

8 Aula Prática de 13-4-2004.

- **Sumário**.
  - Relações de pré-ordem, relações de ordem parcial e relações de ordem total (ou lineares). Sequências de termos de conjuntos totalmente ordenados e subsequências monótonas. Correspondência biunívoca entre pré-ordens e topologias definidas em conjuntos finitos.
  - Projecto.
    - Implementar em MAPLE um procedimento que aceita como argumento de entrada uma pré-ordem, definida num conjunto finito pelos respectivos pares ordenados de elementos distintos, e determina a topologia que lhe corresponde.

8.1 Relações de pré-ordem, relações de ordem parcial e relações de ordem total (ou lineares).

- **Pré-ordem**: é toda a relação binária reflexiva e transitiva. Na terminologia inglesa estas relações designam-se por *quasi-orders*.
- **Ordem parcial**: é toda a relação reflexiva, anti-simétrica e transitivo. Um conjunto munido de uma relação de ordem parcial designa-se por conjunto parcialmente ordenado (*poset* na terminologia inglesa).
  - Todo o subconjunto não vazio de um conjunto parcialmente ordenado finito tem um elemento maximal e um elemento minimal.
- **Ordem total**: é um relação de ordem parcial relativamente à qual, estando definida num conjunto X, todos os pares de elementos de X são comparáveis. Esta relação também se designa por relação de ordem linear.

8.2 Sequências de termos de conjuntos totalmente ordenados e subsequências monótonas.

Dado um conjunto X, designamos por *sequência finita* (ou, simplesmente, sequência) de termos de X, toda a aplicação $x : \mathbb{N}_n \mapsto X$. Usualmente, $\forall k \in \mathbb{N}_n \;\; x(k)$ denota-se por x_k. As sequências infinitas, i.e, definidas em $\mathbb{N}$, designam-se, habitualmente, por sucessões.
Em geral, uma sequência definida em $\mathbb{N}_n$ denota-se pelo n-uplo das suas imagens, i. e, por $S = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Dada uma sequência de termos em X, $S = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, a função $b : \mathbb{N}_m \mapsto X$ diz-se uma *subsequência* de S, se existe um subconjunto $J \subseteq \mathbb{N}_n$ e uma função bijectiva $f : \mathbb{N}_m \mapsto J$, tal que $i < j \Rightarrow f(i) < f(j)$, para a qual se verifica que $\forall k \in \mathbb{N}_m \;\; b(k) = x(f(k))$.
Sendo X um conjunto munido de uma relação de ordem total $\preceq_L$, uma sequência de termos de X, $S = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, diz-se não decrescente (não crescente) se $\forall i < j \; x_i \preceq_L x_j$ $(x_i \succeq_L x_j)$. Uma sequência não decrescente ou não crescente

diz-se uma *sequência monótona*.

- Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $S = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{mn+1})$ uma sequência de $mn+1$ elementos de um conjunto X munido de uma relação de ordem total $\preceq_L$. Então S contém uma subsequência não decrescente de $m+1$ termos ou uma subsequência não crescente de $n+1$ termos (ou ambas).

Dados os conjuntos X e Y, onde estão definidas as relações binárias $\mathcal{R}_P$ e $\mathcal{R}_Q$, respectivamente, diz-se que a função $f : X \mapsto Y$ *preserva as relações* $\mathcal{R}_P$ e $\mathcal{R}_Q$ se

$$\forall x_1, x_2 \in X \;\; x_1 \mathcal{R}_P x_2 \;\Rightarrow f(x_1)\mathcal{R}_Q f(x_2).$$

Como exemplo, dados os conjunto parcialmente ordenados definido pelos pares $(\mathcal{P}(X), \subseteq_P)$ e $(\mathcal{P}(X), \supseteq_Q)$, onde X é um conjunto finito arbitrário não vazio, a função $\mathcal{I} : \mathcal{P}(X) \mapsto \mathcal{P}(X)$ tal que $\mathcal{I}(Y) = \bar{Y}$, onde $\bar{Y}$ denota o complementar de Y em X (i.e, $\bar{Y} = X \setminus Y$), preserva as relações de ordem parcial $\subseteq_P$ e $\supseteq_Q$.
Dados dois conjuntos parcialmente ordenados $P = (X, \preceq_P)$ e $Q = (Y, \preceq_Q)$ e uma função $\Phi : X \mapsto Y$, diz-se que Φ é um *isomorfismo* entre P e Q se se verificam as seguintes propriedades:

1. Φ preserva as relações de ordem $\preceq_P$ e $\preceq_Q$;
2. Φ admite inversa Φ^{-1};
3. Φ^{-1} preserva as relações de ordem $\preceq_Q$ e $\preceq_P$;

Quando existe um isomorfismo entre os *posets* P e Q diz-se que P e Q são *isomorfos*.

8.3 Correspondência biunívoca entre pré-ordens e topologias definidas em conjuntos finitos.

Como se sabe uma topologia consiste num par (X, τ), onde X é um conjunto e $\tau = \{X_j : X_j \subseteq X, j \in J\}$ é uma família subcojuntos de X, verificando as seguintes condições:

1. $\emptyset \in \tau$ e $X \in \tau$;
2. $\forall I \subseteq J, \;\; \bigcup_{i \in I} X_i \in \tau$;
3. $\forall i, j \in J, \;\; X_i \cap X_j \in \tau$.

Por indução, a partir da condição 3, com facilidade se conclui que a intersecção de um número finito de elementos de τ ainda é um elemento de τ. Quando X é finito a condição 2 pode ser substituída por $\forall i, j \in J, \;\; X_i \cup X_j \in \tau$. Os elementos de τ são, usualmente, designados por abertos.
Com o teorema a seguir, a descrição de topologias finitas (conjuntos de conjuntos) reduz-se à descrição de pré-ordens (conjuntos de pares ordenados).

Teorema 8.1. *Se X é um conjunto finito então existe uma correspondência biunívoca entre as topologias definidas em X e as relação de pré-ordem em X.*

A demonstração deste teorema pode fazer-se à custa das seguintes construções:

- **Construção 1**. Sendo τ uma topologia em X, defina-se a relação binária $\mathcal{R}$ em X pela seguinte regra: $(x, y) \in \mathcal{R}$ se qualquer aberto de τ que contém x também contém y. A prova que esta relação $\mathcal{R}$ é

    reflexiva

    e transitiva

  e, consequentemente, que $\mathcal{R}$ é uma pré-ordem em X, é imediata.

- **Construção 2**. Seja $\mathcal{R}$ uma relação de pré-ordem em X e defina-se a família de subconjuntos de X, τ, pela seguinte regra: $U \subseteq X$ pertence à família τ se $x \in U \ \Rightarrow \ R(x) \subseteq U$. Segue-se a prova de que τ define uma topologia em X.

  1. É imediato que a condição 1 se verifica.
  2. Para provar que a condição 2 se verifica, considere os abertos de τ, $U_1, U_2, \ldots$ e seja $x \in \bigcup_i U_i$. Então $x \in U_j$ para algum j e, consequentemente, $\mathcal{R}(x) \subseteq U_j \subseteq \bigcup_i U_i$.
  3. Finalmente, para provar que a condição 3 se verifica, considere dois abertos U e V e que $x \in U \cap V$. Então $\mathcal{R}(x) \subseteq U$ e $\mathcal{R}(x) \subseteq V$, pelo que $\mathcal{R}(x) \subseteq U \cap V$ e, consequentemente, $U \cap V$ é aberto.

8.4 Exercícios.

1. Dados dois conjuntos X e Y tais que $|X| = |Y|$, quantas bijecções existem entre X e Y.

2. Prove que o conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ munido da relação

$$\begin{aligned}\preceq \ = \ & \{(1,1),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),\\ & (2,6),(3,3),(3,5),(3,6),(4,4),(4,5),(4,6),(5,5),(6,6)\},\end{aligned}$$

   é um conjunto parcialmente ordenado.

3. Prove que se $P = (X, \preceq_P)$ é um conjunto parcialmente ordenado e $\exists x_1, \ldots, x_k \in X$ tais que $x_1 \preceq_P \ldots \preceq_P x_k \preceq_P x_1$ então $x_1 = x_2 = \ldots = x_k$.

4. Dada a sequência

$$S = (3, -1, 0, 2, 5, -2, 4, 1, -9, -3, 2, 6, 8, -6, -5, 7, -6, -4, 9, -7, -8, 6, -7, 5, -2, 0),$$

   com 26 termos, responda às seguintes questões:

(a) Verifique se existe ou não uma subsequência monótona com 6 termos.

(b) Determine uma subsequência monótona com o número máximo de termos.

5. Dados os conjuntos parcialmente ordenados $P = (X, \preceq_P)$ e $Q = (Y, \preceq_Q)$, onde $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{a, b, c, d, e, f\}$,

$$\begin{array}{lcl} \preceq_P & = & \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (4,4)\}, \\ \preceq_Q & = & \{(a,a), (a,d), (b,b), (b,d), (b,f), (c,c), (c,e), (d,d), (e,e), (f,f)\}, \end{array}$$

determine uma função $f : X \mapsto Y$ que preserve as relações $\preceq_p$ e $\preceq_Q$.

6. Dados os conjuntos parcialmente ordenado $P = (X, \preceq_P)$, $Q = (Y, \preceq_Q)$ e $R = (Z, \preceq_R)$ e as funções $f : X \mapsto Y$ e $g : Y \mapsto Z$ que preservam as respectivas relações de ordem parcial, prove que a composição $gof : P \mapsto R$ preserva as relações de ordem parcial $\preceq_P$ e $\preceq_Q$.

7. Sendo $P = (X, \preceq_P)$ um conjunto parcialmente ordenado e $Q = (Y, \mathcal{R}_Q)$ prove que se existe uma função bijectiva $f : X \mapsto Y$ que preserva as relações $\preceq_P$ e $\mathcal{R}_Q$, então Q é um conjunto parcialmente ordenado.

8. Determine a topologia correspondente à pré-ordem $\preceq$ da questão 2, utilizando a **construção 2** introduzida na prova do teorema 8.1.

9. Determine as topologias correspondente às pré-ordens $\preceq_P$ e $\preceq_Q$ da questão 5, utilizando a **construção 2** introduzida na prova do teorema 8.1.

8.5 Projecto.

Implementar em MAPLE um procedimento que aceita como argumento de entrada uma pré-ordem, definida num conjunto finito pelos respectivos pares ordenados de elementos distintos, e determina a topologia produzida pela **construção 2** utilizada na prova do teorema 8.1.

- Solução apresentada por Márcia de Jesus Ferreira (*n.* 20 715) e Vera Cláudia Gomes Oliveira (*n.* 19 422).

```
>with(combinat):
>Topologia:=proc(relacao)
>local X,Y,v,h,i,j,Top,R,k,g,uniao,b,transitiva;
> # Calculo da transitividade
  > transitiva:=proc(rr)
  > local Y,u,v,w;
  > Y:=map(u -> op(1,u),relacao) union map(u -> op(2,u),relacao);
  > for u in Y do
     > for v in Y do
        > for w in Y do
          >if (member([u,v],rr) and member([v,w],rr) and not member([u,w],rr)) then RETURN(false) fi
        > od;
     > od;
  > od;
  > RETURN(true);
  > end:
>if transitiva(relacao)=true then
  > X:=map(u->op(1,u),relacao) union map(u->op(2,u),relacao);
  > Top:={};
  > # cálculo dos conjuntos R(i)
     > Y:={};
     > for i in X do
       > R:={i};
       > for j from 1 to nops(relacao) do
        > if i=relacao[j][1] then R:=R union {relacao[j][2]} fi;
       > od;
       > Y:=Y union R;
     > od;
     > Top:=Top union Y;
```

```
> # cálculo das uniões
    > uniao:={};
    > b:=1;
    > while b<=nops(X)-1 do
        > for k from 1 to nops(Y)-1 do
          >h:=Y minus Y[k];
          >for v from 1 to nops(h) do
          >g:=(Y[k] union h[v]);
          >uniao := uniao union g;
          >od;
        > od;
        > Y:=Y union uniao;
        > b:=b+1;
    > od;
> # cálculo final da topologia
    > Top:=Top union Y union {{}} union {X};
    > print(Top);
>else printf("A relação que introduziu não é uma relação de pré-ordem!");
>fi;
>end:
```

Seguem-se alguns dos testes efectuados.

> Topologia($\{[1, 2], [1, 3]\}$);

$$\{\{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2\}, \{3\}, \{\}\}$$

> Topologia($\{[1, 3], [4, 5]\}$);

$$\{\{3, 4, 5\}, \{1, 3\}, \{5\}, \{4, 5\}, \{1, 3, 5\}, \{3\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{\}\}$$

> Topologia($\{[1, 2], [1, 3], [2, 3]\}$);

$$\{\{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{3\}, \{\}\}$$

> Topologia($\{[1, 2], [2, 3], [3, 4], [5, 6], [6, 7], [5, 7], [1, 3]\}$);

A relação que introduziu não é uma relação de pré-ordem!

Referências

[1] Cameron, P. J. *Combinatorics - Topics, Techniques and Algorithms*. Cambridge University Press, 1994.

[2] Schröder, B. S. W. *Ordered Sets*. Birkhäuser, Boston, 2003.

9 Aula Prática de 20-4-2004.

- **Sumário**.
  - Cadeias e anticadeias. Subrelações e extensões.

9.1 Cadeias e anticadeias.

- Lema de Dilworth: Em qualquer conjunto parcialmente ordenado $P = (X, \preceq_P)$, de $mn + 1$ elementos, existe uma cadeia de cardinalidade $m + 1$ ou uma anti-cadeia de cardinalidade $n + 1$.
- Corolário do lema de Dilworth: Se $P = (X, \preceq_P)$ é um conjunto parcialmente ordenado com comprimento $p - 1$ e largura q então $|X| \leq pq$.
- Seja $P = (X, \preceq_P)$ um conjunto parcialmente ordenado com comprimento $p - 1$ e largura q. Então X não pode ser partido em menos de q cadeias nem em menos de p anticadeias.
- Teorema de Dilworth: Se o conjunto parcialmente ordenado $P = (X, \preceq_P)$ tem largura q então X pode partir-se em q cadeias.
- Resultado dual do teorema de Dilworth: Se no conjunto parcialmente ordenado $P = (X, \preceq_P)$ a cadeia de maior cardinalidade tem p elementos, então X pode partir-se em p anticadeias.

9.2 Subrelações e extensões.

- Dada uma relação de ordem parcial, R, definida em X, se $Y \subset X$ então $R_Y = R \cap (Y \times Y)$ designa-se por *restrição* de R a Y.
- Sendo $P_1 = (X, \preceq_{P_1})$ e $P_2 = (X, \preceq_{P_2})$ dois conjuntos parcialmente ordenados tais que $\preceq_{P_1} \subset \preceq_{P_2}$, diz-se que $\preceq_{P_2}$ é uma *extensão* de $\preceq_{P_1}$ e que $\preceq_{P_1}$ é uma *subrelação* de $\preceq_{P_2}$. Se $\preceq_{P_2}$ é uma ordem linear em X, então P_2 diz-se uma *extensão linear* de P_1.
- Todo o conjunto parcialmente ordenado admite uma extensão linear. Em particular, é fácil concluir que todo o conjunto parcialmente ordenado finito tem uma extensão linear. Com efeito, denotando por P_0 o conjunto parcialmente ordenado finito $P = (X, \preceq_P)$ e por $P_{i+1} = (X_{i+1}, \preceq_{P_{i+1}})$ o conjunto parcialmente ordenado obtido de $P_i = (X_i, \preceq_{P_i})$ fazendo $X_{i+1} = X_i \setminus \{x_i\}$, onde x_i é um elemento minimal para P_i, obtém-se a extensão linear $L(P) = (X, \preceq_{L(P)})$ tal que $x_i \prec_{L(P)} x_{i+1}$ $\forall i \in \{1, \ldots, |X| - 1\}$.
- O teorema a seguir sugere uma metodologia distinta da anterior para a obtenção de extensões lineares de conjuntos parcialmente ordenados.

Teorema 9.1. *Dado um conjunto parcialmente ordenado* $(X, \mathcal{R})$ *se* $\alpha, \beta \in X$ *são não comparáveis relativamente a* $\mathcal{R}$*, então a relação* $\mathcal{R}'$ *tal que* $\alpha \mathcal{R}' \beta$ *e*

$$\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cup (\downarrow\alpha \times \uparrow\beta),$$

onde $\downarrow\alpha = \{x : (x, \alpha) \in \mathcal{R}\}$ *e* $\uparrow\beta = \{y : (\beta, y) \in \mathcal{R}\}$*, é também uma relação de ordem parcial.*

Com este resultado, uma vez que $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}'$ e $\mathcal{R}'$ é, ainda, uma relação de ordem parcial, escolhendo, sucessivamente, pares de pontos não comparáveis, até que não exista nenhum em tais condições, obtém-se uma relação de ordem total, ou seja, uma extensão linear de $\mathcal{R}$.

9.3 Exercícios.

1. Considere os inteiros positivos $x_1 < x_2 < \ldots < x_{mn+1}$ e prove que ou existe um subconjunto $S \subset \{x_1, x_2, \ldots, x_{mn+1}\}$ de $m+1$ inteiros tais que $\forall x_i, x_j \in S$, com $i < j$, x_i não divide x_j, ou existe um subconjunto $T \subset \{x_1, x_2, \ldots, x_{mn+1}\}$ de $n+1$ inteiros tais que $\forall x_i, x_j \in T$, com $i < j$, x_i divide x_j.

    - **Sugestão**. Aplique o lema de Dilworth.

2. Dados $n^2 + 1$ intervalos arbitrários de $\mathbb{R}$ prove que ou existem $n+1$ intervalos cuja intersecção é não vazia ou existem $n+1$ intervalos todos disjuntos.

3. Dado o conjunto parcialmente ordenado $P = (\mathcal{P}(X), \subseteq_P)$ prove que

    (a) o comprimento de P é igual $|X|$

    (b) e a largura de P é não inferior a $\frac{2^{|X|}}{|X|+1}$.

    - **Sugestão**. Utilize o corolário do lema de Dilworth.

4. Determine o comprimento e a largura do conjunto parcialmente ordenado definido pelo conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$ munido da relação

$$\begin{aligned}\preceq \;=\; & \{(1,1),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),\\ & (2,6),(3,3),(3,5),(3,6),(4,4),(4,5),(4,6),(5,5),(6,6)\}.\end{aligned}$$

5. Prove a seguinte versão do lema de Dilworth para conjuntos infinitos:

    Teorema 9.2 (versão infinita do lema de Dilworth)**.** *Em qualquer conjunto parcialmente ordenado com uma infinidade de elementos ou existe uma anticadeia de cardinalidade infinita ou existe uma cadeia de cardinalidade infinita.*

6. Represente o conjunto parcialmente ordenado $P = (X, \preceq_P)$, onde $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e

$$\begin{aligned}\preceq_P \;=\; & \{(1,1),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),\\ & (2,6),(3,3),(3,5),(3,6),(4,4),(4,5),(4,6),(5,5),(6,6)\},\end{aligned}$$

através do respectivo diagrama de Hasse.

7. Determine uma extensão linear do conjunto parcialmente ordenado definido no exercício 6.

Referências

[1] Cameron, P. J. *Combinatorics - Topics, Techniques and Algorithms*. Cambridge University Press, 1994.

[2] Erikson, M. J., *Introduction to Combinatorics*. John Wiley & Sons, 1998.

[3] Schröder, B. S. W. *Ordered Sets*. Birkhäuser, Boston, 2003.

10 Aula Prática de 27-04-2003.

- **Sumário**.
  - Relações de ordem fraca, intervalar e semi-transitivas.
  - Conjuntos extremais.
  - Projecto.
    - Implementar em MAPLE um procedimento que aceita como parâmetros de entrada os pares ordenados de elementos distintos que definem um conjunto parcialmente ordenado e determina uma sua extensão linear.

10.1 Relações de ordem fraca, intervalar e semi-transitivas.

Dado um conjunto parcialmente ordenado, $P = (X, \preceq_P)$, a relação de ordem parcial $\preceq_P$ designa-se por

- *ordem fraca* quando

$$x \prec_P y \;\;\Rightarrow\;\; \forall z \in X,\; x \preceq_P z \text{ ou } z \preceq_P y$$

  (de um modo equivalente pode afirmar-se que $\preceq_P$ é uma ordem fraca se existe uma função $f : X \mapsto R$ tal que $x \prec_P y$ sse $f(x) < f(y)$);

- *ordem intervalar* quando

$$x \prec_P y \;\wedge\; z \prec_P u \;\;\Rightarrow\;\; x \prec_P u \text{ ou } z \prec_P y;$$

- *ordem semi-transitiva* quando

$$x \prec_P y \;\wedge\; y \prec_P z \;\;\Rightarrow\;\; \forall u \in X,\; u \preceq_P z \text{ ou } x \preceq_P u;$$

- *quase-ordem* (*semiorder* na terminologia inglesa) quando é intervalar e semi-transitiva.

- Uma ordem parcial em $P = (X, \preceq_P)$ é uma ordem fraca sse

$$\forall A, B \in AM_P,\; A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset.$$

- Nem todas as ordens intervalares são semi-transitivas. Por exemplo, a ordem intervalar representada na Figura 1 não é semi-transitiva (uma vez que a sua restrição aos intervalos x, y, z e v é isomorfa a $1 \bigoplus 3$).

- Seja $\{I_x = [\alpha_x, \beta_x] : x \in X\}$ uma família de intervalos tais que $\beta_x - \alpha_x = \epsilon > 0\; \forall x \in X$. Então $P = (X, \preceq_P)$ tal que $\forall x_i, x_j \in X\; x_i \prec_P x_j$ sse $I_{x_i} \lhd I_{x_j}$, é uma quase-ordem.

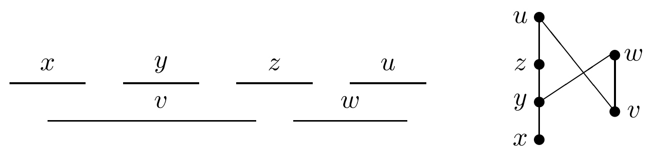

Figura 1: exemplo de ordem intervalar não semi-transitiva

- Sendo $\{L_1(P), \ldots, L_k(P)\}$ um conjunto de extensões lineares do conjunto parcialmente ordenado $P = (X, \preceq_P)$, então $\bigcap_{j=1}^{k} L_j(P)$ denota a ordem parcial definida em X, onde dois elementos de X são comparáveis sse são comparáveis, segundo a mesma direcção, para todas as extensões lineares do conjunto $\{L_j(P) : j \in \mathbb{N}_k\}$.
- O menor número de extensões lineares de P cuja intersecção é P designa-se por *dimensão* de P e denota-se por $dim(P)$,

10.2 Conjuntos extremais.

- Dado o conjunto parcialmente ordenado $P = (\mathcal{P}(X), \subseteq_P)$, uma família $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$, diz-se uma *família de Sperner*, se nenhum elemento de $\mathcal{F}$ contém qualquer outro, i. e, se

$$\forall A, B \in \mathcal{F} \ \ \{(A, B), (B, A)\} \cap \subseteq_P = \emptyset.$$

- É imediato concluir que $P = (\mathcal{P}(X), \subseteq_P)$ tem comprimento $|X|$ e, consequentemente pode partir-se em $|X| + 1$ anticadeias.
- Se $\mathcal{A}$ é uma anticadeia de máxima cardinalidade do conjunto parcialmente ordenado $P = (\mathcal{P}(\mathbb{N}_n), \subseteq_P)$ então

$$|\mathcal{A}| = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

.

- Uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X designa-se por família intersectante se $\forall A, B \in \mathcal{F} \ \ A \cap B \neq \emptyset$.
- Qualquer família de subconjuntos de $\mathbb{N}_n$ intersectante, $\mathcal{F}$, é tal que $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$. Adicionalmente, pode concluir-se que existe uma destas famílias cuja cardinalidade é precisamente 2^{n-1}.
- Seja $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_n) : |A| = k\}$ uma família intersectante. Se $k \leq \frac{n}{2}$ então $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$.

10.3 Exercícios.

1. Considere as relações de ordem parcial

$$\begin{aligned}
\preceq_P &= \{(1,1),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),\\
&\quad (2,6),(3,3),(3,5),(3,6),(4,4),(4,5),(4,6),(5,5),(6,6)\},\\
\preceq_Q &= \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(3,2),(2,4),(3,3),(4,4)\},\\
\preceq_R &= \{(a,a),(a,d),(b,b),(b,d),(b,f),(c,c),(c,e),(d,d),(e,e),(f,f)\},
\end{aligned}$$

   definidas em $X = \{1,2,3,4,5,6\}$, $Y = \{1,2,3,4\}$ e $Z = \{a,b,c,d,e,f\}$, respectivamente e verifique se alguma delas é uma relação de ordem

   (a) fraca;
   (b) intervalar;
   (c) semi-transitiva;
   (d) quase-ordem.

2. No caso de alguma das relações anteriores ser uma relação de ordem fraca, determine o conjunto parcialmente ordenado AM_P das anticadeias maximais e, a partir dele, obtenha uma extensão linear.

3. Determine a dimensão dos conjuntos parcialmente ordenados do exercício 1.

4. Dada uma família de conjuntos parcialmente ordenados $P_i = (X, \preceq_{P_i})$, com $i \in I$, denotando por $\bigcap_{i\in I} P_i$ o par $(X, \preceq)$, onde $\preceq = \bigcap_{i\in I} \preceq_{P_i}$, prove que $\bigcap_{i\in I} P_i$ é um conjunto parcialmente ordenado.

5. Sendo $\mathcal{L}(P) = \{L_j(P) : j \in J\}$ o conjunto de todas as extensões lineares do conjunto parcialmente ordenado $P = (X, \preceq_P)$, prove que $P = \bigcap_{j\in J} L_j(P)$.

6. Dado o conjunto parcialmente ordenado $P = (\mathcal{P}(\mathbb{N}_n), \subseteq_P)$, prove que existem $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ subconjuntos de cardinalidade $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ que constituem uma anticadeia.

7. Dada a família $\mathcal{F}_k = \{U : U \subseteq X, |U| = k\}$, onde X é um conjunto finito não vazio, prove que se $|X| < 2k$, então $\mathcal{F}_k$ é intersectante.

   - **Sugestão**. Note que se A e B são subconjuntos de X tais que $|X| < 2\min\{|A|, |B|\}$, então

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| > \frac{|X|}{2} + \frac{|X|}{2} - |X| = 0.$$

8. Prove que o conjunto parcialmente ordenado $P = (\mathcal{P}(\mathbb{N}_n), \subseteq_P)$ admite uma partição em $n+1$ anticadeias e uma partição em $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ cadeias.

10.4 Projecto.

Implementar em MAPLE um procedimento que aceita como parâmetros de entrada os pares ordenados de elementos distintos que definem um conjunto parcialmente ordenado e determina uma sua extensão linear.

- Solução apresentada por António Miguel da Costa Pinho (*n.* 14 787) e Maria de Fátima Lopes (*n.* 15 416)

```
> with(combinat):
> ExtensaoLinear:=proc(relbin)
    > local transitividade, elementomin, m, R, i, extensao, j, R1;
    > # Testar a transitividade da relação binária.
    > transitividade:=proc(relacao)
        > local D, a, b, c;
        > D:=map(a->op(1,a),relbin) union map(a->op(2,a),relbin);
        > bf for a in D do
          >for b in D do
          >for c in D do
          >if (member([a,b],relacao) and member([b,c],relacao) and
          not member([a,c],relacao)) then RETURN(false);
          >fi
          >od;
          >od;
          od;
        > RETURN(true);
    > end:
    > # Identificar o elemento minimal m na relação R.
    > elementomin:=proc(m,R)
        > local i;
        > if R= then return true fi
        > i:=1;
        > while i<=nops(R) do
          >if m=R[i][2] then return false;
          >else if i=nops(R) then return true fi
          >fi
          >i:=i+1;
        > od;
    > end:
    > ########
    > if transitividade(relbin) = true then
      > D:=map(a->op(1,a),relbin) union map(a->op(2,a),relbin);
      > extensao:=NULL;
      > R:=relbin;
```

```
> while R<>[0,0] do;
>for m in D do
>if elementomin(m,R)=true then
> D:=D minus {m};
> extensao:=extensao,m;
> for j in R do
> if j[1]=m then
> R1:=R minus j;
> j[1]:=j[2];
> j[2]:=0;
> R:=R1 union j;
>fi;
> od;
> fi;
> od;
> od;
> print(extensao);
> else print("Não é um poset");
> fi;
> end:
```

- **Exemplo**

> ExtensaoLinear({[4, 2], [4, 3], [4, 1], [2, 3], [2, 1], [3, 1]});

> 4, 2, 3, 1

Referências

[1] Erikson, M. J., *Introduction to Combinatorics.* John Wiley & Sons, 1998.

[2] Schröder, B. S. W. *Ordered Sets.* Birkhäuser, Boston, 2003.

[3] van Lint, J. H. and R. M. Wilson. *A Course in Combinatorics*, Cambridge University Press, 1994.

11 Aula Prática de 04-5-2004.

- **Sumário**.
  - Determinação de majorantes para a ordem de um grafo, em função do raio e do maior grau dos vértices.
  - Determinação de minorantes para a ordem de um grafo, em função da cintura e do menor grau dos vértices.

11.1 Determinação de majorantes para a ordem de um grafo, em função do raio e do maior grau dos vértices.

Um vértice $v \in V(G)$ diz-se *central* em G se a maior das distâncias entre v e os restantes vértices é a menor possível. Esta distância designa-se por *raio* de G e denota-se por $raio(G)$, pelo que

$$raio(G) = \min\{\max\{d_G(v,x) : \ x \in V(G)\} : \ v \in V(G)\}.$$

Com facilidade se conclui que

$$raio(G) \leq diam(G) \leq 2raio(G). \tag{4}$$

- Se G é um grafo tal que $raio(G) \leq r$ então

$$|V(G)| \leq 1 + \Delta(G) \sum_{i=0}^{r-1} (\Delta(G) - 1)^i.$$

- Se $raio(G) \leq r$ e $\Delta(G) > 2$ então

$$|V(G)| \quad \leq \quad 1 + \Delta(G)\frac{(\Delta(G)-1)^r - 1}{\Delta(G) - 2}. \tag{5}$$

11.2 Determinação de minorantes para a ordem de um grafo, em função da cintura e do menor grau dos vértices.

- Dado um grafo G tal que $k = \lfloor \frac{g(G)-1}{2} \rfloor$, verifica-se a desigualdade

$$|V(G)| \geq 1 + \delta(G) \sum_{i=0}^{k-1} (\delta(G) - 1)^i.$$

- Se $k = \lfloor \frac{g(G)-1}{2} \rfloor$ e $\delta(G) > 2$ então

$$|V(G)| \quad \geq \quad 1 + \delta(G)\frac{(\delta(G)-1)^k - 1}{\delta(G) - 2}. \tag{6}$$

Tendo em conta as desigualdades (5) e (6), assumindo que $raio(G) \leq r$, $k = \lfloor \frac{g(G)-1}{2} \rfloor$ e $\delta(G) > 2$ conclui-se que

$$1 + \delta(G)\frac{(\delta(G)-1)^k}{\delta(G)-2} \leq |V(G)| \leq 1 + \Delta(G)\frac{(\Delta(G)-1)^r}{\Delta(G)-2}.$$

Como exemplo de aplicação, considerando o grafo cúbico G representado na Figura 2, onde $g(G) = 5$ (pelo que $k = \lceil \frac{g(G)-1}{2} \rceil = 2$) e $raio(G) = 3$, vem que

$$1 + 3\frac{(3-1)^2 - 1}{3-2} = 10 \leq |V(G)| \leq 1 + 3\frac{(3-1)^3 - 1}{3-2} = 22.$$

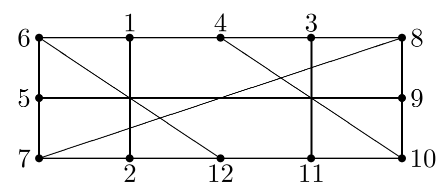

Figura 2: Grafo cúbico G tal que $g(G) = 5$ e $raio(G) = 3$.

11.3 Exercícios.

1. Dado um grafo G de ordem $n \geq 2$ prove que
   (a) $\exists x, y \in V(G)$ tal que $d_G(x) = d_G(y)$;
   (b) o número de vértices de grau ímpar é par.
2. Sabendo que uma bola de futebol é fabricada unindo pentágonos e hexágonos regulares, de tal forma que cada pentágono é cosido a cinco hexágonos e cada hexágono a três pentágonos e três hexágonos, alternadamente, diga se o número de pentágonos é par ou ímpar [1].
3. Determine o número de arestas do grafo bipartido completo K_{mn}.
4. Determine o número de arestas de um grafo conexo G, com apenas dois circuitos, sabendo que $|V(G)| = n$.
5. Sabendo que um grafo tem dimensão m e ordem n, determine a dimensão do complementar.
6. Prove as desigualdades (4).
7. Dado um grafo 4-regular G, sabendo que $raio(G) = 3$ e $g(G) = 4$, determine um minorante e um majorante para a sua ordem.

[1] Este problema foi motivado por um outro (ligeiramente mais complicado mas muito interessante) publicado em [?].

Referências

[1] Cardoso, D. M. *Tópicos sobre redes e grafos*. Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, 1998.

[2] Diestel, R. *Graph Theory*. Springer, 1997.

12 Aula Prática de 18-5-2004.

- **Sumário**.
  - Conjuntos independentes e grafos perfeitos
    - Estáveis e emparelhamentos. Grafos linha. Grafos de Hamming.
    - Colorações de vértices e arestas. Grafos perfeitos.
    - Propriedades das matrizes de adjacência e de incidência aresta (arco) vértice de grafos (digrafos).

12.1 Conjuntos independentes e grafos perfeitos

12.1.1 Estáveis e emparelhamentos. Grafos linha. Grafos de Hamming.

- Um subconjunto de vértices (arestas) dois a dois não adjacentes diz-se um *estável (emparelhamento)* ou *conjunto independente de vértices (arestas).* Um estável (emparelhamento) de máxima cardinalidade designa-se por *estável máximo* (*emparelhamento máximo*). O número de vértices de um estável máximo de um grafo G denota-se por $\alpha(G)$ e designa-se *número de estabilidade* ou *número de independência* de G. Um emparelhamento que cobre todos os vértices do grafo, ou seja, um emparelhamento $M \subseteq E(G)$ tal que $V(M) = V(G)$, designa-se por emparelhamento *perfeito.*

- Dado um grafo G, designa-se por grafo linha de G e denota-se por $L(G)$ o grafo que se obtém de G, considerando como vértices as arestas de G e como relação de adjacência entre os seus vértices a respectiva relação de adjacência entre arestas de G. Assim, dois vértices de $L(G)$ são adjacentes se e somente se as correspondentes arestas em G são adjacentes (ou seja, têm um vértice comum). Como consequência desta definição decorre que a um estável máximo de $L(G)$ corresponde um emparelhamento máximo em G. Logo, se $M \subseteq E(G)$ é um emparelhamento máximo de G, então $\alpha(L(G)) = |M|$.

- Dadas duas cadeias de m dígitos $x = x_1x_2 \dots x_m$ e $y = y_1y_2 \dots y_m$ cada um dos quais pertence a um mesmo conjunto de n símbolos, designa-se por *distância de Hamming* entre x e y, a qual vamos denotar por $d_{Ham}(x, y)$, o número de posições em que x e y diferem. Por sua vez, designa-se por *grafo de Hamming* com parâmetros (m, n) e denota-se por $H(m, n)$ o grafo cujos vértices são as cadeias de m dígitos pertencentes a um conjunto de n símbolos e onde dois vértices são adjacentes se as correspondentes cadeias estão a uma distância de Hamming igual a 1.

12.1.2 Colorações de vértices e arestas. Cliques e grafos perfeitos.

- Uma *coloração de vértices* de um grafo G é uma aplicação sobrejectiva

$$\begin{array}{rcl} c : V(G) & \mapsto & \{1, \ldots, k\} \\ v & \rightsquigarrow & c(v), \end{array}$$

  tal que $c(x) \neq c(y)$ se $xy \in E(G)$. O menor k para o qual existe uma coloração dos vértices de G designa-se por *número cromático* de G denota-se por $\chi(G)$.

- Uma *coloração de arestas* de um grafo G é uma aplicação sobrejectiva

$$\begin{array}{rcl} c' : E(G) & \mapsto & \{1, \ldots, k'\} \\ xy & \rightsquigarrow & c(xy), \end{array}$$

  tal que $c(xy) \neq c(uv)$ se as arestas xy e uv são adjacentes, ou seja, se $\{x, y\} \cap \{u, v\} \neq \emptyset$. O menor k' para o qual existe uma coloração das arestas de G designa-se por *índice cromático* de G e denota-se por $\chi'(G)$. É claro que se o grafo G é não nulo, então $\chi'(G) = \chi(L(G))$, onde $L(G)$ denota o grafo linha de G.
  Dado um grafo arbitrário G,

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

  Deve observar-se que, de acordo com a definição de coloração de arestas, um conjunto de arestas com a mesma cor é um emparelhamento. Como consequência, dado um grafo arbitrário G e sendo $M \subseteq E(G)$ um emparelhamento máximo de G, pode concluir-se que

$$|M| \geq \frac{|E(G)|}{\chi'(G)} \geq \frac{|E(G)|}{\Delta(G) + 1}. \tag{7}$$

  Adicionalmente, podemos concluir:

  – Se G é um grafo bipartido então $\chi'(G) = \Delta(G)$.
  – Dado um grafo arbitrário G, verifica-se que $|V(G)| \leq \alpha(G)\chi(G)$.

- Um conjunto de vértices adjacentes entre si designa-se por *clique*. Uma clique de máxima cardinalidade designa-se por *clique máxima* e a respectiva cardinalidade por *número de clique*. O número de clique de um grafo G denota-se por $\omega(G)$. É claro que $\alpha(G) = \omega(\bar{G})$ e $\omega(G) = \alpha(\bar{G})$. Por outro lado, também se conclui facilmente que $\omega(G) \leq \chi(G)$.
  Um grafo G diz-se perfeito se

$$\forall V' \subseteq V(G) \qquad \chi(G[V']) = \omega(G[V']).$$

  Dado um grafo arbitrário G, são equivalentes as seguintes afirmações:

- O grafo G é perfeito.
- O complementar de G é perfeito.
- Qualquer que seja o subgrafo induzido H, $|V(H)| \leq \alpha(H)\omega(H)$.
- Nem G nem o seu complementar contém qualquer ciclo induzido de comprimento ímpar não inferior a 5.

12.1.3 Propriedades das matrizes de adjacência e de incidência aresta (arco) vértice de grafos (digrafos).

A matriz de *adjacência* de um grafo G tal que $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$, é uma matriz $n \times n$, A_G, tal que

$$(A_G)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } v_i v_j \in E(G), \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por sua vez, a matriz de *adjacência* de um digrafo DG de ordem n é uma matriz $n \times n$, A_{DG}, tal que

$$(A_{DG})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in A(DG), \\ 0 & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

A matriz de *incidência* aresta vértice de um grafo de ordem n e dimensão m é uma matriz $n \times m$, B_G, tal que

$$(B_G)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } e_j = v_i v_k, \text{ para algum } v_k \in V(G), \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por sua vez, a matriz de *incidência* arco vértice de um digrafo de ordem n e dimensão m é uma matriz $n \times m$, B_{DG}, tal que

$$(B_{DG})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} & a_j = (v_i, v_k), & \text{para algum } v_k \in V(DG), \\ -1 & \text{se} & a_j = (v_k, v_i), & \text{para algum } v_k \in V(DG), \\ 0 & \text{se} & a_j = (v_p, v_q), & \text{e } v_i \notin \{v_p, v_q\}. \end{cases}$$

12.2 Exercícios.

1. Prove cada uma das desigualdades (7).
2. Determine um quadrado latino de ordem 4 a partir de uma coloração das arestas de K_{44}.
3. Dada uma matriz quadrada A, denote-se o traço de A (ou seja, a soma dos seus elementos diagonais) por $tr(A)$, o menor e o maior valor próprio de A por $\lambda_{min}(A)$ e $\lambda_{max}(A)$, respectivamente, a matriz quadrada com entradas todas iguais à unidade por J e a matriz identidade de ordem n por I_n. Tendo em conta esta notação e sendo G um grafo arbitrário tal que $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$, prove cada uma das seguintes afirmações:

(a) $\forall k \in \mathbb{N}$ a matriz A_G^k é tal que $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$ $(A_G^k)_{ij}$ é igual ao número de passeios entre os vértices v_i e v_j.

(b) $tr(A_G^3)$ é igual a $6t$, onde t denota o número de triângulos em G.

(c) $diam(G) \leq k$ se e somente se $\sum_{i=0}^{k} A^i \geq J$, onde $A^0 = I_n$ e a desigualdade é considerada componente a componente.

(d) $x \in \{0,1\}^n$ é o vector característico de um conjunto independente de vértices $S \subseteq V(G)$, ou seja, tal que $x_v = 1$ se $v \in S$ e $x_v = 0$ no caso contrário, se e somente se $x^T A_G x = 0$.

(e) $\lambda_{max}(A_G) \leq \Delta(G)$.

(f) $B_G^T B = 2I_n + A_{L(G)}$.

(g) $\lambda_{min}(A_{L(G)}) \geq -2$ e se G tem um circuito de comprimento par então $\lambda_{min}(A_{L(G)}) = -2$.

4. Dado um digrafo DG tal que $V(DG) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, prove que $B_{DG}B_{DG}^T = D_{DG} - A_{DG}$, onde $D_G = diag(d_G(x_1), \ldots, d_G(x_n))$.

Referências

[1] Berge, C. *Graphs*. North Holland (3th ed.), 1991.

[2] Cardoso, D. M. *Tópicos sobre redes e grafos*. Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, 1998.

[3] Diestel, R. *Graph Theory*. Springer, 1997.

13 Aula Prática de 25-5-2004.

- **Sumário**.
  - Grafos e digrafos de comparabilidade de conjuntos parcialmente ordenados.
    - Reconhecimento de grafos de comparabilidade.
    - Determinação de partições em cadeias de conjuntos parcialmente ordenados, a partir dos digrafos de comparabilidade.
    - Determinação de extensões fracas de conjuntos parcialmente ordenados, a partir dos digrafos de comparabilidade.

13.1 Grafos e digrafos de comparabilidade de conjuntos parcialmente ordenados.

13.1.1 Reconhecimento de grafos de comparabilidade.

- Um grafo G é um grafo de comparabilidade se e só se, para cada passeio fechado $v_1, v_2, \ldots, v_{2k+1}, v_1$ de comprimento ímpar, existe uma aresta entre x_j e x_{j+2} para algum j, com a adição considerada módulo $2k+1$.

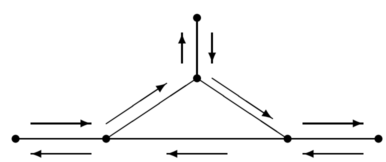

Figura 3: Grafo que não é de comparabilidade.

13.1.2 Determinação de partições em cadeias de conjuntos parcialmente ordenados, a partir dos digrafos de comparabilidade.

Procedimento 13.1. *Determinação de uma partição mínima em cadeias de um conjunto parcialmente ordenado $P = (X, \preceq_P)$.*

1. *Dividir cada vértice $x \in X$ nos vértices x^+ e x^-, definindo-se os conjuntos X^+ e X^- tendo em vista a construção do grafo bipartido $GB(P) = (X^+, X^-, E)$ tal que $\forall x_i^+ \in X^+$ e $\forall x_j^- \in X^-$*

$$x_i^+ x_j^- \in E \text{ sse } (x_i, x_j) \in A(DGC(P)),$$

para o qual, naturalmente, se verifica que $\forall x^+ \in X^+$ e $\forall x^- \in X^-$

$$d_{GB(P)}(x^+) = d^+_{DGC(P)}(x) \qquad \wedge \qquad d_{GB(P)}(x^-) = d^-_{DGC(P)}(x).$$

2. *Determinar um emparelhamento máximo, M, para $GB(P)$.*

3. *Determinar o grafo G_M, tal que*

$$V(G_M) = X^+ \cup X^- \ e \ \ E(G_M) = M \cup \{x^+x^- : x \in X\}.$$

4. *Para cada componente de G_M, determinar o caminho orientado*

$$x^-_{j_1} \to x^+_{j_1} \to x^-_{j_2} \to x^+_{j_2} \to \cdots \to x^-_{j_{k-1}} \to x^+_{j_{k-1}} \to x^-_{j_k} \to x^+_{j_k},$$

com $x^+_{j_i}x^-_{j_{i+1}} \in M \ \forall i \in \{1, \ldots, k-1\}$.

5. *Para cada um dos caminhos orientados determinados no passo anterior, determinar o correspondente caminho orientado em $DGC(P)$*

$$x_{j_1} \to x_{j_2} \to \cdots \to x_{j_{k-1}} \to x_{j_k}$$

o qual, por sua vez, define a cadeia de P, $x_{j_1} \succ_P x_{j_2} \succ_P \ldots \succ_P x_{j_k}$.

6. *Fim do procedimento.*

13.1.3 Determinação de extensões fracas de conjuntos parcialmente ordenados, a partir dos digrafos de comparabilidade.

- Considerando o digrafo de comparabilidade $DGC(P)$ do conjunto parcialmente ordenado $P = (X, \succeq_P)$ e, para cada $x \in X$, definindo

$$e_P(x) = d^+_{DGC(P)}(x) - d^-_{DGC(P)}(x),$$

podemos concluir que $\forall x, y \in X$

$$x \succ_P y \quad \Rightarrow \quad e_P(x) > e_P(y). \tag{8}$$

- A extensão de Rabinovitch de um conjunto parcialmente ordenado $P = (X, \succeq_P)$, $R(P) = (X, \succeq_{R(P)})$, definida por

$$x \succ_{R(P)} y \Leftrightarrow e_P(x) > e_P(y),$$

é uma extensão fraca de P.

13.2 Exercícios.

1. Verifique se o grafo representado na Figura **??** é um grafo de comparabilidade de algum conjunto parcialmente ordenado.

2. Considere o conjunto parcialmente ordenado $P = (\mathcal{G}_3, \subseteq_P)$, onde $\mathcal{G}_3$ denota o conjunto dos grafos de ordem 3 e $G \subseteq_P H$ significa que G é subgrafo de H.
   (a) Determine o digrafo de comparabilidade $DGC(P)$.
   (b) Determine $\alpha(GC(P))$ e $\omega(GC(P))$.
   (c) A partir do grafo bipartido $GB(P)$, determine uma partição mínima de P em cadeias.
3. Prove que o grafo de comparabilidade de um conjunto parcialmente ordenado é um grafo perfeito.
4. Com base no Teorema 3.3.3 do texto de apoio, verifique se o digrafo representado na Figura 3.1 do texto de apio tem ciclos orientados.
5. Prove que a extensão de Rabinovich de um conjunto parcialmente ordenado $P = (X, \succ_P)$ é um conjunto parcialmente tal que $\succ_P \subseteq \succ_R (P)$.
6. Considere o conjunto parcialmente ordenado definido pelos caminhos orientados do digrafo representado na Figura 3.1.
   (a) Determine o digrafo de comparabilidade.
   (b) Calcule a largura e o comprimento.
   (c) Determine a extensão de Rabinovitch e, a partir dela, uma extensão linear.
7. Considere o conjunto parcialmente ordenado definido pelo digrafo de comparabilidade representado na Figura 3.8 do texto de apoio.
   (a) Calcule a largura e o comprimento.
   (b) Utilizando o Procedimento 13.1, determine uma partição mínima em cadeias.
   (c) Determine a extensão de Rabinovitch e, a partir dela, uma extensão linear.

Referências

[1] Berge, C. *Graphs*. North Holland (3th ed.), 1991.

[2] Bollobás, B. *Graph Theory - An Introductory Course*. Springer, 1979.

[3] Lovász, L. and Plummer, M.D. *Matching Theory*, North - Holland, 1986.