4. Grafos

Um **grafo** é um par ordenado de conjuntos disjuntos (V,E), onde V é um conjunto arbitrário que se designa por conjunto dos **vértices** (ou nodos) e E é um subconjunto do conjunto de pares não ordenados de elementos de V que se designa por conjunto de **arestas**. Nestas condições, pode considerar-se E como sendo uma relação simétrica no conjunto dos vértices, onde os conjuntos de cardinalidade 2, $\{x,y\}\in E$, indicam que os vérices x e y estão relacionados. No caso da relação não ser simétrica, o conjunto das arestas, E, é substituido pelo subconjunto dos pares ordenados de vértices que definem a relação, os quais se designam por arcos, denotando-se, usualmente, este conjunto de arcos por A. Em tais condições, o grafo (V,A) designa-se por **grafo dirigido**.

Quando, num determinado contexto, é irrelevante distinguir se o grafo é dirigido ou não, adopta-se toda a terminologia associada aos grafos não dirigidos que designaremos, simplesmente, por grafos.

Ao longo deste texto, de um modo geral, quando nos referirmos a um arco, $(x,y)\in A$, ou a uma aresta, $\{x,y\}\in E$, indistintamente, adoptaremos a notação [x,y] e consideramo-lo como um elemento do conjunto E.

Graficamente um grafo não dirigido representa-se por um conjunto de pontos que denotam os vértices e por um conjunto de linhas ou segmentos, ligando diferentes pares de pontos, que denotam as arestas. Quando o grafo é dirigido, cada uma destas linhas é representada com a orientação determinada pelos arcos a que se referem. Como exemplo, na figura a seguir representa-se um grafo dirigido, (V,A), e um grafo não dirigido (V,E), onde $V=\{1,2,3,4,5,6\}$, $A=\{(4,1),(2,3),(2,4),(6,7)\}$ e $E=\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,5\},\{2,4\},\{4,6\}\}$.

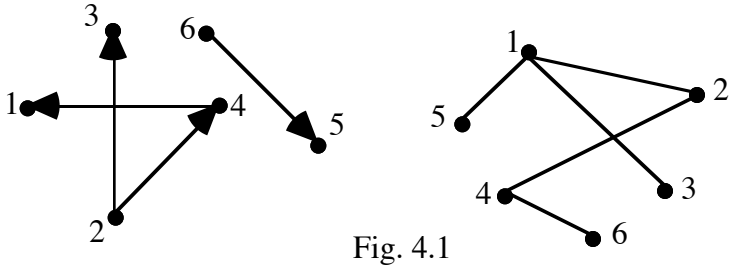


Fig. 4.1

Mais geralmente, designa-se por **hipergrafo**, todo o par (V,E), onde V é um conjunto arbitrário e E é um subconjunto de $P(V)$ (i. e, um subconjunto do conjunto das partes de V) tal que $V \cap E = \varnothing$ [28]. Neste caso, cada elemento de V designa-se por vértice e cada elemento de E designa-se por **hiperaresta**. Na figura 4.2, exemplifica-se um hipergrafo H=(V,E), onde V={1,2,3,4,5,6,7,8,9} e E={{1,2,3}{2,3,6,7},{4,5},{5,8},{9}}.

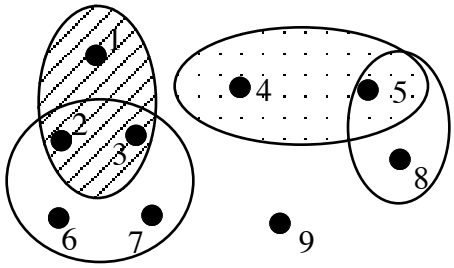


Fig. 4.2

Dois vértices, x e y, de um grafo G=(V,E) dizem-se **adjacentes** se [x,y] é um arco ou aresta de G (i. e, se $[x,y] \in E$). Neste caso, diz-se que o arco ou aresta [x,y] é **incidente** no vértice x e no vértice y.

Um grafo com arcos ou arestas repetidas (i. e, com mais do que um arco ou aresta entre os mesmos vértices) ou com lacetes (i. e, arcos ou arestas com extremos incidentes no mesmo vértice), diz-se um **multigrafo**. Na figura a seguir representa-se um multigrafo com um lacete no vértice 3 e com duas arestas entre os vértices 2 e 3 [29].

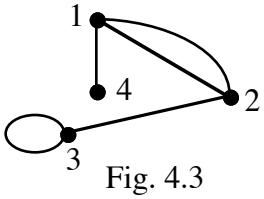


Fig. 4.3

[28]Esta condição tem como objectivo evitar quaquer ambiguidade, nomeadamente, na distinção a fazer entre um elemento $v \in V$ e o conjunto singular {v}.

[29]Em certos textos os grafos são designados por grafos simples de modo a realçar a ausência de arestas repetidas e lacetes.

Dado um grafo G=(V,E), designa-se por **ordem** de G o seu número de vértices (|V|) e por **dimensão** de G o seu número de arcos ou arestas (|E|). A dimensão de um grafo, G=(V,E), de ordem n varia entre 0 e $\binom{n}{2}$, i. e, $0 \leq |E| \leq \binom{|V|}{2}$, onde $\binom{n}{k}$ denota o número de combinações de n , k a k, i. e, $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Sendo G um grafo de orden n, se G tem dimensão $\binom{n}{2}$ (o que significa que todos os pares de vértices são adjacentes), então diz-se um **grafo completo** e denota-se por K_n; se G tem dimensão nula, então diz-se um **grafo nulo** e denota-se por N_n.

O grafo trivial, (∅,∅), designa-se por **grafo vazio** e denota-se por ∅.

Dado um grafo arbitrário, G, o seu conjunto de arcos ou arestas denota-se, por E(G) e o conjunto de vértices por V(G).

Designa-se por **grau** (ou valência) de um vértice de um grafo G, x, e denota-se por d(x), o número de arcos ou arestas que lhe são incidentes. Quando todos os vértices do grafo têm o mesmo grau o grafo diz-se **regular**.

Em geral, dado um grafo G, denota-se por δ(G) e por Δ(G), respectivamente, o menor e o maior dos graus dos respectivos vértices, i. e,

$$\delta(G)=\min\{d(v): v\in V(G)\} \text{ e } \Delta(G)=\max\{d(v): v\in V(G)\}.$$

Como exemplo no grafo, G, representado na figura 4.4, δ(G)=d(5)=1 e Δ(G)=d(1)=3.

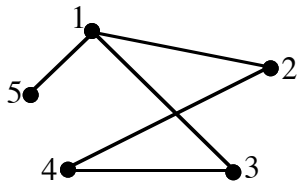


Fig. 4.4

Tendo em conta que ao adicionarmos os graus de todos os vértices de um grafo arbitrário, G, cada arco ou aresta conta duas vezes, com facilidade se verifica que

$$\sum_{x\in V(G)} d(x)=2|E(G)| \qquad (*),$$

e, consequentemente, que $\sum_{x\in V(G)} d(x)=0 \pmod 2$.

De (*) decorre, de um modo imediato, que em qualquer grafo, o número de vértices de grau impar é par e ainda que

$$\delta(G) \leq \lfloor 2\frac{|E(G)|}{n} \rfloor \leq \Delta(G)$$ [30],

onde $\lfloor x \rfloor$ denota a característica de x, i. e, o maior inteiro não superior a x.

A aplicação do "pingeonhole principle" aos graus dos vértices de um grafo, G, de ordem $n \geq 2$, permite concluir que existem (pelo menos) dois vértices $x,y \in V(G)$ tais que $d(x)=d(y)$. Com efeito, supondo que, em G, todos os vértices têm graus distintos, se $\exists x \in V(G)$ tal que $d(x)=0$ (i. e, tal que x é um vértice isolado), então $\Delta(G) \leq n-2$ (ou seja, qualquer dos restantes vértices é adjacente, no máximo, a n-2 vértices) e, consequentemente, os graus dos vértices variam entre 0 e n-2. Logo, os n vértices têm n-1 graus possíveis, pelo que (pelo menos) dois deles têm o mesmo grau. Se o grafo é conexo, então os graus dos vértices variam entre 1 e n-1 e, mais uma vez, existem n-1 graus possíveis para n vértices.

Dados dois grafos G e G' tais que $V(G) \supseteq V(G')$ e $E(G) \supseteq E(G')$, diz-se que G' é um **subgrafo** de G e que G é um **supergrafo** de G' e denota-se esta relação entre G e G' por $G \supseteq G'$. Sendo V'=V(G') e E'=E(G'), se E' contém todos os arcos ou arestas de G que ligam os vértices de V', então diz-se que G'=(V',E') é o **subgrafo induzido** ou gerado por V' e denota-se este subgrafo de G por G[V'] (pelo que, neste caso, G'=G[V(G')]).

No exemplo da figura 4.5, verifica-se que $G \supseteq G'$ e que G'=G[{1,2,3,4}].

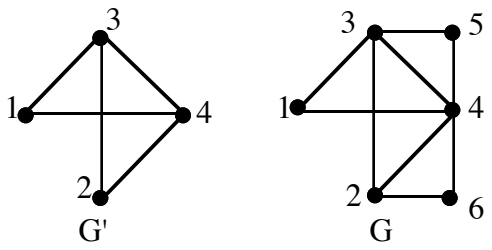


Fig. 4.5

[30] Note-se que $n\delta(G) \leq \sum_{x \in V(G)} d(x) = 2|E(G)| \leq n\Delta(G)$.

Pela sua especial importância, em Teoria de Grafos, vamos destacar as sequências de vértices e de arcos ou arestas que se designam, respectivamente, por passeios, caminhos e trajectos.

Designa-se por **passeio** num grafo G, toda a sequência de vértices e arestas da forma, $x_1, [x_1,x_2], \ldots, x_i, [x_i,x_{i+1}], x_{i+1}, \ldots, [x_{k-1},x_k], x_k$ (com eventual repetição de vértices e de arcos ou arestas). Neste caso, os vértices x_1 e x_k designam-se por vértices extremos do passeio (x_1 por vértice inicial e x_k por vértice final).

Um **caminho** num grafo G, entre os vértices x_1 e x_p, é um subgrafo, P, tal que $V(P)=\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ e $E(P)=\{[x_1,x_2], \ldots, [x_{p-1},x_p]\}$. Desta definição decorre que, num caminho, não existem vértices repetidos e, consequentemente, também não existem arcos ou arestas repetidas. Deste modo pode considerar-se um caminho, entre x_1 e x_p, como sendo um passeio, sem vértices repetidos, com início em x_1 e que termina em x_p.

Um **trajecto** num grafo G entre os vértices x e y é um passeio sem arcos ou arestas repetidas (podendo, no entanto, existir vértices repetidos) com início em x e que termina em y.

No grafo G da figura 4.5, 6,[6,2],2,[2,4],4,[4,3],3,[3,2],2[,2,4],4,[4,1],1 é um passeio entre os vértices 6 e 1. O subgrafo P=({2,4,3,1},{{2,4},{4,3},{3,1}}), corresponde a um caminho entre os vértices 2 e 1. Por outro lado, a sequência de vértices e arestas 2,[2,4],4,[4,3],3,[3,5],5,[5,4],4,[4,6],6 corresponde a um trajecto entre 2 e 6.

Usualmente, quer os passeios, quer os caminhos, quer ainda os trajectos representam-se, unicamente, pela respectiva sequência de vértices.

Designa-se por **comprimento de um caminho**, P, e denota-se por comp(P), o número de arcos ou arestas de P (i. e, comp(P)=|E(P)|). Analogamente, designa-se por **comprimento de um trajecto**, T, o número de arcos ou arestas que fazem parte da sequência que constitui T, denotando-se este número por comp(T).

Dados dois vértices x e y de um grafo, G, designa-se por distância entre x e y, e denota-se por $d_G(x,y)$, o comprimento do caminho de menor comprimento entre x e y, se

um tal caminho existir, caso contrário $d_G(x,y)=\infty$. Com facilidade se verifica que esta noção de distância é uma métrica (a prova desta a afirmação é proposta no exercício 4.1). A maior das distâncias entre os vértices de um grafo G designa-se por **diâmetro** de G e denota-se por diam(G).

Um passeio de comprimento não nulo cujos únicos vértices que coincidem são os vértices extremos diz-se um **ciclo** (de uma forma ligeira, também se pode dizer que um ciclo é um caminho de comprimento não nulo fechado ou com extremos coincidentes). Por sua vez designa-se por **circuito**, todo o passeio fechado (i. e, cujos extremos coincidem) sem arcos ou arestas repetidas (podendo, no entanto, existir vértices repetidos). Na figura 4.6 as arestas mais carregadas representam em a) um ciclo e em b) um circuito.

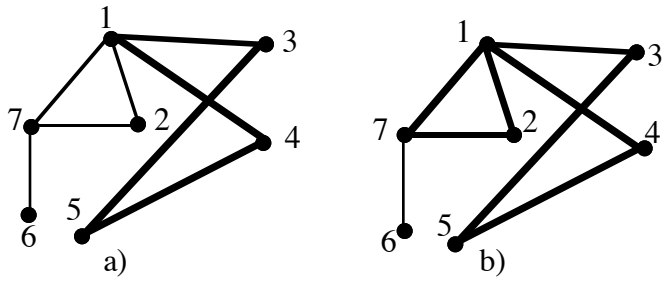


Fig. 4.6

Os conceitos de comprimento de caminhos e de trajectos são extensíveis aos ciclos e aos circuitos nos quais, naturalmente, correspondem aos respectivos números de arcos ou arestas que os compõem. O teorema a seguir estabelece uma relação interessante entre o mínimo grau de um grafo e o comprimento do caminho e do ciclo de maior comprimento. Com efeito, quanto maior é o mínimo grau de um grafo maior é o comprimento quer do mais longo caminho quer do mais longo dos ciclos.

4.1 Teorema

Todo o grafo G com $\delta(G)\geq 3$ contém um caminho, P, tal que $comp(P)=\delta(G)$ e um ciclo, C, tal que $comp(C)\geq\delta(G)+1$.

Prova:

Seja $P=x_0 \ldots x_k$ o caminho de maior comprimento em G. Então todos o vizinhos de x_k estão neste caminho (caso contrário, o caminho poderia ser estendido até um dos vizinhos e não seria maximal). Consequentemente, $comp(P)=k \geq d(x_k) \geq \delta(G)$ (ver figura a seguir). Por outro lado, sendo x_i o vértice de menor índice em P, tal que $[x_i,x_k] \in E$, então $x_i x_{i+1} \ldots x_k x_i$ é um ciclo de comprimento pelo menos $\delta(G)+1$ (dado que $\{x_i,x_{i+1},\ldots,x_{k-1}\}$ contém todos os vértices adjacentes a x_k cujo numero é não inferior a $\delta(G)$).

♦

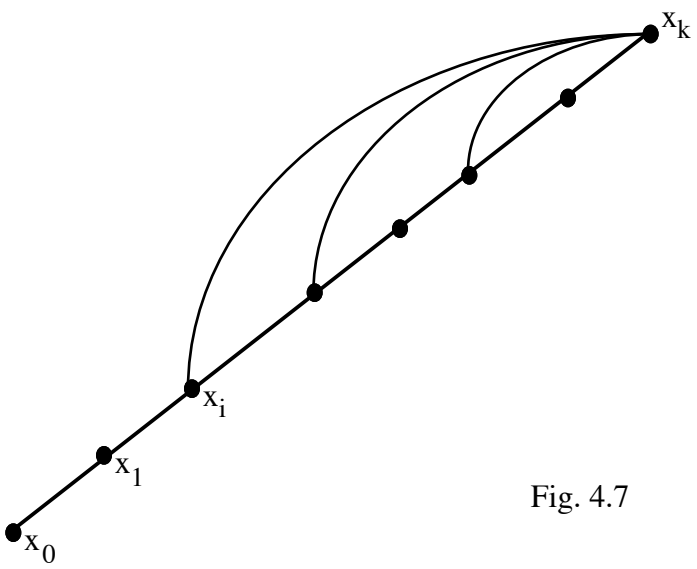


Fig. 4.7

Dados dois grafos G e H, a **união** de G com H denota-se por $G \cup H$ e corresponde ao grafo $G \cup H=(V(G) \cup V(H),E(G) \cup E(H))$ e a **intersecção** de G com H denota-se por $G \cap H$ e corresponde ao grafo $G \cap H=(V(G) \cap V(H),E(G) \cap E(H))$.

A partir da definição de união e intersecção de grafos introduzida, podemos afirmar que um grafo G se particiona nos grafos $G_1=(V_1,E_1)$, … , $G_k=(V_k,E_k)$, se $G=\bigcup_{1 \leq i \leq k} G_i$ e $G_i \cap G_j=\varnothing \ \forall i \neq j$.

Um grafo G diz-se **conexo** se não admite qualquer partição, para além da partição trivial (i. e, $G=G \cup \varnothing$). Por sua vez, dado um grafo não conexo, G, um seu subgrafo diz-se

uma **componente conexa** (ou simplemente, componente) de G, se é um subgrafo conexo maximal, no sentido em que sendo gerado pelo subconjunto de vértices V', $\forall x \in V(G) \setminus V'$, o subgrafo $G[V' \cup \{x\}]$ não é conexo.

Na figura a seguir apresenta-se um grafo com duas componentes conexas.

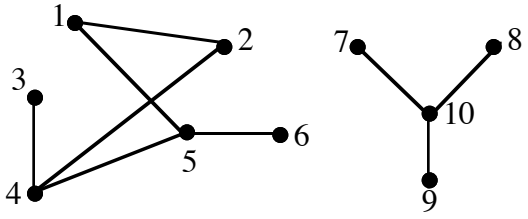


Fig. 4.8

A partir da definição de grafo conexo e de componente conexa pode afirmar-se que um grafo é conexo sse tem uma única componente, ou em alternativa, sse existe um caminho entre quaisquer dos seus vértices.

Designa-se por **cintura** de um grafo G, e denota-se por g(G), o comprimento do ciclo de menor comprimento contido em G (na figura 4.6 os grafos representados têm cintura igual a 3). Quando G é acíclico (i. e, quando não contém qualquer ciclo) , por definição diz-se que G tem cintura infinita (ou seja, $g(G)=\infty$).

4.2 Teorema

Todo o grafo, G, que contém um ciclo satisfaz a desigualdade $g(G) \leq 2diam(G)+1$.

Prova:

Seja C um ciclo de menor comprimento em G e seja x_0 um vértice arbitrário de C.

Se não existe em C um vértice x_k tal que $d_C(x_0,x_k)=diam(G)+1$, isso significa que $\forall y \in C$, $d_C(x_0,y) \leq diam(G)$. Logo, sendo z um vértice à distância máxima de x_0 em C e sendo z' e z" os vértices que em C são adjacentes a z, conclui-se que $C=P_{x_oz'} \cup \{[z',z],[z,z"]\} \cup P_{z"x_o}$, onde $P_{x_oz'}$, é o caminho mais curto em C, entre x_0 e z' e

$P_{z"x_o}$ é o caminho mais curto em C entre z" e x_0. Consequentemente, pelo menos um destes caminhos tem comprimento inferior a diam(G), donde, supondo que comp($P_{x_oz'}$,)<diam(G), vem que

$$\begin{aligned} comp(C) &= com(P_{x_oz'},)+2+comp(P_{z"x_o}) \\ &= d_C(x_0,z')+2+d_C(z",x_0) \\ &\leq (diam(G)-1)+2+diam(G)\ ^{31}, \\ &= 2diam(G)+1. \end{aligned}$$

Suponha-se que $\exists x_k \in V(C)$ tal que $d_C(x_0,x_k)=dim(G)+1$, i. e, existe um caminho em C, P_C, com extremos em x_o e x_k, tal que $comp(P_C)=diam(G)+1$. Então, uma vez que em G todos os pares de vértices estão a uma distância não superior a diam(G), existe um caminho em G, P_G, entre x_0 e x_k, tal que $comp(P_G)\leq diam(G)$, pelo que $P_G \neq P_C$. Se $V(P_C)\cap V(P_G)=\{x_0,x_k\}$, então $P_C \cup P_G$ constitui um ciclo de comprimento não superior a 2diam(G)+1. Se $|V(P_C)\cap V(P_G)|>2$, isso significa que existe pelo menos um vértice entre x_0 e x_k, y, distinto de x_0 e x_k ($y \notin \{x_0,x_k\}$) tal que $y \in P_C \cap P_G$ e, consequentemente, entre x_0 e y ou entre y e x_k é possível encontrar um ciclo de comprimento não superior e 2diam(G)+1.

♦

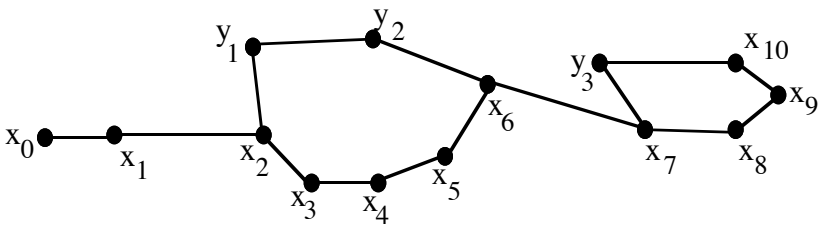


Fig. 4.9

Na a figura 4.9, onde se procura ilustrar os argumentos utilizados na prova do teorema 4.2, deve observar-se que a distância entre x_1 e x_{10} corresponde ao comprimento do caminho $x_0x_1x_2y_1y_2x_6x_7y_3x_{10}$ que exemplifica P_G.

---

[31] Uma vez que $d_C(x_0,z')<d_C(x_0,y)\leq diam(G)$ e $d_C(x_0,z")\leq d_C(x_0,y)\leq diam(G)$.

Um vértice $x \in V(G)$ diz-se central em G se a maior das distâncias entre x e os restantes vértices de G é a menor possível. Esta distância designa-se por raio de G, e denota-se por raio(G) (pelo que, $raio(G) = \min_{x \in V(G)} \{\max\{d_G(x,y): y \in V(G)\}\}$). No exercício 4.2 propõe-se a prova das inequações $raio(G) \leq diam(G) \leq 2raio(G)$.

4.3 Teorema

Se G é um grafo tal que $raio(G) \leq k$ [32], então

$$|V(G)| \leq 1+\Delta(G)\sum_{i=0}^{k-1}(\Delta(G)-1)^i.$$ [33]

Prova:

Sendo x um vértice central em G e sendo V_i o subconjunto dos vértices de V(G) à distância i de x (i.e, $V_i=\{v \in V(G): d_G(x,v)=i\}$), vem que $V(G) = \cup_{0 \leq i \leq k} V_i$ e como os conjuntos V_i são disjuntos, $|V(G)|=\sum_{i=0}^{k}|V_i|$. Por outro lado, $|V_0|=1$, $|V_1| \leq \Delta(G)$, $|V_2| \leq \Delta(G)|V_1|-|V_1|$ (uma vez que x é adjacente a cada um dos vértices de V_1), $|V_3| \leq \Delta(G)|V_2|-|V_2|$ (dado que cada vértice de V_2 tem pelo menos um vértice adjacente que está em V_1), etc. Logo vem que

$|V_0|=1$,

$|V_1| \leq \Delta(G)$,

$|V_2| \leq \Delta(G)|V_1|-|V_1|=|V_1|(\Delta(G)-1) \leq \Delta(G)(\Delta(G)-1)$,

$|V_3| \leq \Delta(G)|V_2|-|V_2|=|V_2|(\Delta(G)-1) \leq \Delta(G)(\Delta(G)-1)^2$,

…

---

[32] Deve observar-se que um grafo cujo raio é igual a k ($k \in \mathbf{N}$) é necessáriamente conexo, caso contrário o raio seria ∞.

[33] Adicionalmente, se $\Delta(G)>2$, facilmente se conclui que $|V(G)| \leq 1+\Delta(G)\frac{(\Delta(G)-1)^k-1}{\Delta(G)-2}$.

$$|V_k| \leq \Delta(G)|V_{k-1}| - |V_{k-1}| = |V_{k-1}|(\Delta(G)-1) \leq \Delta(G)(\Delta(G)-1)^{k-1},$$

e, consequentemente, que

$$|V(G)| = \sum_{i=0}^{k} |V_i| \leq 1+\Delta(G)\sum_{i=0}^{k-1}(\Delta(G)-1)^i.$$

♦

Considerando o grafo, G, representado na figura 4.10, tendo em conta que

$\max\{d(0,x) : x\in V(G)\}=d(0,5)=2$; $\max\{d(1,x): x\in V(G)\}=d(1,7)=3$;

$\max\{d(2,x): x\in V(G)\}=d(2,5)=3$; $\max\{d(3,x): x\in V(G)\}=d(3,8)=4$;

$\max\{d(4,x): x\in V(G)\}=d(4,8)=4$; $\max\{d(5,x): x\in V(G)\}=d(5,7)=4$;

$\max\{d(6,x): x\in V(G)\}=d(6,5)=4$; $\max\{d(7,x): x\in V(G)\}=d(7,5)=4$;

$\max\{d(8,x): x\in V(G)\}=d(8,5)=4$;

conclui-se que raio(G)=2 e que o vértice 0 é o vértice central em G.

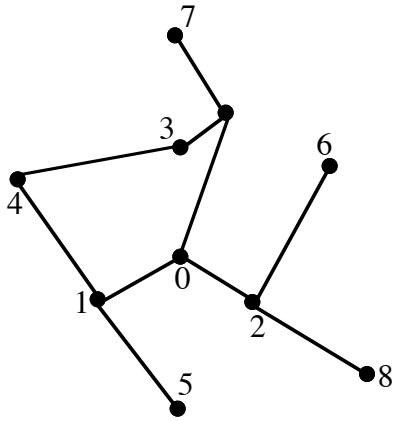


Fig. 4.10

Por sua vez $\Delta(G)=d(0)=3$.

Com estes dados, por aplicação do teorema 4.3, poder-se-ia concluir que

$$|V(G)| \leq 1+\Delta(G)\sum_{i=0}^{1}(\Delta(G)-1)^i = 1+\Delta(G)\frac{(\Delta(G)-1)^2-1}{\Delta(G)-2} = 1+3\frac{(3-1)^2-1}{3-2} = 10.$$

4.4 Teorema

Se G é um grafo tal que $k=\left\lfloor \frac{g(G)-1}{2} \right\rfloor$, então

$$|V(G)|\geq 1+\delta(G)\sum_{j=0}^{k-1}(\delta(G)-1)^j.$$ [34]

Prova:

Sendo x um vértice arbitrário de G, vamos provar, por indução sobre i, com $1\leq i\leq k-1$, que o número de vértices à distância i de x é de pelo menos $\delta(G)(\delta(G)-1)^{i-1}$, i. e, que $|\{v\in V(G): d_G(x,v)=i\}|\geq\delta(G)(\delta(G)-1)^{i-1}$.

O resultado é trivialmente verdadeiro para i=1.

Suponha-se que o resultado é verdadeiro para i=j, com $1\leq j<k-1$. Para cada vértice v tal que $d_G(x,v)=j$, (a) existe um único vizinho y ($[y,v]\in E(G)$) à distância j-1, (b) nenhum vizinho à distância j, conforme se prova a seguir.

(a) Se existem dois vizinhos de v à distância j-1, então existem dois caminhos distintos, P' e P", entre x e cada um destes vizinhos, tais que comp(P')=j-1<k-1 e comp(P")=j-1<k-1 e cuja união com as arestas que os ligam a v contém um ciclo, C, tal que

$$comp(C)\leq comp(P')+comp(P")+2=2j<2k=2\left\lfloor\frac{g(G)-1}{2}\right\rfloor\leq 2\frac{g(G)-1}{2}=g(G)-1,$$

o que é absurdo.

(b) Se existe um vértice z, adjacente de v, á distância j, então, tal como anteriormente, existem dois caminhos distintos, P' e P", entre x e z e entre x e v, respectivamente, cuja união com a aresta [z,v] contém um ciclo, C, tal que

$$comp(C)\leq comp(P')+1+comp(P")=2j+1\leq 2k=2\left\lfloor\frac{g(G)-1}{2}\right\rfloor\leq 2\frac{g(G)-1}{2}=g(G)-1,$$

o que, mais uma vez, é absurdo.

Logo, para cada vértice v à distância j de x, existem pelo menos $\delta(G)-1$ vértices adjacentes a v à distância j+1 de x e um único vértice adjacente a v à distância j-1 de x.

---

[34] Tal como anteriormente, se $\delta(G)>2$ então pode concluir-se que $|V(G)|\geq=1+\delta(G)\frac{(\delta(G)-1)^k-1}{\delta(G)-2}$.

Analogamente se conclui que, para cada vértice y à distância j+1 de x, existe um único vértice adjacente a y à distância j de x (dado que por hipótese $2(j+1)\leq 2k<g(G)$).

Uma vez que por hipótese existem pelo menos $\delta(G)(\delta(G)-1)^{j-1}$ vértices á distância j de x, conclui-se que existem, pelo menos, $\delta(G)(\delta(G)-1)^{j-1}(\delta(G)-1)=\delta(G)(\delta(G)-1)^{j}$ vértices à distância j+1. Consequentemente, tendo em conta que $V(G)\supseteq \bigcup_{0\leq i\leq k} V_i$, onde $V_i=\{v\in V(G): d(x,v)=i\}$, para i=0,…,k (note-se que $k<\frac{1}{2}g(G)$), conclui-se que

$$\begin{aligned}|V(G)| &\geq |V_0|+|V_1|+|V_2|+\ldots+|V_k| \\ &\geq 1+\delta(G)+\delta(G)(\delta(G)-1)^1+\ldots+\delta(G)(\delta(G)-1)^{k-1} \\ &= 1+\delta(G)\sum_{j=0}^{k-1}(\delta(G)-1)^j.\end{aligned}$$

♦

Como exemplo de aplicação, considerando o grafo, G, representado na figura 4.11, onde g(G)=5 (pelo que $k=\lfloor\frac{g(G)-1}{2}\rfloor=2$) e δ(G)=3,

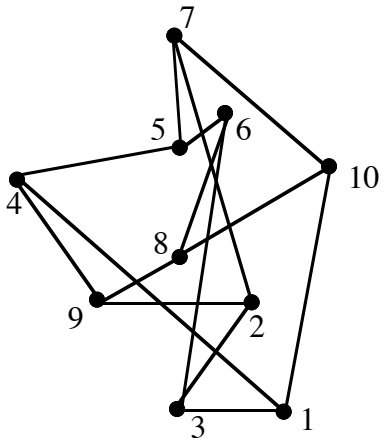


Fig. 4.11

vem que $|V(G)| \geq 1+\delta(G)\frac{(\delta(G)-1)^k-1}{\delta(G)-2} = 1+3\frac{(3-1)^2-1}{3-2} = 10$.

Dado um grafo G, designa-se por **complementar** de G, e denota-se por $\bar{G}$, o grafo tal que $V(\bar{G})=V(G)$ e $E(\bar{G})=\{[x,y]: [x,y]\notin E(G)\}$.

Se G=(V,E) é um grafo com as seguintes propriedades i) $V=V'\cup V''$ e $V'\cap V''=\emptyset$ e ii) $\forall [x,y]\in E$, $\{x,y\}\cap V'\neq\emptyset$ e $\{x,y\}\cap V''\neq\emptyset$, então G designa-se por **grafo bipartido** e denota-se usualmente por G=(V',V",E). Nestes casos também se diz que G admite uma

bipartição. Um grafo bipartido, G=(V',V",E), tal que |V'|=m e |V"|=n e tal que ∀v'∈V' ∀v"∈V" [v',v"]∈E denota-se por $\mathbf{K_{m,n}}$ e designa-se por **grafo bipartido completo**.

Nem todos os grafos admitem uma bipartição. O teorema a seguir dá-nos uma condição necessária e suficiente para que tal aconteça.

4.5 - Teorema

Um grafo admite uma bipartição sse não tem circuitos de comprimento ímpar.

Prova:

Se G=(V',V",E) é um grafo bipartido, então é claro que todos os circuitos têm comprimento par. Com efeito, uma vez que tanto em V' como em V" não existem vértices adjacentes, partindo-se, por exemplo, de um vértice em V', de cada vez que se passa para V", para se obter um circuito, tem de se voltar a V' na aresta seguinte, pelo que qualquer circuito tem comprimento par.

Suponhamos que G=(V,E) não tem circuitos de comprimento ímpar. Uma vez que um grafo é bipartido sse cada uma das suas componentes constitui um subgrafo bipartido, podemos supor, sem perda de generalidade, que G é conexo. Considere-se um vértice arbitrário z∈V e seja V'={w, tais que $d_G(z,w)$ é ímpar}. Nestas condições não existem arestas que liguem vértices de V' (caso contrário existiriam circuitos de comprimento ímpar). Por outro lado, como todos os vértices de V\V' estão a uma distância par de z, não existem vértices adjacentes em V\V' (uma vez que, por razões idênticas às anteriores, em tais condições, existiriam circuitos de comprimento impar). Logo, fazendo V"=V\V' obtém-se uma bipartição para G, dada por G=(V',V",E).

♦

Uma classe especial de grafos bipartidos são as árvores. Um grafo G=(V,E) diz-se uma **árvore** se é conexo e não tem circuitos (logo, em particular, não tem circuitos de

comprimento impar e, consequentemente, é um grafo bipartido). O teorema a seguir estabelece mais algumas definições alternativas para árvores.

4.6 - Teorema

Seja G=(V,E) um grafo. As seguintes afirmações são equivalentes.

(i) G é uma árvore.

(ii) G é conexo e tem |V|-1 arestas.

(iii) G não tem circuitos, mas acrescentando-se uma aresta a G resulta um único circuito.

Prova:

Para provar que (i) ⇒ (ii) e dado que uma árvore é um grafo conexo basta provar que se G=(V,E) é uma árvore então tem |V|-1 arestas, para o que vamos utilizar indução sobre o número de arestas de grafos que definem árvores.

Seja $G_k=(V_k,E_k)$ uma árvore com k arestas.

Para k=1 vem $|V_1|=2$, pelo que o resultado se verifica.

Suponha-se que o resultado é verdadeiro para k tal que $1 \leq k \leq n-1$ e considere-se a árvore $G_n=(V_n,E_n)$. Dado que G_n não tem circuitos, existe pelo menos um vértice, v, com grau 1. Considerando o subgrafo obtido de G_n retirando-se a aresta incidente no vértice v, determina-se $G_{n-1}=(V_{n-1},E_{n-1})$ que continua a ser uma árvore (uma vez que permanece conexo e sem circuitos), logo, por hipótese de indução, G_{n-1} é tal que tem um número de arestas igual a $|V_{n-1}|-1$. Dado que $|V_n|=|V_{n-1}|+1$ concluí-se que G_n tem $|V_n|-1$ arestas, completando-se assim a prova de que (i) ⇒ (ii)

A prova de que (ii) ⇒ (iii) e (iii) ⇒ (i) fica como exercício.

♦

Dado um grafo conexo G, designa-se por **árvore abrangente** de G todo o subgrafo de G que sendo uma árvore, contém todos os vértices de G.

4.7 - Teorema

Todo o grafo conexo G=(V,E) contém uma árvore abrangente.

Prova:

Sendo G um grafo conexo, se G não tem circuitos então (por definição) é uma árvore e, para este caso, fica concluida a prova. Se G tem um circuito, então retirando uma aresta desse circuito o grafo mantém-se conexo. Repetindo este processo, até que não se tenham circuitos, ao fim de um número finito de arestas eliminadas obtém-se uma árvore (i. e, um subgrafo conexo sem circuitos), a qual constitui uma árvore abrangente de G uma vez que os vértices permanecem os mesmos.

♦

Este resultado constitui o equivalente, em teoria de grafos, ao resultado da existência de pelo menos um vértice nos poliedros não vazios.

A origem da teoria dos grafos é, em geral, associada ao probema das 7 pontes de Konigsberg (cidade da Prússia que agora se designa por Kaliningrad). Parte desta cidade localizava-se em duas ilhas do rio Pregel as quais estavam ligadas às margens e uma à outra através de 7 pontes (conforme a figura a seguir documenta). Consta que os habitantes gostavam de dar passeios de modo a atravessar todas as pontes e que alguns andavam particularmente aborrecidos pelo facto de não encontrarem um trajecto (com partida e chegada a um mesmo lugar) que lhes permitisse atravessar apenas uma vez cada uma das pontes.

O matemático suiço Leonhard Euler (1707-1783) ao tomar conhecimento deste problema resolveu-o (indicando a impossibilidade da existência de um tal percurso) modelando-o conforme a figura , a seguir, indica.

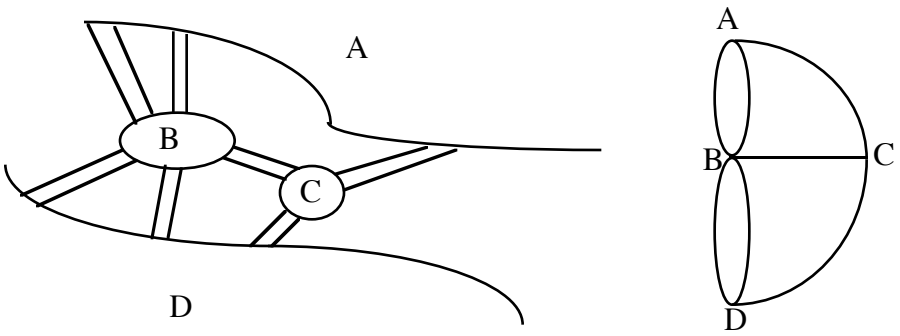


Fig. 4.12

Um trajecto designa-se por **trajecto de Euler** se contém todos as arestas (logo todos os vértices) do grafo ou multigrafo a que se refere. Por sua vez, designa-se por **circuito de Euler**, todo o circuito que contenha todas as arestas do grafo.

O teorema a seguir estabelece uma condição necessária e suficiente para a existência de um circuito de Euler.

4.8 - Teorema

Um grafo (ou multigrafo) conexo G admite um circuito de Euler se e sómente se todos os seus vértices têm grau par.

Prova:

Uma vez que é imediato verificar que a condição é necessárias, vamos apenas provar que é suficientes, utilizando indução sobre o número de arestas de G. Para um grafo com um único vértice (sem arestas) o resultado é trivial. Assuma-se que todos os vértices de G têm grau par e que todos os grafos ou multigrafos em tais condições com menos arestas do que G admitem circuitos de Euler. Escolha-se um vértice v de G e inicie-se um trajecto segundo as arestas de G, sem se passar pela mesma aresta duas vezes, até se encontrar v novamente (note-se que tendo a paridade dos graus este trajecto fechado existe). Posteriormente retirando-se as arestas relativas ao trajecto percorrido obtém-se um certo número de subgrafos conexos que cujos vértices continuam a ter grau

par, consequentemente, admitem circuitos de Euler (por hipótese de indução). Nestas condições é facil de ver que poderemos criar um circuito de Euler para G, acrescentando ao circuito inicial os circuitos de Euler de cada um dos subgrafos (ou submultigrafos) obtidos.

♦

Os únicos grafos não conexos, cujos vértices têm grau par, que admitem circuitos de Euler são os que têm uma única componente com um número de arestas superior a zero (i. e, as demais componentes são constituídas por vértices isolados).

Com base neste teorema fica claro que a pretenção dos habitantes de Konigsberg era impossível de satisfazer.

A prova construtiva da suficiências das condições (i) e (ii) do teorema 4.8 sugere o seguinte algoritmo recurssivo para a determinação de um circuito de Euler num grafo (ou multigrafo), G=(V,E), conexo e com todos os vértices tendo grau par.

4.9 - Algoritmo (de determinação de um circuito de Euler a partir de v_1).

1. **Se** v_1 não tem arestas **Então** Euler(v_1)=[v_1];

Senão Faz

1.1 A partir de v_1 criar um trajecto em G, de tal forma que não se passe por uma aresta mais do que uma vez, até que v_1 seja novamente visitado;

1.2 Sendo [v_1,v_2, … , v_n,v_1] este trajecto, eliminar as arestas [v_1,v_2], [v_2,v_3], … , [v_n,v_1] de G;

1.3 Devolver o caminho:

[Euler(v_1),Euler(v_2),…,Euler(v_n),v_1];

Fim Faz;

Fim do Algoritmo.

O corolário que se segue estabelece as condições necessárias e suficientes para a existência de um trajecto de Euler nos grafos que não admitem circuitos de Euler (uma vez que um circuito de Euler é também um trajecto de Euler).

4.10 - Corolário

Um grafo (ou multigrafo) G=(V,E) conexo admite um trajecto de Euler, mas não um circuito de Euler, se e somente se tem exactamente dois vértices de grau impar.

Prova:

Se G admite um trajecto de Euler que não é um circuito, então, uma vez que os vértices de partida e chegada são distintos, apenas estes têm grau impar. Relativamente aos demais, em cada visita, foi utilizado uma aresta para atingir o vértice e outra para o abandonar, pelo que têm grau par.

Suponha-se que em G todos os vértices têm grau par à excepção de dois. Então, pelo teorema 4.8, é claro que não existe um circuito de Euler, pelo que resta provar a existência de um trajecto de Euler.

Suponha-se que u e v são os vértices de grau impar em G=(V,E) e considere-se o grafo G'=(V,E') com E'=E∪{[u,v]}. Este grafo satisfaz as hipóteses dos teorema 4.8, pelo que admite um circuito de Euler. Se a este circuito retirarmos a aresta [u,v] obtém-se um trajecto de Euler em G.

♦

Um circuito que percorre todos os vértices de G sem repetir nenhum (pelo que se trata de um ciclo), para além do vértice de partida (que naturalmente coincide com o de chegada), diz-se um **ciclo de Hamilton** (ou hamiltoniano).

Considere-se um tabuleiro de xadrez e associe-se a cada um dos seus 64 quadrados um vértice de um grafo G cujas arestas ligam os vértices associados a quadrados entre as quais é possível efectuar um movimento de cavalo. Neste grafo

existem ciclos de Hamilton que correspondem a movimentos sucessivos de um cavalo de forma a que todos os quadrados (brancos e pretos) sejam visitados uma única vez. Na figura da página a seguir representa-se um dos ciclos de Hamilton possíveis para o referido grafo.

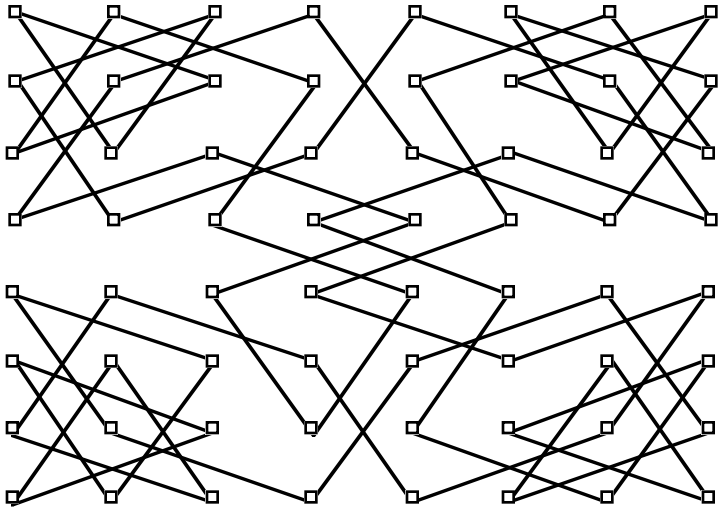


Fig. 4.13

Um grafo que admite um ciclo de Hamilton diz-se um **grafo hamiltoniano**. O teorema a seguir estabelece uma condição suficiente para que um grafo seja hamiltoniano.

4.11 - Teorema

Se G é um grafo com n vértices tal que, para quaisquer dois vértices não adjacentes, x e y, a soma dos seus graus é não inferior a n, então G é hamiltoniano.

Prova:

Seja G um grafo que satisfaz as hipóteses do teorema, e suponha-se que G não é hamiltoniano. Suponha-se ainda que G é um grafo maximal (relativamente ao número de arestas) com esta propriedade, i. e, tal que acrescentando mais uma aresta se obtém um ciclo de Hamilton. Note-se que esta situação pode sempre ser atingida sem se alterar as condições que satisfazem as hipóteses (com efeito, ao acrescentarem-se arestas, unindo

vértices previamente não adjacentes, não só não se faz decrescer o grau de nenhum vértice, como não se criam novos pares de vértices não adjacentes).

Uma vez que G não é completo (caso contrário admitiria um ciclo de Hamilton), existe um par de vértices não adjacentes, x e y, e dado que G é maximal (não hamiltoniano), por adição de [x,y] obtém-se um ciclo de Hamilton que contém [x,y]. Logo G contém um caminho, entre x e y, que percorre todos os restantes vértices de G, i. e, (após reordenação dos vértices) contém o caminho $[x=v_1,v_2,\ldots,v_{n-1},v_n=y]$.

Seja N(x) o conjunto dos vértices adjacentes a x e seja $Q(y)=\{v_i: v_{i-1}\in N(y)\}$ [35] (uma vez que y não é adjacente a ele próprio, i. e, $y\notin N(y)$, o conjunto Q(y) está bem definido e $|Q(y)|=|N(y)|$).

Por hipótese $|N(x)|+|Q(y)|\geq n$. Por outro lado, dado que $v_1=x\notin N(x)$ e $v_1\notin Q(y)$, $|N(x)\cup Q(y)|\leq n-1$ e, consequentemente, $|N(x)\cap Q(y)|\geq 1$.

Seja $v_i\in N(x)\cap Q(y)$. A partir de $x=v_1$, obtém-se o caminho $[v_1,\ldots,v_{i-1}]$, o qual (uma vez que $v_{i-1}\in N(y)$) se pode estender ao caminho $[v_1,\ldots,v_{i-1},v_n]$ (*). A partir de $y=v_n$ pode obter-se o caminho $[v_n,v_{n-1},\ldots,v_i]$ que, por sua vez (dado que $v_i\in N(x)$) se pode estender ao caminho $[v_n,v_{n-1},\ldots,v_i,v_1]$ (**). A partir dos caminhos (*) e (**) podemos construir um ciclo de Hamilton, o que contraria a hipótese (de G não admitir um ciclo de Hamilton).

♦

Deve observar-se que qualquer grafo que satisfaça as hipóteses do teorema 4.11 é um grafo conexo. Com efeito suponha-se que G=(V,E), com |V|=n, tem k componentes $G_j=(V_j,E_j)$, para j=1, … , k. Então, dados dois vértices pertencentes a componentes distintas, $x\in V_p$ e $y\in V_q$ (com $\{1,\ldots,k\}\supseteq\{p,q\}$), tem-se que x e y não são adjacentes e $d(x)\leq|V_p|-1$ e $d(y)\leq|V_q|-1$. Logo $d(x)+d(y)\leq|V_p|+|V_q|-2<|V|$, i. e, o grafo não satisfaz as hipóteses do teorema.

---

[35] N(y) é o conjunto dos vértices adjacentes a y.

Encontrar um ciclo de Hamilton num grafo de pequena dimensão que o admita é relativamente fácil. Porém, quando a dimensão cresce, provar que não existe qualquer ciclo de Hamilton pode tornar-se muito difícil.

Na obtenção de ciclos de Hamilton deve ter-se em conta as seguintes três regras básicas:

1. Se um vértice tem grau 2, então ambas as arestas incidentes no vértice devem fazer parte do ciclo;

2. Não se deve obter qualquer subciclo, quando se constroi um ciclo de Hamilton (ou seja, não se deve percorrer um ciclo que não contém todos os vértices);

3. Uma vez que se visite um dado vértice (durante o percurso de um ciclo de Hamilton) todos as arestas incidentes nesse vértice que não foram utilizados podem ser eliminados.

Note-se que ao eliminarmos arestas (de acordo com 3.) estamos a diminuir o grau de outros vértices.

4.12 Exemplo

Utilizando as regras anteriores, vamos provar que o grafo a seguir indicado não admite qualquer ciclo de Hamilton.

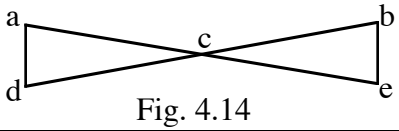


Fig. 4.14

Come efeito, aplicando-se a regra 1. aos vértices *a, b, d* e *e* , tem-se que qualquer ciclo de Hamilton utiliza o caminho [*c*,*a*]-[*a*,*d*]-[*d*,*c*], o que obriga à determinação de um subciclo próprio, contradizendo-se, assim, a regra 2.

Os exemplos mais naturais de grafos são os que se referem à representação de mapas de estradas. Em muitos casos (na ausência de viadutos), trata-se de grafos que

apresentam a particularidade de se poderem representar numa folha de papel sem que as arestas se cruzem, uma vez que aos cruzamentos e entroncamentos correspondem vértices.

Um grafo ou multigrafo diz-se **planar** se admite uma representação, numa folha de papel, sem que existam arestas que se intersectem.

Note-se que, apesar de um dado grafo admitir uma representação com arestas cruzadas, isso não significa que esse grafo não seja planar. Com efeito, pode existir outro modo de o representar onde não existam arestas cruzadas.

Existem algumas operações sobre grafos que é conveniente destacar nesta altura e que são a (i) **eliminação** de arestas e vértices e a (ii) **contracção** e (iii) **subdivisão** de arestas.

(i) Dada uma aresta, e, de uma grafo G ($e \in E(G)$), denota-se por $G\backslash e$ a operação de eliminação da aresta e de G, obtendo-se o grafo $G\backslash e=(V(G),E(G)\backslash\{e\})$. Mais geralmente, dado um subconjunto de arestas $E'=\{e_1,\ldots,e_k\}$ de E(G), G\E' corresponde ao grafo obtido de G por eliminação das arestas $e_1, \ldots, e_k$ ($G\backslash E'=(V(G),E(G)\backslash E')$).

De um modo semelhante se define a operação de eliminação de vértices. Assim, dado um vértice v de G ($v \in V(G)$), G\v denota a operação de elminação do vértice v e corresponde ao grafo ou multigrafo $G[V(G)\backslash\{v\}]$. Mais geralmente, dado um subconjunto de vértices $V'=\{v_1,\ldots,v_p\}$ do grafo ou multigrafo G ($V(G) \supseteq \{v_1,\ldots,v_p\}$) G\V' denota a operação de eliminação dos vértices $v_1, \ldots, v_p$ e corresponde a $G[V(G)\backslash V']$.

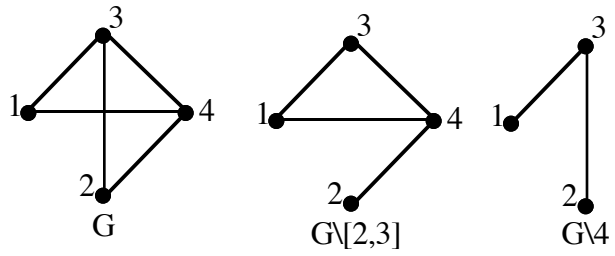


Fig. 4.15

(ii) Dada uma aresta e do grafo G ($e \in E(G)$), a operação de contracção de e em G denota-se por G/e e corresponde ao grafo obtido pela sobreposição dos vértices extremos de e e pela eliminação do lacete e das arestas repetidas eventualmente produzidas. Mais geralmente, dado um subconjunto de arestas, E'=$\{e_1,\ldots,e_k\}$, do grafo ou multigrafo G, G/E' corresponde ao grafo ou multigrafo obtido após a sucessiva contracção das arestas $e_1, \ldots, e_k$.

Verifica-se que as operações de eliminação e contracção de arestas comutam, i. e, sendo E' e E" dois subconjuntos disjuntos de arestas do grafo G, verifica-se que (G\E')/E"=(G/E")\E'.

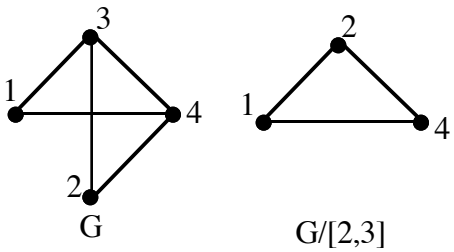


Fig. 4.16

Quando um grafo H é obtido de G por sucessivas contracções de arestas diz-se que G é **contractível** a H.

Um grafo obtido, a partir de um subgrafo de G, por sucessivas operações de eliminação e contracção de arestas diz-se um **menor** de G [36].

(ii) A operação de adição de um vértice de grau dois a uma aresta e de um grafo ou multigrafo G designa-se por operação de subdivisão da aresta e ou por expansão de G. A figura a seguir exemplifica a subdivisão de várias arestas de um grafo G obtendo-se um grafo H que corresponde a uma expansão de G.

---

[36]Deve observar-se que, de acordo com a definição dada, todo o subgrafo de um grafo é também um seu menor.

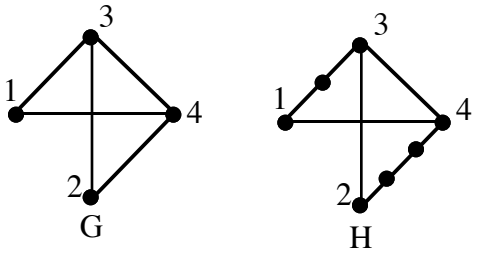


Fig. 4.17

Se H é uma expansão de G e se H é um subgrafo de um grafo Y, então diz-se que G é um **menor topológico** de Y [37]. Nestas condições G é menor topológico de um grafo Y se existe um subgrafo de Y que é uma expansão de G.

Um critério muito utilizado na verificação da planaridade de grafos consiste na utilização de um resultado de Kuratowski, onde se afirma que um grafo é não planar sse contém pelo menos uma das configurações não planares básicas, a saber, K_5 e/ou $K_{3,3}$ como menores ou como menores topológicos.

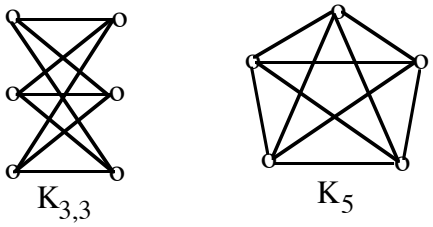


Fig. 4.18

Mais adiante, far-se-à a prova da suficiência das condições de Kuratowski, relacionadas com a existência de um subgrafo com a configuração de K_5 e/ou $K_{3,3}$, para a não planaridade dos grafos.

Dada uma representação planar de um grafo (ou multigrafo) planar, designa-se por **região** ou **face** a porção de espaço cuja fronteira é o conjunto de arestas que o delimitam. A região exterior ao grafo (i. e a porção de espaço que o envolve) designa-se por região ou face ilimitada.

---

[37]Uma vez que todo o grafo é subgrafo de sí próprio, conclui-se também que G é um menor topológico do grafo H.

4.13 - Teorema (fórmula de Euler)
Se G=(V,E) é um grafo (ou multigrafo) conexo e planar então a sua representação planar determina **f**=|E|-|V|+2 faces.

Prova:

Vamos representar o grafo (ou multigrafo) conexo planar G=(V,E), aresta por aresta. Seja $G_n=(V_n,E_n)$ o grafo (ou multigrafo) obtido após a representação de n arestas e $\mathbf{f}_n$ o número de faces.

Inicialmente temos G_0 (apenas um vértice) e uma única face (a região ilimitada). Uma vez que $|E_0|=0$ e $|V_0|=1$, vem que $\mathbf{f}_0=|E_0|-|V_1|+2=1$, pelo que a fórmula de Euler é verdadeira.

Em geral, para n>0, vamos obter $G_n=(V_n,E_n)$, a partir de $G_{n-1}=(V_{n-1},E_{n-1})$, acrescentando uma aresta a E_{n-1}. A nova aresta [x,y] é introduzida de uma das seguintes formas:

a) ligando vértices de G_{n-1} ($x,y\in V_{n-1}$);[38]

b) ligando um vértice de G_{n-1} a um novo vértice (donde $x\in V_{n-1}$ e $V_n=V_{n-1}\cup\{y\}$).

Uma vez que a fórmula de Euler é verdadeira para G_0, vamos considerar que é verdadeira para G_k, com $0\leq k\leq n-1$, e vamos provar por indução que é válida para G_n, qualquer que seja o número natural n.

Em a), uma vez que já existia pelo menos um caminho entre x e y (no caso de um multigrafo deve considerar-se ainda a hipótese alternativa de x e y coincidirem), a nova aresta vai provocar o aparecimento de um novo ciclo (ou lacete, no caso de x coincidir com y) e, como consequência, uma nova região. Dado que $|E_n|=|E_{n-1}|+1$ e $|V_n|=|V_{n-1}|$, conclui-se que a fórmula de Euler continua válida para G_n. Em b) uma vez que $y\notin V_{n-1}$ o

[38]Note-se que, tratando-se de um multigrafo, o vértice x pode coincidir com o vértice y.

número de faces mantém-se e como $|E_n|=|E_{n-1}|+1$ e $|V_n|=|V_{n-1}|+1$, mais uma vez se verifica a validade da fórmula de Euler.

♦

O corolário que se segue pode servir para, rapidamente, se verificar se um dado grafo é não planar. Antes porém, convém definir **grau de uma face** (ou região) de um grafo como sendo o número de arestas da sua fronteira. Considera-se que se uma aresta ocorre duas vezes ao longo da fronteira de uma dada região (como é o caso da região K a seguir representada, na qual a aresta [x,y] entra duas vezes na definição da respectiva fronteira), então conta também duas vezes para a determinação do respectivo grau.

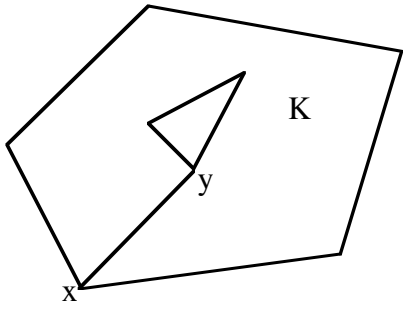


Fig. 4.19

4.14 - Corolário (do teorema que estabelece a fórmula de Euler) [39]
Se G=(V,E) é um grafo conexo planar com $|E|>1$, então $|E|\leq 3|V|-6$.

Prova:

Uma vez que cada face de um grafo planar (com $|E|>1$) tem de ter grau não inferior a 3, a soma dos graus de todas as faces tem de ser pelo menos 3**f**. Mas, por outro lado, esta soma dos graus de todas as faces é igual a 2|E| (dado que cada aresta conta duas

[39]Este corolário só é válido para grafos, i. e, não se aplica a multigrafos.

vezes para os graus das regiões). Então a soma dos graus das regiões, 2|E|, é tal que $2|E| \geq 3\mathbf{f}$, ou seja, $\frac{2}{3}|E| \geq \mathbf{f}$. Combinando esta desigualdade com a fórmula de Euler vem que:

$$\begin{cases} \mathbf{f} = |E| - |V| + 2 \\ \mathbf{f} \leq \frac{2}{3}|E| \end{cases} \Rightarrow \quad |E| - |V| + 2 \leq \frac{2}{3}|E| \Leftrightarrow |E| \leq 3|V| - 6.$$

♦

Este corolário permite-nos concluir, imediatamente, que o grafo K_5 é não planar, uma vez que $|E(K_5)| = 10 > 9 = 3|V(K_5)| - 6$.

Note-se, porém, que existem grafos não planares, G=(V,E), que satisfazem a desigualdade $|E| \leq 3|V| - 6$, conforme a figura a seguir documenta.

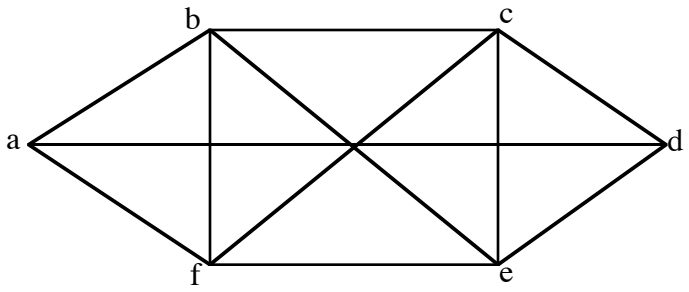


Fig. 4.20

Como exemplo de aplicação do corolário 4.14, verifique que o grafo a seguir representado é não planar.

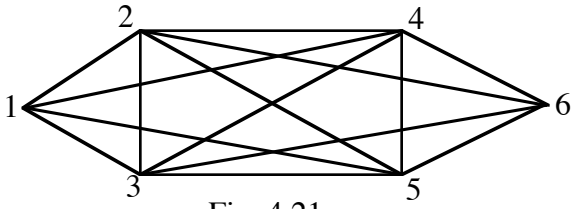


Fig. 4.21

O corolário a seguir vai permitir a conclusão de que $K_{3,3}$ é não planar.

4.15 - Corolário (do teorema que estabelece a fórmula de Euler) [40]

Se G=(V,E) é um grafo conexo bipartido planar com $|E| > 1$, então $|E| \leq 2|V| - 4$.

[40] Tal como o corolário 4.14, este corolário também só é válido para grafos.

Prova:

Esta prova é idêntica à do corolário 4.14., tendo em conta, desta vez, que (de acordo com o teorema 4.5) qualquer circuito de um grafo bipartido tem comprimento par, logo cada região (ou face) de um grafo conexo bipartido planar tem grau não inferior a 4. Consequentemente, vem que $2|E|\geq 4f \Leftrightarrow 2|E|\geq 4|E|-4|V|+8 \Leftrightarrow |E|\leq 2|V|-4$.

♦

Deste corolário decorre imediatamente que $K_{3,3}$ é não planar. Com efeito $|E(K_{3,3})|=9>8=2|V(K_{3,3})|-4$. Como consequência podemos afirmar que dos corolários 4.14 e 4.15 decorre a suficiência das condições de Kuratowski para que um grafo não seja planar. Por sua vez, a prova de que as condições de Kuratowski são necessárias para a não planaridade dos grafos, recorre a conceitos topológicos associados a grafos que estão fora do contexto destes apontamentos. [41]

Em alternativa à condição necessária de planaridade, estabelecida no teorema 4.15, pode ainda concluir-se (com uma prova semelhante à anterior) que se um grafo G de ordem n ($n\geq 3$) é planar, então $|E(G)|\leq \frac{g(G)(n-2)}{g(G)-2}$. Mais particularmente, no caso de G ser bipartido, a sua planaridade implca que se verifique a desigualdade $|E(G)|\leq 2n-4$.

4.16 Teorema

Todo o grafo conexo planar tem, pelo menos, um vértice de grau não superior a 5.

Prova:

Sendo G=(V,E) um grafo conexo planar e n_i o número de vértices de grau i, obtém-se o seguinte sistema de equiações:

[41] No entanto, a prova em questão pode ser encontrada em (Diestel, 1997)

$$\begin{cases} \sum_{i=\delta(G)}^{\Delta(G)} n_i = |V| & \text{(i)} \\ \sum_{i=\delta(G)}^{\Delta(G)} n_i * i = 2|E| & \text{(ii)} \end{cases}$$

Da planaridade de G (tendo em conta o corolário 4.15) decorre a desigualdade $|E| \leq 3|V|-6$, a qual, combinada com (i) e (ii), é equivalente à desigualdade

$$\frac{1}{2}\sum_{i=\delta(G)}^{\Delta(G)} n_i * i \leq 3\sum_{i=\delta(G)}^{\Delta(G)} n_i - 6 \Leftrightarrow \sum_{i=\delta(G)}^{\Delta(G)} n_i * i \leq 6\sum_{i=\delta(G)}^{\Delta(G)} n_i - 12.$$

Da última desigualdade obtida, decorre ainda que

$$0 < 12 \leq \sum_{i=\delta(G)}^{\Delta(G)} n_i(6-i),$$

donde se pode concluir que existe pelo menos um vértice, v, cujo grau, i=d(v), é inferior a 6 (uma vez que $0 < \sum_{i=\delta(G)}^{\Delta(G)} n_i(6-i) \Rightarrow 6-i>0$ para pelo menos um índice i).

♦

Particularizando o resultado anterior para os grafos bipartidos planares com facilidade se conclui a existência, nestes grafos, de pelo menos um vértice de grau não superior a 3.

Um grafo diz-se **platónico** se é poligonal, regular e todas as suas faces são limitadas pelo mesmo número de arestas. São grafos platónicos, os grafos cíclicos (que correspondem aos polígonos regulares), o grafo constituído por um único vértice isolado, e os grafos formados pelas arestas dos 5 poliedros convexos regulares: o tetraedro, o hexaedro (ou cubo), o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro.

Um **polígono regular** (em termos geométricos) é uma figura poligonal fechada limitada por um número finito de segmentos (arestas) com igual comprimento e com os mesmos ângulos. Existe um número infinito de polígonos regulares, apresentando-se, na figura a seguir os quatro primeiros.

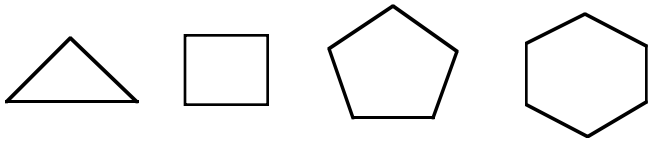


Fig. 4.22

O teorema a seguir estabelece a existência de apenas 5 poliedros regulares (aos quais corresponde cinco grafos platóniocos).

4.17 Teorema

Existem somente 5 grafos platónicos distintos de K_1 e dos grafos cíclicos.

Prova:

Seja G um grafo regular tal que $\forall v \in V(G)$, $d(v)=d$, onde cada face tem grau n.

Uma vez que $G \neq K_1$, podemos concluir que $d>0$ e, dado que G não tem uma única aresta, que $d>1$. Adicionalmente, dado que G não é um grafo cíclico, podemos ainda concluir que $d>2$, i. e, que $d \geq 3$.

Por outro lado, é claro que $n \geq 3$ e, uma vez que é planar [42], da fórmula de Euler, tendo em conta que $fn=2|E(G)| \Leftrightarrow fn=d|V(G)| \Leftrightarrow f=\frac{d|V(G)|}{n}$ e que $d|V(G)|=2|E(G)| \Leftrightarrow |E(G)|=\frac{d|V(G)|}{2}$, decorre que

$$\frac{d|V(G)|}{n}=\frac{d|V(G)|}{2}-|V(G)|+2 \Leftrightarrow \frac{d|V(G)|}{n}+|V(G)|-\frac{d|V(G)|}{2}=2$$

$$\Leftrightarrow |V(G)|(\frac{d}{n}+1-\frac{d}{2})=2$$

$$\Leftrightarrow |V(G)|(2d+2n-nd)=4n \ (*).$$

Da igualdade (*) decorre a inequação

$$2d+2n-nd>0 \Leftrightarrow -2d-2n+nd<0 \Leftrightarrow -2d-2n+nd+4<4 \Leftrightarrow (n-2)(d-2)<4,$$

---

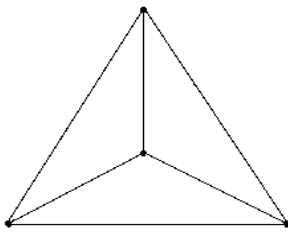
[42]Note-se que um grafo platónico é definido pelas arestas de um sólido platónico (poliedro convexo regular) e por conseguinte é representável, sem cruzamentos nas arestas, numa esfera. Logo, pela projecção estereográfica é, também, represenbtável (novamente sem cruzamentos nas arestas) no plano.

a qual, para n≥3 e d≥3, apresenta como soluções possíveis os pares de valores (d,n), (3,3), (3,4), (3,5), (4,3) e (5,3) que correspondem, respectivamente, ao tetraedro, ao hexaedro, ao dodecaedro, ao octaedro e ao icosaedro.

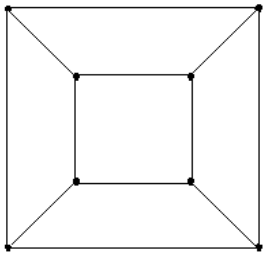
◆

Utilizando a igualdade (*), da qual se conclui que $|V(G)|=\frac{4n}{2n+2d-nd}$, podemos obter o quadro a seguir indicado, onde se apresentam os graus dos vértices, os graus das faces, o número de vértices, o número de arestas e o número de faces para cada um dos poliedros convexos regulares associados aos diferentes grafos platónicos.

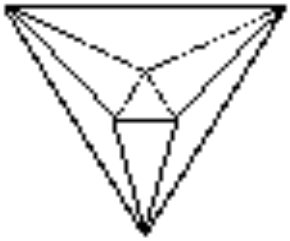
d	n	|V(G)|	|E(G)|	f	Designação
3	3	4	6	4	Tetraedro
3	4	8	12	6	Hexaedro (ou cubo)
3	5	20	30	12	Dodecaedro
4	3	6	12	8	Octaedro
5	3	12	30	20	Icosaedro



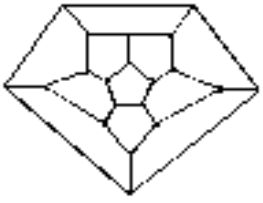
Tetraedro



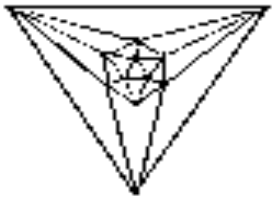
Cubo



Octaedro



Dodecaedro



Icosaedro

Exercícios

4.1 - Prove que a noção de distância entre vértices, introduzida nos grafos, é uma métrica.

4.2 - Dado um grafo arbitrário, G, prove que raio(G) ≤ diam(G) ≤ 2raio(G).

4.3 - Supondo que G é um grafo não conexo tal que |V(G)|=8, prove que |E(G)|≤21.

4.4 - Prove que em todo o grafo completo de ordem n existe um ciclo cujo comprimento é n.

4.5 - Determine o maior número possível de vértices num grafo com 19 arestas onde todos os vértices têm grau não inferior a 3.

4.6 - Considerando que se realiza um determinado encontro, verifique se o número de participantes que cumprimenta um número ímpar de presentes pode ser ímpar.

4.7 - Dado uma família de subconjuntos de um dado conjunto finito X, prove que a subfamília constituída pelos subconjuntos que intersectam um número ímpar de subconjuntos da família tem cardinalidade par.

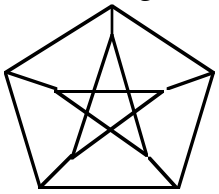
4.8 - Indique o número de arestas do grafo $K_{m,n}$ com m,n∈**N**.

4.9 -. Prove que o grafo bipartido completo $K_{n,n}$ é hamiltoniano e contém $\frac{1}{2}$n!(n-1)! circuitos de Hamilton

4.10 - Quantas faces existem num grafo planar conexo com 10 vértices, cada um dos quais com grau 3?

4.11 - Indique quais os grafos planares para os quais se verifica a igualdade $3f=2|E|$. Mais geralmente, indique quais os grafos planares para os quais se verifica $nf=2|E|$, com $n \in \mathbf{N}$.

4.12 - Prove que o grafo de Peterson, a seguir representado, é não planar.



4.13 - Sabendo que uma bola de futebol é fabricada unindo pentágonos e hexágonos regulares, de tal forma que cada pentágono é cosido a cinco hexágonos e cada hexágono a três pentágonos e a três hexágonos, alternadamente, diga se o número de pentágonos é par ou ímpar [43].

4.14 - Sabendo que para a subdivisão de um dado terreno em diferentes lotes se utilizaram 208 estacas, cada uma das quais foi colocada nos pontos de confluência das fronteiras produzidas pela subdivisão e sabendo ainda que se utilizaram 607 segmentos de arame para unir os diversos pares de estacas (não mais do que um segmento por cada par) de modo a demarcar convenientemente cada um dos lotes, determine o número de lotes obtido.

---

[43]Este problema foi motivado por um outro (ligeiramente mais complicado mas muito interessante) publicado por Margarida Bastos e António Guedes de Oliveira, no Boletim nº 32 da SPM (Sociedade Portuguesa de Matemática).