2. Conjuntos Parcialmente Ordenados

Dada uma relação de ordem parcial R (usualmente denotada pelo símbolo "$\leq$" e a respectiva relação inversa pelo símbolo "$\geq$") definida num conjunto X, o par (X,R) (ou (X,$\leq$)) designa-se por **conjunto parcialmente ordenado** (ou, na terminologia inglesa, por "poset"). Quando não existem dúvidas quanto à relação parcial, R, definida no conjunto X, o conjunto parcialmente ordenado (X,R) é identificado, simplesmente, por X. Dois elementos $x,y\in X$ dizem-se comparáveis se $\{(x,y),(y,x)\}\cap R\neq\emptyset$.

Uma relação de ordem parcial, R, definida num conjunto Y, diz-se total (**relação de ordem total**) se quaisquer dois elementos de Y são comparáveis, i. e, se $\forall x,y\in Y$ $\{(x,y),(y,x)\}\cap R\neq\emptyset$. Uma relação de ordem total também se designa por **relação linear**.

Designa-se por **elemento maximal** de um conjunto parcialmente ordenado (X,R), todo o elemento $x\in X$ tal que se $\exists y\in X$ para o qual se verifica que $(x,y)\in R$, então $x=y$. Os **elementos minimais** em X são definidos de um modo dual. Estes conceitos de maximalidade e de minimalidade são, naturalmente, extensíveis a subconjuntos do conjunto parcialmente ordenado X.

2.1 Teorema

Todo o subconjunto de um conjunto parcialmente ordenado (não vazio) finito tem um elemento maximal e um elemento minimal.

Prova:

Considere-se o conjunto parcialmente ordenado (X,R) e seja Y um subconjunto não vazio de X ($X\supseteq Y$). Seja $\alpha_1\in Y$, se α_1 não é um elemento maximal de Y, então existe $\alpha_2\in Y\backslash\{\alpha_1\}$ tal que $(\alpha_1,\alpha_2)\in R$. Continuando este processo, uma vez que Y é finito (dado ser um subconjunto do conjunto finito X), ao fim de um número finito de passos necessariamente se obterá um elemento maximal.

A prova da existência de um elemento minimal no subconjunto Y faz-se de modo análogo.

♦

Dado um conjunto X, designamos por **sequência finita** (ou simplesmente sequência) de termos de X, toda a aplicação $a:\mathbf{N}_n \rightarrow X$ (onde $n \in \mathbf{N}$). Usualmente, $\forall k \in \mathbf{N}_n$, a(k) denota-se por a_k. As **sequências infinitas**, i. e, definidas em **N**, designam-se, habitualmente, por sucessões.

Em geral identifica-se uma sequência, definida em $\mathbf{N}_n$, pelo n-uplo das suas imagens, i. e, por $S=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Dada uma sequência de termos em X, $S=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ (i. e, $a:\mathbf{N}_n \rightarrow X$), a função $b:\mathbf{N}_m \rightarrow X$ diz-se uma subsequência de S, se existe um subconjunto J de $\mathbf{N}_n$ ($\mathbf{N}_n \supseteq J$) e uma função bijectiva entre $\mathbf{N}_m$ e J, $f:\mathbf{N}_m \rightarrow J$, tal que $f(i)<f(j)$ sempre que $i<j$, para a qual se verifica que $\forall k \in \mathbf{N}_m$ $b(k)=a(f(k))$.

Sendo X um conjunto munido de uma relação de ordem parcial R, uma sequência de termos de X, $S=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, diz-se não decrescente (não crescente) se $\forall i<j$ $(a_i,a_j) \in R$ ($(a_i,a_j) \in R^{-1}$). Uma sequência que seja não decrescente ou não crescente, diz-se uma **sequência monótona**. Estes conceitos de monotonicidade são naturalmente extensíveis às subsequências, tendo em conta que as subsequências são, elas próprias, sequências.

O próximo teorema garante a existência de uma subsequência monótona, com determinado número de termos, numa sequência arbitrária de um conjunto totalmente ordenado com número de termos conhecido. A respectiva prova, a presentar, é idêntica à que se descreve em (Erickson, 1996).

2.2 Teorema (Erdos-Szekeres)

Sejam $m,n\in\mathbf{N}$ e $S=(\alpha_1, \dots , \alpha_{mn+1})$ ($|S|=mn+1$) uma sequência de $mn+1$ elementos de um conjunto X munido de uma relação de ordem total $\leq$. Então S contém uma subsequência não decrescente de $m+1$ termos ou uma subsequência não crescente de $n+1$ termos (ou ambas).

Prova:

Suponha que S não contém qualquer das subsequências referidas e considere a aplicação $f:\mathbf{N}_{mn+1}\rightarrow\mathbf{N}_m x\mathbf{N}_n$, tal que $f(t)=(x_t,y_t)$ onde x_t é o maior número de termos de uma sequência não decrescente com início em α_t e y_t é o maior número de termos de uma sequência não crescente com início em α_t [5].

Dado que $|\mathbf{N}_{mn+1}|=mn+1$ e $|\mathbf{N}_m x\mathbf{N}_n|=mn$, podemos concluir que $\exists j,i\in\mathbf{N}_{mn+1}$ tais que $j\neq i$ e $f(j)=f(i)$. Supondo que $j<i$, segue-se que, se $\alpha_j\leq\alpha_i$ então $x_j>x_i$ e se $\alpha_j\geq\alpha_i$ então $y_j>y_i$, logo $f(j)\neq f(i)$, o que constitui uma contradição.

♦

Como exemplo de aplicação deste último teorema, considerando a sequência S=(3,-2,4,6,10,1,2,-4,0,3,2,0,8), m=4 e n=3, pelo que |S|=mn+1=13, podemos concluir que ou existe uma sequência monótona (não decrescente) de m+1=5 termos, ou existe uma sequência não crescente de n+1=4 termos. Com efeito, com facilidade se constata a existência da subsequência não decrescente de 5 termos: -2, 1, 2, 3, 8.

Relativamente ao teorema 2.2 deve observar-se ainda que mn+1 é a mínima cardinalidade para S, no sentido em que, se |S|=mn, então é possível determinar uma sequência de mn termos reais, relativamente à qual não existe qualquer subsequência de m+1 termos não decrescentes, nem qualquer subsequência de n+1 termos não crescentes. Para tal basta considerar a sequência obtida concatenando n sequências de m termos

[5] Deve observar-se que, de acordo com a hipótese, $x_t\leq m$ e $y_t\leq n$.

crescentes, do seguinte modo: para cada $j\in\mathbf{N}_n$, seja $S_j=(\alpha_{1j}, \dots , \alpha_{mj})$ tal que $\alpha_{ij}<\alpha_{i+1j}$ $\forall i\in\{1,\dots,m-1\}$ e tal que $\alpha_{pj_1}>\alpha_{qj_2}$ se $j_1<j_2$. Nestas condições, no conjunto $S=(a_{11},\dots,a_{m1},a_{12},\dots,a_{m2},\dots,a_{1n},\dots,a_{mn})$ não existe qualquer subsequência de m+1 termos não decrescentes, nem qualquer subsequência de n+1 termos não crescentes.

Dado um conjunto parcialmente ordenado (X,R), designa-se por **cadeia** (de X) todo o subconjunto Y de X ($X\supseteq Y$) no qual todos os elementos são comparáveis (i. e, $\forall\alpha,\beta\in Y$ $\{(\alpha,\beta),(\beta,\alpha)\}\cap R\neq\emptyset$). Por sua vez, designa-se por **anticadeia** (de X) todo o subconjunto Z de X no qual não existem dois elementos distintos comparáveis (i. e, $\forall\alpha,\beta\in Z$ tal que $\alpha\neq\beta$, $\{(\alpha,\beta),(\beta,\alpha)\}\cap R=\emptyset$).

Neste contexto (das cadeias e anticadeias) segue-se um resultado atribuido a Dilworth com uma prova semelhante à apresentada em (Erickson, 1996).

2.3 Teorema (lema de Dilworth)

Em qualquer conjunto parcialmente ordenado X, de mn+1 elementos, existe uma cadeia de cardinalidade m+1 ou uma anticadeia de cardinalidade n+1.

Prova:

Suponha-se que em X não existe qualquer cadeia de cardinalidade m+1. Então podemos concluir que todas as cadeias de X têm cardinalidade não superior a m.

Defina-se a função $f:X\rightarrow\{1,\dots,m\}$ com f(x) igual à cardinalidade da cadeia de máxima cardinalidade, de entre as cadeias para as quais x é um elemento maximal [6] . Pelo corolário 1.4 $\exists j\in\{1,\dots,m\}$ tal que $|f^{-1}(j)|\geq\frac{|X|}{m}=\frac{mn+1}{m}=n+\frac{1}{m}$, donde $|f^{-1}(j)|\geq n+1$ (ou seja, existem n+1 elementos de X com a mesma imagem por f). Tendo em conta a definição de

[6] f(x)=max{|Y|: Y é uma cadeia de X e x é elemento maximal para Y}.

f, estes elementos não são comparáveis, i. e, formam uma anticadeia de cardinalidade n+1.

♦

Com facilidade de observa uma clara semelhança entre os teoremas 2.2 e 2.3, relacionada com o facto de ambos considerarem nas hipóteses conjuntos de cardinalidade mn+1 e de em ambos se concluir a existência de subconjuntos (com determinadas características) de cardinalidade m+1 ou n+1. Na verdade, estas semelhanças não são ocasionais, uma vez que o teorema de Erdos-Szekeres (teorema 2.2) decorre, como corolário, do lema de Dilworth (teorema 2.3). Com efeito, considerando-se o conjunto X dos termos da sequência S do teorema 2.2 de tal forma que, em X, dois quaisquer termos de S são destinguidos pelos seus índices e definindo-se em X a relação de ordem parcial $\leq_S$, tal que $a_i \leq_S a_j$ se $a_i \leq a_j$ e $i \leq j$ (da qual decorre que toda a cadeia em S é uma subsequência não decrescente e toda a anticadeia é uma subsequência não crescente), obtém-se o resultado pretendido.

Tal como no teorema de Erdos-Szekeres, também no lema de Dilworth, mn+1 é a mínima cardinalidade de X para se garantir a existência de uma cadeia de cardinalidade m+1 ou uma anticadeia de cardinalidade n+1.

Denotando por Cadeias(X) e Anticadeias(X) os conjuntos de subconjuntos de X que determinam, respectivamente, cadeias e anticadeias de X, $\max\{|Y|: Y \in \text{Cadeias}(X)\}$ e $\max\{|Z|: Z \in \text{Anticadeias}(X)\}$ designam-se, respectivamente, por **comprimento** e **largura** da relação de ordem parcial R. Assim, supondo que $\max\{|Y|: Y \in \text{Cadeias}(X)\}=p$ e que $\max\{|Z|: Z \in \text{Anticadeias}(X)\}=q$, podemos concluir que R tem comprimento p e largura q.

A título de exemplo, sendo X o conjunto de participantes num determinado congresso onde a cada congressista é atribuido um número de identificação e definindo-se em X a relação R tal que $(x,y) \in R$ sse x e y têm a mesma nacionalidade e o número de identificação de x é inferior ao número de identificação de y, pode concluir-se que o comprimento de R é igual ao número de participantes da nacionalidade que é maioritária

no congresso e a respectiva largura é igual ao número das diferentes nacionalidades representadas (por pelo menos um participante) no congresso.

Embora este exemplo ilustre os conceitos de comprimento e largura de uma relação de ordem parcial, deve observar-se, porém, que a respectiva determinação nem sempre é tão imediata. Conhecido, no entanto, um destes valores (o comprimento ou a largura), o corolário do lema de Dilworth, que a seguir se apresenta, permite a obtenção de um minorante para o valor que se desconhece.

2.4 Corolário

Considere-se o conjunto X munido de uma relação de ordem parcial com comprimento p e largura q. Então $|X| \leq pq$.

Prova:

Suponha-se que, apesar das hipóteses se verificarem, $|X| > pq \Leftrightarrow |X| \geq pq+1$. Então, por aplicação do lema de Dilworth, ou existe uma cadeia de comprimento p+1 ou uma anticadeia de comprimento q+1, o que contraria ou a definição de p ou a de q.

♦

Deve observar-se que se C é uma cadeia e A uma anticadeia, de um dado conjunto parcialmente ordenado, então $|C \cap A| \leq 1$, uma vez que nesta intersecção não podem existir dois elementos que são comparáveis e inconparáveis.

2.5 Teorema

Seja (X,R) um conjunto parcialmente ordenado tal que R tem comprimento p e largura q. Então X não pode ser particionado em menos de q cadeias nem em menos de p anticadeias.

Prova:

Tendo em conta que dois elementos de uma mesma cadeia têm, necessariamente, que pertencer a diferentes anticadeias da partição a considerar, conclui-se que cada elemento de uma cadeia de p elementos (cuja existência está garantida pelo facto de R ter comprimento p) pertence a uma anticadeia distinta, em qualquer conjunto de anticadeias que constitua uma partição de X. Logo, qualquer partição de X em anticadeias tem, pelo menos, p subconjuntos. Analogamente se prova a minimalidade de q relativamente ao número de cadeias que particionam X.

♦

Relativamente à partição de um conjunto parcialmente ordenado em cadeias e anticadeias é possível obter resultados ainda mais fortes do que o anterior, como é o caso (relativamente à partição em cadeias) do teorema a seguir (conhecido por teorema de Dilworth [7]) que constitui, talvez, o resultado de maior relevância da **Teoria dos Conjuntos Parcialmente Ordenados**. Existindo uma grande variedade de demonstrações para este teorema, a maioria das quais muito elaboradas e de difícil leitura, e não sendo esse o caso da prova publicada em (Tverberg, 1967), optamos pela sua apresentação, num estilo que, no essencial, é idêntico ao adoptado em (Bolobás, 1979) e em (van Lint & Wilson, 1994).

2.6 Teorema (de Dilworth)

Se no conjunto parcialmente ordenado (X,R), a relação R tem largura q, então X pode ser particionado em q cadeias.

[7] De acordo com (Cameron, 1994), Gallai e Milgram concluiram o resultado em causa alguns anos antes de Dilworth o ter publicado (em 1950), porém, a vontade de Gallai de o ver traduzido em Inglês e a indiferença de Milgram em relação a essa particularidade provocaram o adiamento da sua divulgação.

Prova:

Vamos fazer a prova por indução sobre a cardinalidade de X, tendo em conta que para $X=\varnothing$ ($|X|=0$) o resultado é (trivialmente) verdadeiro.

Suponha-se que $|X|>0$ e que o resultado é verdadeiro para qualquer conjunto parcialmente ordenado com menos do que $|X|$ elementos.

Considere-se uma cadeia, C, de máxima cardinalidade em X (pelo que R tem comprimento $|C|$).

1. Se $X\backslash C$ não tem qualquer anticadeia de q elementos, então (uma vez que R tem largura q em X e a anticadeia que determina a largura de R, A, é tal que $|A\cap C|\leq 1$) $\exists x\in C\cap A$ e podemos concluir que R tem largura q-1 em $X\backslash C$. Logo, por hipótese de indução, existem q-1 cadeias que particionam $X\backslash C$ pelo que, adicionando-lhes C, se obtêm q cadeias que particionam X.

2. Suponha-se que em $X\backslash C$ existe a anticadeia $A=\{a_1,\ldots,a_q\}$ e considerem-se os subconjuntos de X,

$X^-=\{x\in X: (x,a_i)\in R, \text{ para algum } a_i\in A\}$ e $X^+=\{x\in X: (a_i,x)\in R, \text{ para algum } a_i\in A\}$.

É claro que $X=X^-\cup X^+$, caso contrário existiria $y\in X$ não relacionado com qualquer dos elementos de A e, consequentemente, $A\cup\{y\}$ seria uma anticadeia de comprimento q+1.

Tendo em conta que ambos os subconjuntos de X, X^- e X^+, contêm A e qualquer deles tem cardinalidade inferior à de X [8], por hipótese de indução, podemos concluir que o subconjunto X^- se particiona nas q cadeias, $C_1^-, \ldots, C_q^-$ e que o subconjunto X^+ se particiona nas q cadeias $C_1^+, \ldots, C_q^+$.

---

[8]Caso contrário pelo facto de A ser uma anticadeia de máxima cardinalidade, ou A seria o conjunto dos elementos minimais (pelo que $X^+=X$) ou A seria o conjunto dos elementos maximais (donde $X^-=X$). Em qualquer dos casos porém, um dos extremos de C (o elemento minimal ou o elemento maximal) estaria em A o que não é o caso (uma vez que $X\backslash C\supseteq A$).

Uma vez que cada a_i pertence a uma única cadeia da partição $C_1^-, \ldots, C_q^-$ e a uma única cadeia da partição $C_1^+, \ldots, C_q^+$, vamos identificar por C_j^- e por C_j^+ as cadeias que contêm a_j (pelo que $a_j \in C_j^- \cap C_j^+$).

A prova completa-se mostrando que para cada $i \in \mathbf{N}_q$, (*) a_i é um elemento maximal de C_i^- e um elemento minimal de C_i^+, (**) e ainda que os subconjuntos de X que se determinam fazendo $C_i = C_i^- \cup C_i^+$ são cadeias disjuntas tais que $\bigcup_{i \in \mathbf{N}_q} C_i = X$.

(*) Suponha-se que a_i não é elemento maximal para C_i^-, então $\exists x \in C_i^-$ tal que $(a_i,x) \in R$. Por outro lado, uma vez que $x \in X^-$, $\exists a_j \in A$ tal que $(x,a_j) \in R$, logo (pela transitividade de R) $(a_i,a_j) \in R$, o que é absurdo tendo em conta que $a_i, a_j \in A$ (i. e, que a_i e a_j não são comparáveis). Por sua vez, a prova de que a_i é um elemento minimal para C_i^+ faz-se análogamente.

(**) Dado que $\forall i \in N_q$, de acordo com (*), a_i é um elemento maximal da cadeia C_i^- e um elemento minimal da cadeia C_i^+, vem que $\forall \alpha \in C_i^-$ $(\alpha,a_i) \in R$ e $\forall \beta \in C_i^+$ $(a_i,\beta) \in R$. Consequentemente, todos os elementos em $C_i = C_i^- \cup C_i^+$ são comparáveis, pelo que C_i é uma cadeia. Por outro lado, tendo em conta que os C_i^-s particionam X^- e os C_i^+s particionam X^+, que $X = X^- \cup X^+$, e ainda que os elementos de A são os únicos elementos que pertencem a $X^- \cap X^+$ [9] e cada a_i pertence a um único C_i, concluimos que os subconjuntos de X, $C_1, \ldots, C_q$, constituem uma partição de X em q cadeias.

♦

O resultado dual do teorema 2.6 foi publicado em (Mirsky, 1971) e é apresentado a seguir com uma prova semelhante à descrita em (Cameron, 1994), embora mais detalhada e sem recorrer, explicitamente, aos mesmos conceitos.

---

[9] Caso contrário, existiria $x \notin A$ tal que $(a_i,x) \in R$, para algum $a_i \in A$ e $(x,a_j) \in R$, para algum a_j, donde, pela transitividade de R, se concluiria que $(a_i,a_j) \in R$.

2.7 Teorema

Se no conjunto parcialmente ordenado (X,R) a relação R tem comprimento p, então X admite uma partição em p anticadeias.

Prova:

Considere-se a aplicação $f:X\rightarrow\{1, 2, \dots , |X|\}$, onde f(x) é igual à cardinalidade da cadeia de maior comprimento que admite x como elemento maximal.

Seja $A_i=\{x\in X: f(x)=i\}$, então (tendo em conta a hipótese) $A_i=\emptyset\ \forall\ i>p$. Adicionalmente, dado existir em X uma cadeia, C, de p elementos, ou seja, um subconjunto de p elementos de X, tais que $x_1<x_2<\dots<x_p$ [10], pode concluir-se, por um lado, que $A_i\neq\emptyset\ \forall i\leq p$, uma vez que, para cada $i\in\{1,\dots,p\}$, $x_i\in C\cap A_i$ (caso contrário, $f(x_i)<i$ entra em contradição com o facto de x_i ser o elemento maximal dos primeiros i elementos da cadeia C e $f(x_i)>i$ entra em contradição com o facto de R ter comprimento p) e por outro que $X=A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_p$, uma vez que $\forall x\in X$, x é o elemento maximal de algum subconjunto de X e, consequentemente, o elemento maximal de alguma das suas cadeias.

Sendo claro que $\forall i\neq j$, $A_i\cap A_j=\emptyset$ (caso contrário existiria $x\in A_i\cap A_j$ com i<j, tal que f(x)=i e f(x)=j), resta provar que $\forall i\in\{1, \dots , p\}$, A_i é uma anticadeia. Com efeito, se existirem dois elementos distintos de A_i comparáveis, por exemplo $x,y\in A_i$ com $x\neq y$ e $(x,y)\in R$, então $f(x)=i \Rightarrow f(y)\geq i+1$, o que contraria o facto de y ser um elemento de A_i.

♦

Um conjunto parcialmente ordenado de utilização corrente é o conjunto das partes de um conjunto finito X, $P(X)$, munido da relação de ordem $\supseteq$, definida por $(A,B)\in\supseteq$ (escrevendo-se usualmente que $A\supseteq B$) sse $A,B\in P(X)$ e todos os elementos de B estão em A.

---

[10] Entendendo-se por $\alpha<\beta$ que $(\alpha,\beta)\in R$ e $\alpha\neq\beta$.

Designa-se por **família de conjuntos** de X todo o subconjunto F de $P(X)$.

Tendo em conta que a cadeia de máxima cardinalidade em $P(X)$, C, é tal que $\emptyset \in C$ e se $A \in C$ e $X \setminus A \neq \emptyset$, então, para algum $x \in X \setminus A$, $B = A \cup \{x\} \in C$, podemos concluir que a relação $\supseteq$ tem comprimento $|X|+1$ (pelo que, por aplicação do teorem 2.7, se pode particionar $P(X)$ em $|X|+1$ anticadeias).

No que diz respeito à largura da relação $\supseteq$, a sua avaliação é, porém, mais complicada.

Uma família de conjuntos, F, munida da relação de ordem parcial R ($\supseteq$), diz-se uma **família de Sperner**, se nenhum elemento de F contém qualquer outro, i. e, se $\forall A,B \in F \ \{(A,B),(B,A)\} \cap R = \emptyset$. Nestas condições, pode afirmar-se que F constitui uma anticadeia, pelo que a relação R em F tem largura $|F|$ (e comprimento 1).

Dado um conjunto não vazio X tal que $|X|=n$, para qualquer número fixo $k \leq n$, o conjunto dos subconjuntos de X de cardinalidade k forma uma família de Sperner com $\binom{n}{k}$ [11] conjuntos. Uma vez que estes coeficientes binomiais crescem até ao ponto médio, as famílias de Sperner deste tipo atingem a máxima cardinalidade para $k=\frac{n}{2}$ se n é par e para $k=\frac{n-1}{2}$ ou $k=\frac{n+1}{2}$ se n é impar.

Relacionado com o número de anticadeias numa família de subconjuntos de $\mathbf{N}_n$, onde se define a relação de ordem parcial $\supseteq$, Sperner em 1928 introduziu o resultado que o teorema a seguir (com o seu nome) explicita. A prova que vamos apresentar, no entanto, foi publicada em (Lubell, 1966) e, basicamente, é idêntica à que se descreve em (Erickson, 1996) e em (van Lint & Wilson, 1994).

2.8 Teorema (lema de Sperner)

Se A é uma anticadeia de máxima cardinalidade do conjunto parcialmente ordenado $(P(\mathbf{N}_n), \supseteq)$, então $|A| = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

[11] $\binom{n}{k}$ denota o número de combinações de n elementos k a k (i. e, $\frac{n!}{k!(n-k)!}$).

Prova:

Considerando a anticadeia do conjunto parcialmente ordenado $(P(\mathbf{N}_n),\supseteq)$, $A=\{A_1,\ldots, A_q\}$, onde $|A_i|=\alpha_i$ para cada $i\in\mathbf{N}_q$, primeiramente vamos provar que, para cada A_i, existem $\alpha_i!(n-\alpha_i)!$ cadeias de n+1 elementos que contêm A_i. Com efeito, supondo que $A_i=\{\tau_{i1},\tau_{i2},\ldots,\tau_{i\alpha_i}\}$, as cadeias de máxima cardinalidade que contêm A_i, começam com o conjunto vazio, depois têm como conjunto singular qualquer dos elementos $\{\tau_{i1}\}$, $\{\tau_{i2}\}$, … , $\{\tau_{i\alpha_i}\}$, a seguir conjuntos do tipo $\{\tau_{ij},\tau_{ik}\}$ com $j,k\in\{1,2,\ldots,\alpha_i\}$ e $j\neq k$, e assim sucessivamente até se atingir o conjunto A_i. Posteriormente, destas cadeias fazem ainda parte os conjuntos $A_i\cup\{x\}$ para cada $x\in\mathbf{N}_n\backslash A_i$, os conjuntos $A_i\cup\{x,y\}$, etc, até ao conjunto $\mathbf{N}_n$. Nestas condições, uma vez que cada cadeia que contenha A_i pode ser identificada por uma sequência definida por uma permutação dos α_i elementos de A_i [12] concatenada com uma permutação dos $n-\alpha_i$ elementos de $\mathbf{N}_n\backslash A_i$, conclui-se que, efectivamente, o número de cadeias de n+1 elementos que contêm A_i é igual a $\alpha_i!(n-\alpha_i)!$.

Tendo em conta que que existem n! cadeias de comprimento n+1, conclui-se que $\sum_{i=1}^{q}\alpha_i!(n-\alpha_i)!)\leq n! \Leftrightarrow \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{q}\alpha_i!(n-\alpha_i)!\leq 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{q}\frac{\alpha_i!(n-\alpha_i)!}{n!})\leq 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{q}\binom{n}{\alpha_i}^{-1}\leq 1$. Por outro lado, reconhecendo que $\binom{n}{k}$ atinge o seu máximo para $k=\lfloor n/2\rfloor$, vem que

$$q\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}^{-1}\leq \sum_{i=1}^{q}\binom{n}{\alpha_i}^{-1}\leq 1 \Leftrightarrow q\leq\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}.$$

Adicionalmente, dado que os $\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$ subconjuntos de cardinalidade $\lfloor n/2\rfloor$ formam uma anticadeia, podemos concluir que se A é uma anticadeia de máxima cardinalidade, então $|A|=\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$.

♦

[12] Observe-se, por exemplo, que a cadeia $\{\emptyset,\{\tau_{i1}\},\{\tau_{i1},\tau_{i2}\},\ldots,A_i\}$ pode identificar-se pela sequência $(\tau_{i1},\tau_{i2},\ldots,\tau_{i\alpha_i})$, interpretada de modo adequado.

Os resultados deste tipo são, muitas vezes, associados ao que se designa por **Teoria dos Conjuntos Extremais**, onde também se enquadra o estudo das famílias intersectantes que a seguir se definem.

Dizemos que uma família, F, de subconjuntos de X é uma **família intersectante** se $\forall A,B\in F\ A\cap B\neq\emptyset$.

2.9 Teorema

Qualquer família de subconjuntos de $\mathbf{N}_n$ intersectante, F, é tal que $|F|\leq 2^{n-1}$. Adicionalmente, pode concluir-se que existe uma destas famílias cuja cardinalidade é precisamente 2^{n-1}.

Prova:

Tendo em conta que os 2^n subconjuntos de $\mathbf{N}_n$ se podem dividir em 2^{n-1} pares complementares $\{A,\mathbf{N}_n\backslash A\}$, conclui-se que qualquer família intersectante de $\mathbf{N}_n$ contém, no máximo, um conjunto de cada um destes pares. Logo, $|F|\leq 2^{n-1}$. Por outro lado, qualquer família de subconjuntos de $\mathbf{N}_n$ que contenha um elemento particular, x, tem 2^{n-1} elementos e é intersectante.

♦

Vamos finalizar este capítulo, apresentando um resultado, relativamente recente, mas muito referido, associado às famílias intersectantes e introduzido em (Erdos, Ko and Rado, 1961), com uma demonstração idêntica à publicada em (Katona, 1974) e descrita em (van Lint & Wilson, 1994) mas, mais uma vez, mais detalhada.

2.10 Teorema (de Erdos-Ko-Rado)

Seja F uma família intersectante do subconjunto das partes de $\mathbf{N}_n$ $\{A\in P(\mathbf{N}_n): |A|=k\}$. Se $k\leq \frac{n}{2}$, então $|F|\leq \binom{n-1}{k-1}$.

Prova:

Considerem-se os números de $\mathbf{N}_n$ dispostos consecutivamente ao longo de uma circunferência e seja $C=\{C_1,\ldots,C_n\}$ o conjunto de todos os conjuntos cujos elementos são as componentes dos k-uplos consecutivos que se conseguem observar de um modo circular, i. e, $C_j=\{j,j+1,\ldots,j+k-1\}$, onde as operações são consideradas módulo n (com n ocupando a posição do elemento nulo). Então vem que $|F\cap C|\leq k$, dado que se, para algum j, $\exists A\in F$ tal que $C_j=A$, então, além de C_j, apenas pertencem a F, no máximo um conjunto de cada par de conjuntos de cardinalidade k ($\{r,r+1,\ldots,r+k-1\},\{r-k,r-k+1,\ldots,r-1\}$), com $j<r<j+k$. O mesmo se pode afirmar para qualquer outra disposição dos números na circunferência, i. e, para qualquer das permutações, π, dos n números de $\mathbf{N}_n$.

Denotando por $C^\pi=\{C_1^\pi,\ldots,C_n^\pi\}$ cada um dos conjuntos obtidos para as diferentes permutações de $\mathbf{N}_n$, $\pi(N_n)$, (onde $C_j^\pi=\{\pi(j), \pi(j+1),\ldots,\pi(j+k-1)\}$) obtém-se

$$(*) \qquad \sum_{\pi\in\pi(\mathbf{N}_n)} |C^\pi\cap F| \leq kn!.$$

Alternativamente, considerando cada um dos conjuntos $A\in F$ e cada um dos índices $r\in\{1,\ldots,n\}$ verifica-se a existência de $k!(n-k)!$ [13] permutações π tais que $C_r^\pi=A$ e, consequentemente, conclui-se que

$$(**) \qquad \sum_{\pi\in\pi(\mathbf{N}_n)} |C^\pi\cap F| = |F|nk!(n-k)!.$$

De (*) e (**) decorre finalmente que

$$|F|nk!(n-k)!\leq kn! \Leftrightarrow |F|\leq \frac{kn!}{nk!(n-k)!} \Leftrightarrow |F|\leq \binom{n-1}{k-1}.$$

♦

Adicionalmente, podemos concluir que existem famílias, F, intersectantes de subconjuntos de $\mathbf{N}_n$ com cardinalidade k, tais que $|F|=\binom{n-1}{k-1}$, pelo que este valor constitui um máximo para o conjunto das cardinalidades das famílias intersectantes constituidas por subconjuntos de $\mathbf{N}_n$ de k elementos. Com efeito, fixado um determinado elemento

[13] Observe-se que $|C_r|=k$ e $|\mathbf{N}_n\backslash C_r|=n-k$

$x \in \mathbf{N}_n$, existem $\binom{n-1}{k-1}$ conjuntos de k-1 elementos de $\mathbf{N}_n \backslash \{x\}$, logo, se a cada um destes subconjuntos acrescentarmos x, obtém-se uma família intersectante de subconjuntos de $\mathbf{N}_n$ com k elementos.

Para ilustrar algumas das afirmações efectuadas na demosntração do teorema 2.10, considere-se a família intersectante de subconjuntos de $P(\mathbf{N}_6)$ de cardinalidade 3, F={{1,2,4},{1,3,4},{1,6,4},{1,5,4},{2,3,4},{2,5,4},{2,6,4},{3,5,4},{3,6,4},{5,6,4}}.

Para a distribuição circular relativa à permutação identidade, π_1, dos elementos de $\mathbf{N}_6$, tendo em conta a definição dos subconjuntos C_j obtém-se C_1={1,2,3}, C_2={2,3,4}, C_3={3,4,5}, C_4={4,5,6}, C_5={5,6,1}, C_6={6,1,2}. Uma vez que $C_2 \in F$, tal como se afirma na demonstração, no máximo apenas um dos subconjuntos de cada um dos pares de subconjuntos ({3,4,5},{6,1,2}) e ({4,5,6},{1,2,3}), pertence à família F. Com efeito, nas figuras a seguir pode observar-se, a partir do conjunto C_2, representado na figura A, os pares de conjuntos disjuntos (C_3,C_6) (representado em B) e (C_4,C_1) (representado em C) cuja intersecção com C_2 é não vazia.

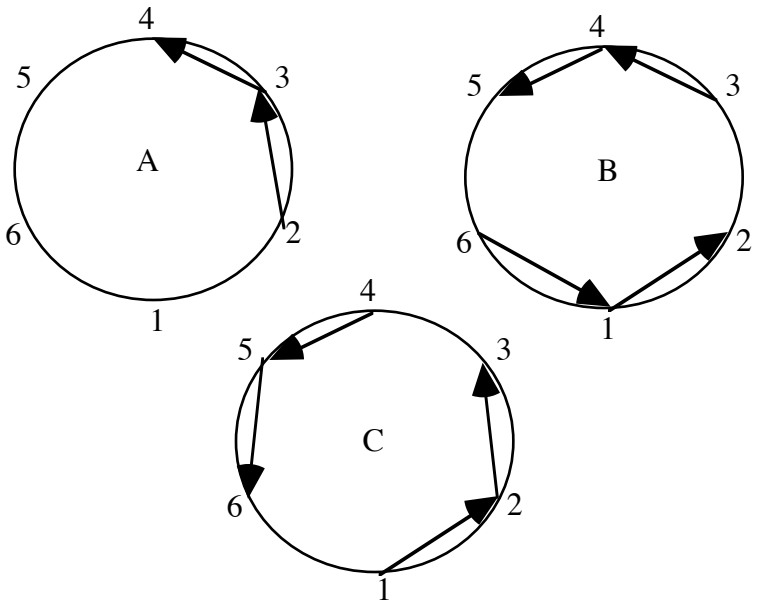

Fig. 2.1

Com facilidade se verifica que, no primeiro par, apenas $\{3,4,5\}\in F$ e, no segundo, apenas $\{4,5,6\}\in F$.

Por sua vez, considerando a distribuição circular da permutação, π_2, representada na figura a seguir, obtém-se $C_1=\{2,1,3\}$, $C_2=\{1,3,4\}$, $C_3=\{3,4,5\}$, $C_4=\{4,5,6\}$, $C_5=\{5,6,2\}$ e $C_6=\{6,2,1\}$ e verifica-se que $C_4\in F$. Nestas condições, considerando os pares de subconjuntos ($\{5,6,2\},\{1,3,4\}$) e ($\{6,2,1\},\{3,4,5\}$), conclui-se que, no primeiro par, apenas $\{1,3,4\}\in F$ e, no segundo, apenas $\{3,4,5\}\in F$.

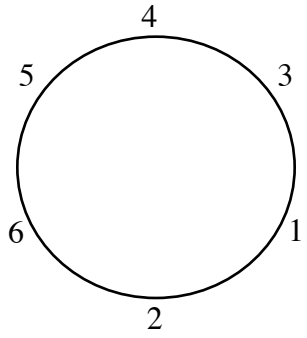

Fig. 2.2

Repetindo este processo para cada uma das 6! permutações, π, dos elementos de $\mathbf{N}_6$, obter-se-iam não mais do que 3*6! subconjuntos C_r^{π} pertencentes a F (incluindo nesta contagem todos os que aparecem repetidos para diferentes permutações).

Em alternativa ao processo acima referido, fixando um dado conjunto da família F, por exemplo, A=$\{1,3,4\}$, existem 3!(6-3)!=36 permutações, π, dos elementos de $\mathbf{N}_6$ para as quais se verifica igualdade C_r^{π}=A. Com efeito, por exemplo, para $C_1^{\pi_1}=\{1,3,4\}\in F$, obtêm-se as permutações (1,3,4), (1,4,3), (4,3,1), (4,1,3), (3,1,4) e (3,4,1) e, para cada uma destas, ainda se obtêm as permutaçõse relativas aos restantes elementos de $\mathbf{N}_6$ (2,5,6), (2,6,5), (5,2,6), (5,6,2), (6,2,5) e (6,5,2).

Por outro lado, para $C_2^{\pi_2}=\{1,3,4\}$, $C_3^{\pi_3}=\{1,3,4\}$, $C_4^{\pi_4}=\{1,3,4\}$, $C_5^{\pi_5}=\{1,3,4\}$ e $C_6^{\pi_6}=\{1,3,4\}$ obtêm-se as mesmas permutações, pelo que o seu número é igual a 10 (número de elementos de F) vezes 6 (número dos C_js) vezes 3! (numero de permutações possíveis em cada subconjunto A) vezes (6-3)! (número de permutações possíveis para os elementos de $\mathbf{N}_6\backslash$A).

Consequentemente, tal como se fez na demonstração, pode concluir-se que

$$|F|nk!(n-k)!=10*6*3!(6-3)!\leq 3*6!$$

Vamos finalizar este capítulo com um problema em aberto, proposto em (Cameron, 1994), cuja resolução (identificando os códigos binários de comprimento n com a função característica dos subconjuntos de $\mathbf{N}_n$) seria aplicável em **Teoria da Codificação** com alfabetos binários.

2.11 Problema (em aberto)

Dados m,n∈**N,** determinar uma família F de subconjuntos de $\mathbf{N}_n$ de máxima cardinalidade, tal que $\forall A,B\in F$ se $A\neq B$ então $|A\Delta B|\geq m$ [14].

[14] AΔB denota a diferença simétrica entre os conjuntos A e B e é tal que $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

Exercícios

2.1 - Prove que qualquer que seja a cardinalidade de um conjunto não vazio finito X, o número de subconjuntos de cardinalidade par é igual ao número de subconjuntos de cardinalidade impar.

Sugestão: Tenha em atenção que o número de subconjuntos de k elementos de um conjunto de n elementos é $\binom{n}{k}$ (i. e, o número de combinações de n, k a k) e considere o desenvolvimento do binómio de Newton $(1-1)^n$.

2.2 Considerando um conjunto finito não vazio X e denotando por $P(X)$ o conjunto das suas partes, prove que a relação $\supseteq$ definida em $P(X)$ ($A \supseteq B$ sse $A,B \in P(X)$ e A contém B) é uma relação de ordem parcial cujo comprimento é $|X|+1$ e cuja largura é não inferior a $\frac{2^{|X|}}{|X|+1}$.

2.3 - Prove que no lema de Dilworth (teorema 2.3), mn+1 é a mínima cardinalidade de X para se ter a garantia da existência de uma cadeia de cardinalidade m+1 ou uma anticadeia de cardinalidade n+1.

2.4 Dado o conjunto parcialemente ordenado $(P(\mathbf{N}_n),\supseteq)$, prove que existem $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ subconjuntos de cardinalidade $\lfloor n/2 \rfloor$ que constituem uma anticadeia.

2.5 Dada a família $F_k=\{U: X \supseteq U \text{ e } |U|=k\}$, onde X é um conjunto finito não vazio, prove que se $|X|<2k$, então F é intersectante.

2.6 Prove que o conjunto parcialemente ordenado $(P(\mathbf{N}_n),\supseteq)$ admite uma partição em n+1 anticadeias e uma partição em $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ cadeias.