1. Princípios Combinatórios Básicos e Aplicações

Neste capítulo, vamos estudar vários problemas de natureza combinatória (alguns dos quais permanecem por resolver) e abordar certos resultados decorrentes de alguns princípios básicos (mas muito úteis) em Combinatória, com especial destaque para o "**pigeonhole principle**" que consiste na conclusão (evidente) de que, dadas n+1 bolas para serem introduzidas em n buracos, pelo menos um dos buracos terá de conter duas bolas [1].

Nesta primeira parte, tanto a generalidade dos resultados apresentados, como as respectivas demonstrações, podem, com ligeiras alterações e menos detalhes, ser encontrados em (Erickson, 1996), tal como acontece, aliás, com todos os problemas em aberto.

1.1 - Problema

Dado um conjunto X de cardinalidade p e um conjunto Y de cardinalidade q, tal que $p \leq q$, quantas funções injectivas existem entre X e Y?

Resolução:

Dado que existem q escolhas possíveis para a imagem do 1º elemento de X, q-1 para a imagem do segundo, … , obtém-se $q(q-1)\ldots(q-p+1)=\frac{q!}{(q-p)!}$ funções possíveis, ou

---

[1] Alguns autores designam o "pingeonhole principle" por princípio de Dirichlet, por lhe ser atribuida a sua primeira utilização explícita como argumento de demonstração. Com efeito, P. G. L. Dirichlet (1805-1859) foi um algebrista alemão que utilizou este tipo de argumentação combinatória na prova do resultado da Teoria dos Números que, mais adiante, apresentaremos (teorema 1.11).

seja, existem tantas funções (nas condições requeridas) quantos os arranjos de q elementos de Y p a p.

♦

1.2 - Teorema

Sendo R uma relação entre A e B, onde A e B são conjuntos não vazios finitos, são válidas as seguintes afirmações:

a) $\exists \alpha' \in A$ tal que $|R(\alpha')| \geq \frac{|R|}{|A|}$ e $\exists \alpha'' \in A$ tal que $|R(\alpha'')| \leq \frac{|R|}{|A|}$;

b) $\exists \beta' \in B$ tal que $|R^{-1}(\beta')| \geq \frac{|R|}{|B|}$ e $\exists \beta'' \in B$ tal que $|R^{-1}(\beta'')| \leq \frac{|R|}{|B|}$.

Prova:

a) Suponha-se que $|R(\alpha)| < \frac{|R|}{|A|}$ $\forall \alpha \in A$. Então

$$|R| = \sum_{\alpha \in A} |R(\alpha)| < \sum_{\alpha \in A} \frac{|R|}{|A|} = |A| \frac{|R|}{|A|} = |R|,$$

o que é contraditório. Analogamente se prova a existência de $\alpha'' \in A$ tal que $|R(\alpha'')| \leq \frac{|R|}{|A|}$.

As provas dos resultados enunciados em b), são idênticas à anterior, considerando a relação $R^{-1}: B \rightarrow A$ e tendo em conta que $|R^{-1}| = |R|$.

♦

Segue-se um problema cuja resolução pode ser feita com recurso a este teorema.

1.3 Problema

Num concurso a Miss Portugal, apresentaram-se 100 candidatas a uma pré-seleccção feita por 50 elementos de um júri, cada um dos quais escolhe 40 das concorrentes. No pressuposto de que as finalistas serão as escolhidas por um maior número de elementos deste juri, qual o minorante a considerar, em relação ao número de escolhas dos diferentes jurados sobre a mesma candidata, para que esta não seja eliminada, de modo a garantir que pelo menos uma ficará apurada.

Resolução:

Sejam $A_1, \dots, A_{50}$, os 50 conjuntos de cardinalidade 40 que correspondem às escolhas dos 50 jurados, seja S o conjunto das 100 candidatas e considere-se a relação $R:A=\{A_1, \dots, A_{50}\}\rightarrow S$, tal que $\forall i\in\{1, \dots, 50\}$ $(A_i,s)\in R$ sse $s\in A_i$. Então, pelo teorema 1.2 b) $\exists\, s\in S$ tal que $|R^{-1}(s)|\geq\frac{|R|}{|S|}$. Nestas condições, tendo em conta que $|R|=|A|x40=50x40=2000$ (uma vez que para cada $i\in\{1,\dots,50\}$ se obêm 40 pares (A_i,s)), vem que $|R^{-1}(s)| \geq \frac{2000}{100} = 20$. Consequentemente, dado que o número de conjuntos A_i (com $i\in\{1, \dots, 50\}$) a que pertence a k-ésima candidata (com $k\in\{1, \dots, 100\}$) é $|R^{-1}(k)|$, tem-se a garantia de que pelo menos uma das candidatas será escolhida, no mínimo, por 20 jurados.

♦

Dado que uma função é um caso particular de uma relação, do teorema 1.2 decorre imediatamente o seguinte corolário.

1.4 Corolário

Sendo $f:A\rightarrow B$ uma função do conjunto finito não vazio A no conjunto finito não vazio B, pode afirmar-se que

$$\exists\beta'\in B \text{ tal que } |f^{-1}(\beta')|\geq\frac{|A|}{|B|} \text{ e } \exists\beta''\in B \text{ tal que } |f^{-1}(\beta'')|\leq\frac{|A|}{|B|}.$$

1.5 Problema

Dados 5 pontos de $\mathbf{Z}^2$ (i. e, 5 pares ordenados de coordenadas inteiras) p_1, p_2, p_3, p_4 e p_5, prove que pelo menos dois deles, p_i e p_j, têm como ponto médio (ou seja, $p=\frac{1}{2}[p_i+p_j]$) um ponto de $\mathbf{Z}^2$.

Resolução:

Tendo presente os conceito de congruência módulo k (ou de resíduo modódulo k), considere-se a função

$$f:\{p_1,p_2,p_3,p_4,p_5\}\rightarrow\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$

definida do seguinte modo, $\forall j\in\{1, \dots , 5\}$, sendo $p_j=(\alpha_j,\beta_j)$,

$$f(p_j)=(x_j,y_j) \text{ com } \alpha_j\equiv x_j \bmod 2 \text{ e } \beta_j\equiv y_j \bmod 2.\ ^{2}$$

É evidente [3] que $\exists p_i, p_j$ com $i\neq j$, tais que $f(p_i)=f(p_j)$, o que significa que α_i e α_j têm a mesma paridade e β_i e β_j também, logo tanto $\frac{\alpha_i+\alpha_j}{2}$ como $\frac{\beta_i+\beta_j}{2}$ pertencem a $\mathbf{Z}$.

♦

Deve observar-se ainda que, neste último problema, o número 5 é a cardinalidade mínima para que um conjunto de $\mathbf{Z}^2$ tenha pelo menos dois elementos que satisfaçam o requerido. Com efeito, no conjunto de pares ordenados inteiros $\{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$ não existem dois pontos cujo ponto médio tenha cordenadas inteiras.

Relativamente ao corolário 1.4, vamos considerar, ainda, a seguinte generalização.

1.6 Teorema

Se $f:A\rightarrow B$ é uma função do conjunto finito A no conjunto finito $B=\{\beta_1,\dots\beta_p\}$, então são verdadeiras as seguintes afirmações:

a) Se $|A|=q_1+\dots+q_p-p+1$, então $\exists\beta_i\in B$ tal que $|f^{-1}(\beta_i)|\geq q_i$;

b) Se $|A|=q_1+\dots+q_p+p-1$, então $\exists\beta_j\in B$ tal que $|f^{-1}(\beta_j)|\leq q_j$.

Prova:

---

[2] Diz-se que α é congruente com β módulo k e denota-se por $\alpha\equiv\beta \bmod k$, se $\alpha-\beta$ é divisível por k, i. e, se a divisão inteira de α e β por k produz o mesmo resto, o qual designamos por resíduo módulo k.

[3] Observe-se que, pelo corolário 1.4, existe $(x,y)\in\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ tal que $|f^{-1}((x,y))|\geq\frac{5}{4}>1$, donde se pode concluir que $|f^{-1}((x,y))|\geq 2$.

a) Suponhamos que $|A|=q_1+\ldots+q_p-p+1$ e que não existe $\beta_i\in B$ nas condições referidas. Então vem que $|A| = \sum_{i=1}^{p}|f^{-1}(\beta_i)| \leq \sum_{i=1}^{p}(q_i-1) = \sum_{i=1}^{p}q_i - p < \sum_{i=1}^{p}q_i - p + 1 = |A|$, o que é absurdo.

b) Analogamente, suponha-se que $|A|=q_1+\ldots+q_p+p-1$ e que não existe $\beta_j\in B$ nas condições referidas. Então vem que $|A| = \sum_{j=1}^{p}|f^{-1}(\beta_j)| \geq \sum_{j=1}^{p}(q_j+1) = \sum_{j=1}^{p}q_j + p > \sum_{j=1}^{p}q_j + p - 1 = |A|$, o que é uma contradição.

♦

Designa-se por **centroide** de um conjunto de k pontos, $\{p_1,\ldots ,p_k\}$, onde $p_i=(\alpha_i,\beta_i)$ $\forall i\in\{1,\ldots, k\}$, o ponto $p=(\alpha,\beta)$ tal que $\alpha=\frac{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i}{k}$ e $\beta=\frac{\sum_{i=1}^{k}\beta_i}{k}$.

1.7 Problema

Prove que 13 é um majorante e 9 é um minorante para o menor número de pontos de $\mathbf{Z}^2$ (não necessariamente distintos) tal que, quaisquer que eles sejam, pelo menos 3 deles tenham como centroide um ponto de $\mathbf{Z}^2$.

Resolução:

Considerando um conjunto de 13 pontos de $\mathbf{Z}^2$, $A=\{p_1, \ldots , p_{13}\}$, defina-se a função $f:A\rightarrow B=\{0,1,2\}$ tal que, sendo $p_j=(\alpha_j,\beta_j)$, $f(p_j)\equiv\alpha_j \bmod 3$ (logo $f(p_j)\in\{0,1,2\}$).

Tendo em conta $|\{0,1,2\}|=3$ e $|A|=5+5+5-3+1$, por aplicação do teorema 1.6 a), $\exists\beta\in B$ tal que $|f^{-1}(\beta)|\geq 5$ (i. e, pelo menos 5 elementos de A têm a mesma imagem por f). Supondo, sem perda de generalidade, que para um tal β, $f^{-1}(\beta)=\{p_1,p_2,p_3,p_4,p_5\}$, para cada uma das primeiras coordenadas de pontos de $f^{-1}(\beta)$ verifica-se uma das situações:

$$\begin{cases}\alpha_j=3k_{0j}, & \text{para } j=1,\ldots,5\\ \alpha_j=3k_{1j}+1, & \text{para } j=1,\ldots,5\\ \alpha_j=3k_{2j}+2, & \text{para } j=1,\ldots,5\end{cases}, \text{ com os } k_{ij}\in\mathbf{Z},$$

e, em qualquer dos casos, considerados três quaisquer pontos (de entre estes 5) p_r, p_s e p_t, vem que $\frac{1}{3}[\alpha_r+\alpha_s+\alpha_t]\in\mathbf{Z}$. Com efeito, deve observar-se que

$$\frac{1}{3}[3k_{0r}+3k_{0s}+3k_{0t}] = k_{0r}+k_{0s}+k_{0t}\in\mathbf{Z}, \qquad (*)$$

$$\frac{1}{3}[3k_{1r}+1+3k_{1s}+1+3k_{1t}+1] =k_{1r}+k_{1s}+k_{1t}+1\in\mathbf{Z}, \qquad (**)$$

$$\frac{1}{3}[3k_{2r}+2+3k_{2s}+2+3k_{2t}+2] =k_{2r}+k_{2s}+k_{2t}+2\in\mathbf{Z} \qquad (***).$$

Considerem-se, agora, os resíduos módulo 3 das segundas coordenadas dos pontos do conjunto $f^{-1}(\beta)$. Uma vez que estes resíduos só podem tomar o valor 0, 1 ou 2, pelo menos dois deles têm o mesmo valor (00, 11 ou 22). Sem perda de generalidade, suponhamos que esta repetição se verifica para p_1 e p_2. No que se refere aos restantes 3 pontos, ou (i) têm todos resíduos diferentes, (ii) ou têm todos resíduos iguais, (iii) ou têm apenas dois com o mesmo resíduo. Neste último caso, (iii)-a) ou o resíduo das segundas componentes de p_1 e p_2 é distinto de qualquer dos resíduos das segundas componentes de p_3, p_4 e p_5, (iii)-b) ou é igual para um destes três pontos.

Em (i) as segundas componentes de 3 dos 5 pontos são da forma $3k_{0r}$, $3k_{1s}+1$ e $3k_{2t}+2$, com $k_{0r}, k_{1s}, k_{2t}\in\mathbf{Z}$, pelo que $\frac{1}{3}[3k_{0r}+3k_{1s}+1+3k_{2t}+2]=k_{0r}+k_{1s}+k_{2t}+1\in\mathbf{Z}$.

Em (ii) obtém-se uma situação idêntica a (*), (**) ou (***).

Em (iii)-a, tal como em (i), obtêm-se três pontos cujas segundas componentes têm resíduos distintos.

Finalmente em (iii)-b, tal como em (ii), obtêm-se três pontos com resíduos iguais.

Em qualquer dos casos, existem três pontos cujo centroide está em $\mathbf{Z}^2$ e, consequentemente, o mínimo procurado é não superior a 13.

Tendo em conta que no conjunto de pontos $\{p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6,p_7,p_8\}$, com $p_1=p_2=(0,0)$, $p_3=p_4=(1,0)$, $p_5=p_6=(0,1)$, $p_7=p_8=(1,1)$, não existem 3 pontos cujo centroide esteja em $\mathbf{Z}^2$, podemos concluir que 9 é, efectivamente, um minorante para o mínimo em questão (note-se que, sendo n o menor número de pares ordenados de $\mathbf{Z}^2$ nas condições requeridas, se provou que $8<n\leq 13 \Leftrightarrow 9\leq n\leq 13$).

♦

Relativamente ao problema 1.7, prova-se que a menor cardinalidade, n*, de um conjunto de pontos de $\mathbf{Z}^2$ (não necessariamente distintos) tal que, qualquer que ele seja, pelo menos 3 dos pontos do conjunto têm como centroide um ponto de $\mathbf{Z}^2$, é n*=9. No entanto, a prova em questão exige considerações que, de momento, estão fora do contexto.

1.8 Problema (em aberto)

Qual a menor cardinalidade de um conjunto de pontos (não necessariamente distintos) de $\mathbf{Z}^2$ tal que, qualquer que ele seja, pelo menos 4 dos seus pontos têm o respectivo centroide em $\mathbf{Z}^2$.

É claro que os quatro pontos devem ter coordenadas cujos resíduos mod. 4 são da forma 0000, 1111, 2222, 3333, 0022, 0013, 0112, 0233, 1133 ou 1223.

Mais uma vez, por aplicação do teorema 1.6, se mostra que todo o conjunto de 49 pontos verifica a condição requerida, pelo que a cardinalidade mínima, n*, é não superior a 49 ($n^* \leq 49$). Por outro lado, tendo em conta que no conjunto de pontos $\{p_1, \ldots, p_{12}\}$ tal que $p_1=p_2=p_3=(0,0)$, $p_4=p_5=p_6=(0,1)$, $p_7=p_8=p_9=(1,0)$ e $p_{10}=p_{11}=p_{12}=(1,1)$, não existem quatro pontos cujo centroide esteja em $\mathbf{Z}^2$, podemos também concluir que $n^*>12$.

Em geral, vamos denotar por n*(k) o menor número de pontos de $\mathbf{Z}^2$ tal que, quaisquer que eles sejam, existem pelo menos k cujo centroide está em $\mathbf{Z}^2$.

Verifica-se facilmente, recorrendo a uma técnica idêntica à anteriormente utilizada [4], que $n^*(k)>4(k-1)$ $\forall k \in \mathbf{N}$.

[4] Ou seja, construindo-se conjuntos de pares ordenados de componentes 0 e 1 e considerando-os com multiplicidade (k-1).

1.9 Problema (em aberto)

Determinar uma fórmula para $n^*(k)$ $\forall k \in \mathbf{N}$.

Estes problemas podem, ainda, ser generalizados para $\mathbf{Z}^d$ com $d \in \mathbf{N}$. Assim, vamos denotar por $n^*(k,d)$ o menor número de pontos de $\mathbf{Z}^d$ (não necessariamente distintos) tal que, quaisquer que eles sejam, k deles têm o seu centroide em $\mathbf{Z}^d$. A existência deste número está garantida pelo "pigeonhole principle", cuja aplicação nos permite concluir que $n^*(k,d) \leq k^{d+1}$. Por outro lado, considerando d-uplos de coordenadas 0 e 1 com multiplicidade k-1, pode concluir-se que $2^d(k-1) < n^*(k,d)$.

1.10 Problema (em aberto)

Determinar uma fórmula para $n^*(k,d)$ $\forall k,d \in \mathbf{N}$.

Pouco mais se sabe acerca da função $n^*(k,d)$. Trivialmente $n(1,d)=1$ e, em 1949, P. Erdos, A. Ginzburg e A. Zir, mostraram que $n^*(k,1)=2k-1$ (ou seja, quaisquer 2k-1 inteiros têm pelo menos k inteiros cujo valor médio está em $\mathbf{Z}$). Também está provado que $n^*(3,3)=19$ (veja-se o problema 6298, American Mathematical Monthly 89, 1982, pp 279-280).

Conforme se referiu anteriormente, não é conhecida qualquer fórmula para $n^*(k,2)$, embora tenhamos provado que $n^*(2,2)=5$ e referido que $n^*(3,2)=9$.

O teorema que se segue, embora seja um resultado da Teoria dos Números, tem uma demonstração (atribuida a Dirichlet) que recorre, tal como várias das demonstrações anteriores, ao "pigeonhole principle".

1.11 Teorema (de Dirichlet)

$\forall \alpha \in \mathbf{R}^+$ e $\forall n \in \mathbf{N}$ $\exists p \in \mathbf{N}_0$ e $\exists q \in \mathbf{N}$ com $1 \leq q \leq n$ e $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{qn} \leq \frac{1}{q^2}$.

Prova:

Seja $f:\mathbf{N}_{n+1}\rightarrow[0, 1[=[0,\frac{1}{n}[\cup[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[\cup \ldots \cup[\frac{n-1}{n}, 1[$, tal que $f(j)=j\alpha-\lfloor j\alpha\rfloor$ (onde o símbolo $\lfloor x\rfloor$ denota o maior inteiro não superior a x). Dado que existem n subintervalos e $|\mathbf{N}_{n+1}|=n+1$, pode concluir-se que $\exists j,k\in\mathbf{N}_{n+1}$, com $j>k$, tais que f(j) e f(k) pertencem ao mesmo subintervalo. Logo, $\exists r\in\{0,1,\ldots,n-1\}$ tal que $j\alpha-\lfloor j\alpha\rfloor, k\alpha-\lfloor k\alpha\rfloor\in[\frac{r}{n}, \frac{r+1}{n}[$ e, consequentemente,

$$|j\alpha-\lfloor j\alpha\rfloor - k\alpha + \lfloor k\alpha\rfloor|=|j\alpha - k\alpha - (\lfloor j\alpha\rfloor- \lfloor k\alpha\rfloor)| = |(j-k)\alpha - (\lfloor j\alpha\rfloor- \lfloor k\alpha\rfloor)| < \frac{1}{n}.$$

Assim, existe $p\in\mathbf{N}_0$ ($p=\lfloor j\alpha\rfloor - \lfloor k\alpha\rfloor$), tal que $|(j-k)\alpha-p|<\frac{1}{n}$, donde vem que

$$|\alpha-\frac{p}{j-k}|<\frac{1}{n(j-k)} \Leftrightarrow |\alpha - \frac{p}{q}|<\frac{1}{nq}\leq\frac{1}{q^2},$$

com $q=j-k$.

♦

Exercícios

1.1 - Prove que $\forall n,m \in \mathbf{N}$, $n^m \leq 2^{nm}$.

1.2 - Dados dois conjuntos X e Y tais que |X|=|Y|, quantas bijecções existem entre X e Y?

1.3 - Seja $A \in \mathbf{R}^{mxn}$ e suponha que, sobre A, se executaram duas operações de ordenação. Com a primeira operação ordenaram-se, por ordem não crescente, as entradas de A em cada linha obtendo-se uma matriz B tal que $\forall i \in \{1,\ldots,m\}$ $b_{ij} \geq b_{i(j+1)}$ para j=1,…,n-1, e com a segunda operação ordenaram-se, também por ordem não crescente, as entradas de A em cada coluna, obtendo-se uma matriz C tal que $\forall j \in \{1,\ldots,n\}$ $c_{ij} \geq c_{(i+1)j}$ para i=1,…,m-1. Nestas condições, prove que em cada linha da matriz C as entradas se matntêm ordenadas por ordem não crescente, i. e, que $\forall i \in \{1,\ldots,m\}$ $c_{ij} \geq c_{i(j+1)}$ para j=1,…,n-1.

1.4 - Dado um conjunto não vazio X, prove cada uma das seguintes afirmações:

a) Se $P(X)$ é o conjunto das partes de X e |X|=n, então $|P(X)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

b) $\forall p$ tal que p=|X|, o número de subconjuntos de X de cardinalidade par é igual ao número de subconjuntos de X de cardinalidade impar.

1.5 - Prove que $\forall d \in \mathbf{N}$ $n^*(2,d)=2^d+1$.

1.6 - Por aplicação do "pegeonhole principle" prove que $\forall k,d \in \mathbf{N}$ $n^*(k,d) \leq k^{d+1}$.