0. Introdução

Em termos gerais podemos dizer que a Combinatória tem por objectivo a resolução de questões decorrentes de contextos de natureza discreta e, por vezes, aleatória mas com solução determinista, usualmente, designadas por problemas combinatórios. Em Combinatória lida-se, essencialmente, com relações e funções definidas em conjuntos discretos, entendendo-se por **conjunto discreto**, toda a colecção de um número finito ou numerável de objectos distintos, dos quais não faz parte o próprio conjunto. Com efeito, em Combinatória estuda-se como ordenar, contar e construir conjuntos ou subconjuntos de conjuntos discretos.

Ao longo destas notas, dado um conjunto C, denotaremos por $|C|$ a sua **cardinalidad**e, i. e, o seu número de elementos (logo, para o conjunto vazio, que identificaremos por $\emptyset$, vem que $|\emptyset|=0$), $\mathbf{N}$ denotará o conjunto dos número naturais ($\mathbf{N}=\{1, 2, 3, \ldots\}$) e $\mathbf{N}_n$ o conjunto dos primeiros n número naturais, i. e, $\mathbf{N}_n=\{1,\ldots,n\}$ (logo, $|\mathbf{N}_k|=k$).

Dados dois conjuntos, A e B, o **produto cartesiano** AxB corresponde à colecção de todos os pares ordenados (α,β) tais que $\alpha\in A$ e $\beta\in B$, i. e, $AxB=\{(\alpha,\beta): \alpha\in A, \beta\in B\}$.

Uma **relação** R, entre os conjuntos A e B, é um subconjunto do produto cartesiano AxB ($AxB\supseteq R$). Assim, sendo $|A|=p$ e $|B|=q$, conclui-se que existem 2^{pq} relações possíveis entre A e B (com efeito, 2^{pq} corresponde ao número de subconjuntos do conjunto definido pelo produto cartesiano AxB, cuja cardinalidade é pq). No caso de algum dos conjuntos, A ou B, ser vazio, existe uma única relação, que designamos por relação vazia (obtendo-se, neste caso, $2^{pq}=2^0=1$). Sendo R uma relação definida entre os conjuntos A e B, designa-se por **domínio** de R, o conjunto $\{\alpha\in A: (\alpha,\beta)\in R$, para algum $\beta\in B\}$ e por **imagem** de R o conjunto $\{\beta\in B: (\alpha,\beta)\in R$, para algum $\alpha\in A\}$.

Dado um ponto $\alpha\in A$, designa-se por imagem de α pela relação R, o conjunto $R(\alpha)=\{\beta\in B: (\alpha,\beta)\in R\}$. A **imagem reciproca**, por R, de um ponto $\beta\in B$, corresponde ao

conjunto $R^{-1}(\beta)=\{\alpha\in A: (\alpha,\beta)\in R\}$. Por sua vez, a **relação inversa** de R, corresponde ao subconjunto de BxA, $R^{-1}=\{(\beta,\alpha): (\alpha,\beta)\in R\}$.

Uma relação, R, definida num conjunto X (subconjunto de XxX) diz-se (i) **reflexiva** se $\forall x\in X$, $(x,x)\in R$, (ii) **simétrica** se $\forall (x,y)\in R$, $(y,x)\in R$ (por sua vez, diz-se **antisimétrica** se sempre que (x,y) e (y,x) pertencem a R, x=y) (iii) **transitiva**, se sempre que $(x,y)\in R$ e $(y,z)\in R$ se verifica que $(x,z)\in R$. As relações que gozam das propriedades (i), (ii) e (iii) designam-se por **relações de equivalência**. Por sua vez, uma relação reflexiva, antisimétrica e transitiva diz-se uma **relação de ordem parcial**.

Se R é uma relação de equivalência definida num conjunto X, então, para cada $\alpha\in X$, o conjunto $[\alpha]=\{\beta\in X: (\alpha,\beta)\in R\}$ designa-se por **classe de equivalência** de α. Uma relação de equivalência definida num conjunto X determina uma **partição** de X, i. e, uma subdivisão de X em subconjuntos disjuntos (classes de equivalência) cuja união é X. O conjunto de tais classes designa-se por conjunto quociente e denota-se por X/R.

Uma **função** definida num conjunto A e com imagem em B, $f:A\rightarrow B$, é uma relação entre A e B, para a qual se verifica que se $\alpha\in A$, então existe um único $\beta\in B$ tal que (α,β) pertence à relação. Usualmente escreve-se $f(\alpha)=\beta$ (em vez de (α,β)). Se $A=\emptyset$, então a única função entre A e B é o conjunto vazio. Porém, se $A\neq\emptyset$ e $B=\emptyset$, então não existe qualquer função entre A e B. Supondo que $|A|=p$ e $|B|=q$, para a definição da função f, existem q escolhas possíveis para cada um dos p elementos de A, logo existem $qq\ldots q=q^p$ funções possíveis entre A e B.

Dado que uma função é também uma relação, o número de funções entre A e B é não superior ao número de relações. Logo, se $|A|=p$ e $|B|=q$, então $q^p\leq 2^{pq}$ $\forall p,q\in\mathbf{N}$. Obtém-se, assim, uma prova, de natureza combinatória, para uma desigualdade algébrica.

Uma função $f:A\rightarrow B$ diz-se **injectiva** se não existem $x,y\in A$ tais que $x\neq y$ e $f(x)=f(y)$ e diz-se **sobrejectiva** se $\forall\beta\in B\ \exists\alpha\in A$ tal que $f(\alpha)=\beta$. Se f é injectiva e sobrejectiva diz-se que é **bijectiva**.